御製數理精蘊

第二函
函十冊

御製數理精蘊下編卷十二

面部二

勾股

勾股

周髀曰折矩以為勾廣三股修四徑隅五旣方其外半其一矩環而共盤得成三四五兩矩共長二十有五是為積矩此言勾股正數之所以立法也蓋勾股得長方之半形故其一角必成矩所謂直角也面後可謂勾股如其一角不能成矩則為三角形而非勾股矣因勾股一角必直故立於圜界之正一半而自直角所作垂線遂成連比例三率是以直角相對界所作方形之積必與兩傍二界所作兩方形之積等見幾何原

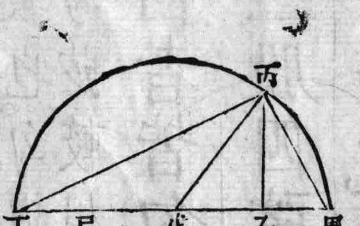
本九卷第四節而勾股弦彼此相求之法於此生焉。其法所該有四。一勾股弦三者。知其二而得其一。或知其二而得其積。一勾股形自其直角對弦界求垂線。一勾股形內容方圓等形。一勾股弦三者。知其一。復知其餘二者之較。或二者之和。而得其二。或知其兩較。或兩和。或一較一和。而得其三。勾股弦和較之法。雖雜出多端。然皆不出勾股弦方積相求之理。較有勾股較。勾弦較。股弦較。和有勾股和。勾弦和。股弦和。和較相疊。則又有弦與勾股和相和。或名之曰弦和和。有弦與勾股和相較。或名之曰弦和較。有弦與勾股較相和。或名之曰弦較和。有弦與勾股較相較。或名之曰弦較較。又有勾與股弦和相和者。或名之曰勾和和。股與勾弦和相和者。

或名之曰股和和。即弦和和也。勾與股弦和相較者，或名之曰勾和較。股與勾弦較相和者。或名之曰股較和。即弦較和也。股與勾弦和相較者。或名之曰股和較。勾與股弦較相和者。或名之曰勾較和。即弦較較也。勾與股弦較相較者。或名之曰勾較較。股與此勾弦較相較者。或名之曰股較較。即弦和較也。

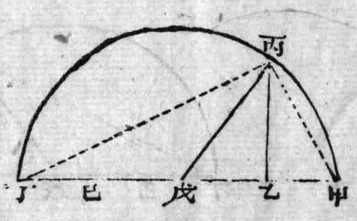
四者皆勾股之正法。理一定而數隨之者也。至若勾三股四弦五之類。倍之至於億兆。而總不越此一定之分者。名曰正勾股。槩以此例推之。則三者止有其一。即可得其二。或有積而即得其三。界此為數一定而法隨之者也。一一按類列題。發明如左。

定勾股弦無零數法

設如用二四八連比例三率定勾股弦無零數。問各得幾何。

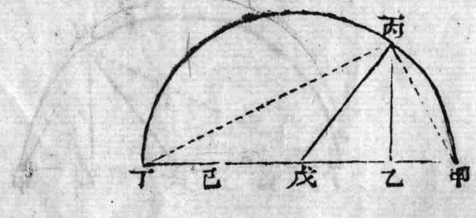


法以中率四命為四尺為股。首率二尺與末率八尺相減餘六尺。折半得三尺為勾。首率二尺與末率八尺相加得十尺。折半得五尺為弦也。如圖甲乙為首率二尺。丙乙為中率四尺。乙丁為末率八尺。今以甲乙與乙丁相和。共為甲丁十尺。而以丙乙立於甲丁線相和之乙

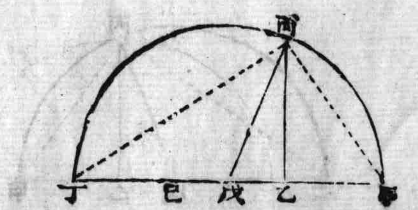


處。乃以甲丁折半於戊。以戊爲心。甲丙丁爲界作半圜。復自丙至甲。至丁。作丙甲丙丁二綫。遂成甲丙丁勾股形。其丙角立於圜界之半。必爲直角。見幾何原本四卷第十四節。而丙乙爲垂線。卽將甲丙丁勾股形分爲甲乙丙丙乙丁兩勾股形。而與原形爲同式三勾股形矣。見幾何原本九卷第一節。其甲乙與丙乙之比。同於丙乙與乙丁之比。爲連比例三率。故以中率丙乙爲

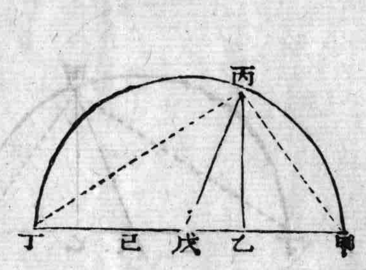
股。而首率甲乙與己丁等。與末率乙丁相減。餘乙己。折半得乙戊為勾。又首率甲乙與末率乙丁相加之甲丁。折半得甲戊戊丁二半徑。與丙戊等為弦也。此法原為定勾股弦三者俱無零數之法。所設之數。必彼此可以度盡。始可立為準則。否則勾股弦三者必有一不盡之數矣。



設如有四六可以度盡之兩數。欲定勾股弦無零數。問各得幾何。



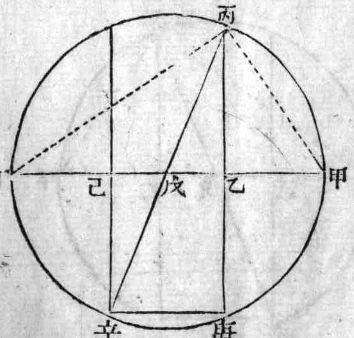
法以四尺爲首率。六尺爲中率。將中率六尺自乘得三十六尺。用首率四尺除之。得九尺爲末率。乃以中率六尺爲股。首率四尺與末率九尺相減餘五尺。折半得二尺五寸爲勾。首率四尺與末率九尺相加得十三尺。折半得六尺五寸爲弦也。如圖甲乙爲首率四尺。丙乙爲中率六尺。今以中率六尺自乘。用首率四尺除之。乃得乙丁末率九尺。爰以甲



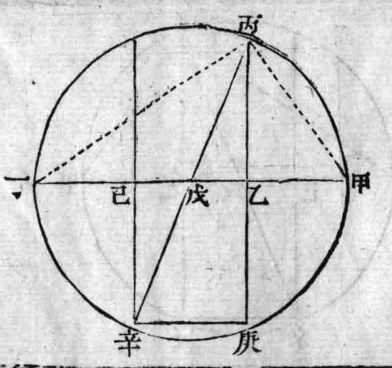
乙首率乙丁末率相和折半於戊。以戊爲心甲丙丁爲界作半圓。復自丙至甲。至丁作二線。則成甲丙丁直角三角形。其丙乙中率。卽爲丙直角之垂線。故以中率丙乙爲股。而首率甲乙與末率乙丁相減。餘乙己折半得乙戊爲勾。而首率甲乙與末率乙丁相加。得甲丁。折半得甲戊。戊丁與丙戊等爲弦也。

設如有四六九連比例三率。以中率六倍之爲股。定

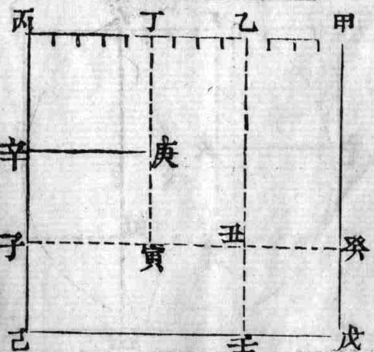
勾弦無零數。問各得幾何。



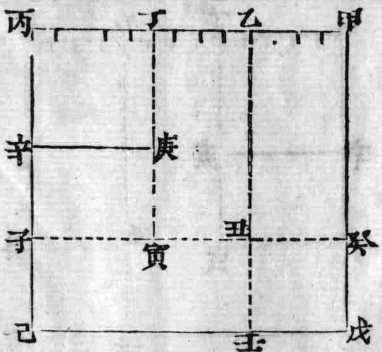
法以首率四尺與末率九尺相減餘五尺爲勾。首率四尺與末率九尺相加得十三尺爲弦也。如圖甲乙爲首率四尺。丙乙爲中率六尺。乙丁爲末率九尺。爰以甲乙首率與乙丁末率相和折半於戊。以戊爲心。甲丙丁爲界作一全圜。復自丙至甲至丁作二線。則成甲丙丁直角三角形。其丙乙中率卽爲丙直角之



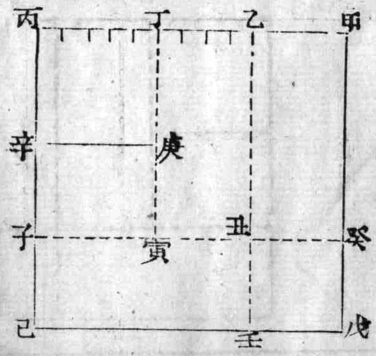
垂線。今將中率丙乙倍之。卽得丙庚爲股。故以首率甲乙與己丁等與末率乙丁相減。餘乙巳與庚辛等爲勾。又首率甲乙與末率乙丁相加。得甲丁全徑與丙辛等爲弦也。蓋前二法用中率爲股。故以首率末率相減折半爲勾。首率末率相加折半爲弦。此法則倍中率爲股。故以首率末率相減卽爲勾。首率末率相加卽爲弦。而皆不用折半也。又圖甲乙爲



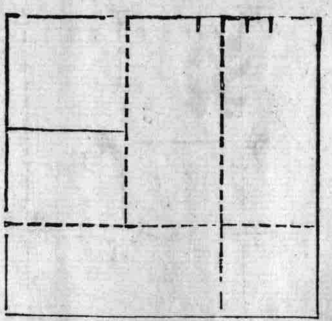
首率四尺。乙丙爲末率九尺甲丙爲首率與末率相加之十三尺。丁丙爲首率與末率相減所餘之五尺。如依甲丙線度作甲戊巳丙正方形。卽爲弦自乘之方。如依丁丙線度作丁庚辛丙正方形。卽爲勾自乘之方。今以乙丙末率亦作一正方形。將兩邊線引長至甲戊巳丙正方形界。則成甲癸丑乙與丑壬巳子二長方形。仍餘癸戊壬丑一小正方形。



又以丁庚辛丙正方形之丁庚界。引長至乙丑子丙正方形之丑子界。則又成乙丑寅丁一長方形。與前一長方形等。仍餘庚寅子辛一小長方形。合前癸戊壬丑一小正方形。則亦與前一長方形等。是此四長方形。皆爲首率與末率相乘之長方而與中率自乘之正方形相等矣。見算法原本二卷第三節如以此四長方形共計之。則爲甲戊己辛庚丁一磬折形。今



甲戊己丙既爲弦自乘之一正方。而丁庚辛丙又爲勾自乘之一正方。則兩方相減所餘之甲戊己辛庚丁磬折形之積。與股自乘之一正方等。見幾何原本九卷第四節。甲戊己辛庚丁磬折形。既爲四長方之共積。則四長方之共積。亦必與股自乘之一正方等。首率末率相乘之四長方。既與股自乘之一正方等。則中率自乘之四正方。亦必與股自乘之一正方等。



是故中率自乘之四正方。合之而爲股自乘之一正方。則其每邊必比中率各大一倍。見幾何原本七卷第五節。故倍中率而爲股者。必取首率末率之和而爲弦。首率末率之較而爲勾。蓋首率末率相和自乘之一正方。內減去首率末率相較自乘之一正方。甫能得中率加倍自乘之一正方積也。