

休姆斯題解叢書

1986

拉普拉斯(變換) 原理及題解

張 智 星 譯

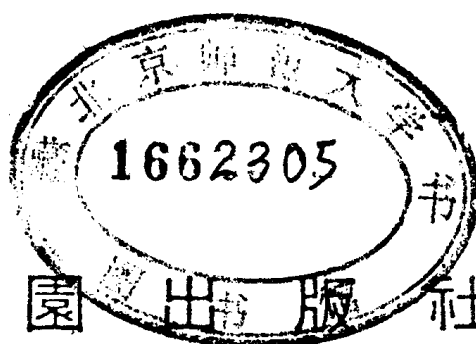
含 877 個問題及解答

曉 園 出 版 社
世界圖書出版公司

拉普拉斯(變換) 原理及題解

張 智 星 譯

541171/13



曉 園 出 版 社

世界圖書出版公司

北京·廣州·上海·西安

1993

拉普拉斯(变换)原理及题解

M. R. 施皮格尔 著

张智星 译

*

晓园出版社出版

世界图书出版公司北京公司重印

北京朝阳门内大街137号

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1993年11月第一版 开本: 787×1245 1/20

1993年11月第一次印刷 印张: 16.5

印数: 0001-900 字数: 25.7万字

ISBN: 7-5062-1638-8/O·83

定价: 12.70元 (W_{9304/8})

世界图书出版公司通过中华版权代理公司向台湾晓园出版社购得重印权
限国内发行

譯 序

本書以循序漸進的方式，介紹拉卜拉士變換 (Laplace transform) 的原理及應用，因此具有下列特色：

- 1 扼要中肯的定理敘述及證明：不拘泥於嚴密的數學證明，而著重於各種定理的應用及推廣。
- 2 以問題為導向的編排方式：先提示定理，再以附解題來證明定理，並應用於各類問題，最後以補充題（均附提示或答案）供讀者自行演練複習。
- 3 題材廣泛：除了拉卜拉士變換外，還包含其他各種相關題材（請參見目錄）。而在問題方面，則包含定積分、電路、傳輸線、熱傳導、結構、波動……等各類應用問題。

由上述特點可看出，本書的實用性甚高，尤其是對於攻讀工科的同學而言，無論做為教科書閱讀或工具書查閱，都是一本不可多得的好書。又因本書以深入淺出、按部就班的方式闡述各種觀念及應用，亦非常適用於自修加強者。

由於譯者個人學識能力有限，疏漏之處在所難免，盼各方高明不吝指教。讀者若發現本書有不妥之處，請直接與曉園書局連絡，讓譯者能有所改進，以臻完善。

本書蒙曉園出版社黃旭政先生惠予出版，深致謝忱。並要感謝編審人員協助，始能順利發行。最後祈盼讀者諸君，均能從本書中獲得莫大助益！

張 智 星 謹識

原 序

拉卜拉士變換理論，亦稱為算子微積分 (Operational Calculus)，近幾年來重要性與日俱增，且為工程師、物理學家、數學家及其他各類科學家所必須具有之數學基礎中的不可缺部分，這不但是因為拉卜拉士變換在理論上的趣味性，更因為有許多科學及工程上的問題，均可用拉卜拉士變換解之。

拉卜拉士變換之誕生，乃源於 19 世紀後半部，Heaviside 企圖以嚴密的步驟來驗證一套運算律 (Operational rules)，並藉此解出在電磁理論方面所遇到的方程式。這些努力，在 20 世紀初，經由 Bromwich, Carson, van der Pol 及其他數學家以複變理論驗證後，證明都是成功的。

本書可做為所有現行標準教科書之課外補充，亦可做為拉卜拉士變換之理論及應用的教科書。在數學、物理、電機工程、熱傳導或其他拉卜拉士變換可資應用之範圍，本書均具有極高之參考及學習價值。

每一章的開始，均包含有關之定義，原理及定理的詳細陳述，並附圖解說，其後接著由淺入深的附解題及補充題。附解題乃為了展示理論如何應用，並擴展理論之應用範圍，更重要的是使讀者在模糊質疑之處，均能抓住要點，全力吸收，再經由基本定理之反覆演練，來達到有效學習之目標。定理之證明及公式之導出，也包含在附解題中。數目眾多的補充題（附有答案），乃供做每章複習之用。

本書之主題包含拉卜拉士變換、反拉卜拉士變換，及其在常微分方程式、偏微分方程式、積分方程式、差分方程式及邊界值問題的應用。複變理論是在本書的後部才提到，這是因為：第一，如此學生才能充分了解各種理論，並意識到複數反變換公式的便利；第二，對於只想得到介紹性知識的學生，這是最好的安排。複變理論及傅立葉級數及積分，在討論複數反變換公式時，是很重要的課題，這些均包含在本書中，對不熟悉這方面的學生非常有幫助。

和一般適用於初學者的教科書比較，本書包含了相當多的教材，這使得本書的教學更具有彈性，並能隨時參考查閱，激發更深一步的興趣。

對於 Schaum 出版公司的鼎力相助，在此提出誠摯謝意。

Rensselaer 技術學院

M. R. SPIEGEL

目 錄

第一章 拉卜拉士變換 1

1. 拉卜拉士變換之定義 1 / 2. 記號表示法 1 / 3. 一些基本函數的拉氏變換 1 / 4. 分段連續性 2 / 5. 指數級函數 3 / 6. 拉氏變換存在的充分條件 3 / 7. 拉氏變換的一些重要性質 3 / 8. 計算拉氏變換的方法 9 / 9. 積分的計算 9 / 10. 一些特殊函數 10 / 11. 特殊函數的拉氏轉換 13 / 附解題 15 / 補充題 38

第二章 反拉卜拉士變換 53

1. 反拉卜拉士變換的定義 53 / 2. 反拉卜拉士變換的唯一性 (勒契定理) 53 / 3. 一些反拉氏變換 54 / 4. 反拉氏變換的一些性質 54 / 5. 計算反拉氏變換的方法 58 / 6. 黑佛塞展開公式 59 / 7. 貝他函數 59 / 8. 積分的計算 60 / 附解題 60 / 補充題 84

第三章 在微分方程式方面的應用 95

1. 常係數常微分方程式 95 / 2. 變係數常微分方程式 95 / 3. 聯立常微分方程式 96 / 4. 在力學方面的應用 96 / 5. 在電路方面的應用 97 / 6. 橫樑方面的應用 98 / 7. 偏微分方程式 99 / 附解題 99 / 補充題 124

第四章 積分及差分方程式方面的應用 137

1. 積分方程式 137 / 2. 褶積型的積分方程式 137 / 3. 阿貝爾積分方程式, 等時問題 138 / 4. 積分微分方程式 138 / 5. 差分方程式 138 / 6. 微分差分方程式 139 / 附解題 139 / 補充題 158

第五章 複變理論 167

1. 複數係 167 / 2. 複數的極式 167 / 3. 極式的運算, 棣馬弗定理 168 / 4. 複數的根 169 / 5. 函數 169 / 6. 極限及連續性 169 / 7. 導式 170 / 8. 柯西-里曼方程式 171 / 9. 線積分 171 / 10. 平面上的革忍定理 172 / 11. 積分 172 / 12. 柯西定理 172 / 13. 柯西積分公式 173 / 14. 泰勒級數 173 / 15. 奇點 174 / 16. 極點 174 / 17. 洛丹級數 175 / 18. 留數 175 / 19. 留數定理 176 / 20. 定積分的計算 176 / 附解題 177 / 補充題 206

第六章 傅立葉級數及積分 215

1. 傅立葉級數 215 / 2. 奇函數及偶函數 215 / 3. 半幅傅氏正弦及餘弦級數 216 / 4. 傅氏級數的複數形式 216 / 5. 傅氏級數的巴塞維恒等式 217 / 6. 有限傅氏變換 217 / 7. 傅氏積分 218 / 8. 傅氏積分的複數形式 218 / 9. 傅立葉變換 219 / 10. 傅立葉正弦及餘弦變換 219 / 11. 褶積定理 220 / 12. 傅氏積分中的巴塞維恒等式 220 / 13. 傅氏變換和拉氏變換的關係 220 / 附解題 221 / 補充題 241

第七章 複數反變換公式 249

1. 複數反變換公式 249 / 2. 布拉威齊路徑 249 / 3. 利用留數定理求反拉氏變換 250 / 4. 沿 Γ 的積分值趨近於零的充分條件 250 / 5. 碰到分枝點時, 布拉威齊路徑的修改 250 / 6. 具有無限多個奇點的情形 251 / 附解題 251 / 補充題 265

第八章 在邊界值問題方面的應用 271

1. 和偏微分方程式有關的邊界值問題 271 / 2. 某些重要的偏微分方程式 271 / 3. 二維及三維的問題 273 / 4. 以拉卜拉士變換解邊界值問題 274 / 習題與解答 274 / 補充題 291

附錄A 拉卜拉士變換的一般性質表 301

附錄B 拉卜拉士變換表 303

附錄C 特殊函數表 313

索 引 315

第一章

拉卜拉士變換

1.1 拉卜拉士變換之定義

令 $F(t)$ 為一對 $t \geq 0$ 所定義的函數，則 $F(t)$ 的拉卜拉士變換 (Laplace transform)，以下簡稱“拉氏變換”可寫成 $\mathcal{L}\{F(t)\}$ ，其定義如下

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \quad (1)$$

在上式中，我們暫時限定參數 s 為實數。往後的討論中，我們會發現如果把 s 值延伸至複數，相當有用。

若(1)式對某些特定的 s 值會收斂 (converges)，則我們稱 $F(t)$ 的拉氏轉換存在 (Exist)，否則，即稱不存在。拉氏變換存在的充分條件，請參見第 2 頁。

1.2 記號表示法

如果我們以大寫字母來表示 t 的函數，如 $F(t)$ ， $G(t)$ ， $Y(t)$ 等，則其對應的拉氏變換式，我們以相對的小寫字母表示，即 $f(s)$ ， $g(s)$ ， $y(s)$ 等。此外，“ $\sim$ ” (Tilde) 亦可用來表示拉氏變換，如 $u(t)$ 的拉氏變換即可寫為 $\widetilde{u}(s)$ 。

1.3 一些基本函數的拉氏變換

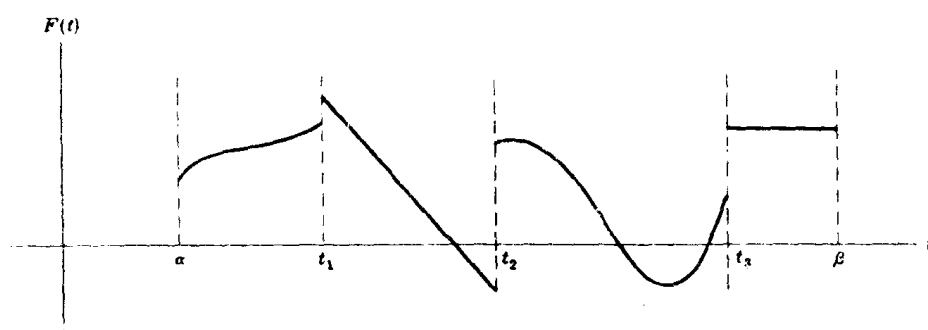
下表為部份基本函數的拉氏變換，均可由(1)式計算求得，請參考第 1 及第 2 題。在附錄 B 中，有更詳細的拉氏變換表。

2 第一章 拉卜拉士變換

	$F(t)$	$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$
1.	1	$\frac{1}{s} \quad s > 0$
2.	t	$\frac{1}{s^2} \quad s > 0$
3.	t^n $n = 0, 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}} \quad s > 0$ 註： n 階乘= $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ 且由定義， $0! = 1$
4.	e^{at}	$\frac{1}{s-a} \quad s > a$
5.	$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2} \quad s > 0$
6.	$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2} \quad s > 0$
7.	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2} \quad s > a $
8.	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2} \quad s > a $

1.4 分段連續性

函數 $F(t)$ 在 $\alpha \leq t \leq \beta$ 有定義，且區間 $\alpha \leq t \leq \beta$ 可分割為有限個子區間，若 $F(t)$ 在這些子區間中均為連續，且其左右端點的極限值均是有限值，則我們稱函數 $F(t)$ 在區間 $\alpha \leq t \leq \beta$ 為分段連續 (Sectionally continuous or piecewise continuous)。



■ 1-1

上面的圖 1-1，即為分段連續函數的一個例子。此函數在 t_1, t_2, t_3 均不連續，以 t_2 而言，其左右端點的極限值分別是 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} F(t_2 - \epsilon) = F(t_2 - 0) = F(t_2 -)$ 及 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} F(t_2 + \epsilon) = F(t_2 + 0) = F(t_2 +)$ ，其中 ϵ 為正數。

1.5 指數級函數

若存在一實常數 $M > 0$ 及一數 γ ，使得對於所有 $t > N$ 時，有

$$|e^{-\gamma t} F(t)| < M \quad \text{或} \quad |F(t)| < M e^{\gamma t}$$

則我們稱“在 $t \rightarrow \infty$ 時， $F(t)$ 為 γ 指數級函數 (Function of exponential order γ as $t \rightarrow \infty$)”，或簡單地說， $F(t)$ 是指數級 (Exponential order)。

例題 1.1

$F(t) = t^2$ 為 3 指數級 (舉例而言)，因為對所有 $t > 0$ ， $|t^2| = t^2 < e^{3t}$ 。

例題 1.2

$F(t) = e^{t^3}$ 不是指數級函數，因為我們可經由 t 之增大，而使得 $|e^{-\gamma t} e^{t^3}| = e^{t^3 - \gamma t}$ 大於任一給定之正數。

直覺上來看，當 t 增大時，指數級函數絕對值的增大速度不會比 $M e^{\gamma t}$ 來得快，但這在實際狀況並不會造成任何限制，因 M 和 γ 的大小可任意選定。

有界函數，如 $\sin at$ 或 $\cos at$ ，均為指數級函數。

1.6 拉氏變換存在的充分條件

定理 1-1: 若 $F(t)$ 在每個有限區 $0 \leq t \leq N$ 均是分段連續，且在 $t > N$ 時， $F(t)$ 為 γ 指數級，則對於所有 $s > \gamma$ ，其拉氏變換 $f(s)$ 存在。

此定理之證明請參見 47 題。但必須強調的是，以上只是拉氏變換存在的充分條件，若不符合上述條件，則拉氏變換可能存在，也可能不存在 (請參見 32 題)。故上述條件並非拉氏變換存在的必要條件。

其他充分條件，請參見 145 題。

1.7 拉氏變換的一些重要性質

在以下的定理中，假設所有函數均滿足定理 1-1 的條件 (除非另有說明)，故所有函數的拉氏變換均存在。

1. 線性性質

定理 1-2: 若 c_1, c_2 為任意常數, 且 $F_1(s), F_2(s)$ 分別是 $F_1(t), F_2(t)$ 之拉氏變換, 則

$$\mathcal{L}\{c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{F_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{F_2(t)\} = c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s) \quad (2)$$

此結論可輕易地推廣至兩個函數以上。

例題 1.3

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{4t^2 - 3\cos 2t + 5e^{-t}\} &= 4\mathcal{L}\{t^2\} - 3\mathcal{L}\{\cos 2t\} + 5\mathcal{L}\{e^{-t}\} \\ &= 4\left(\frac{2!}{s^3}\right) - 3\left(\frac{s}{s^2+4}\right) + 5\left(\frac{1}{s+1}\right) \\ &= \frac{8}{s^3} - \frac{3s}{s^2+4} + \frac{5}{s+1} \end{aligned}$$

將 $F(t)$ 變換成 $f(s)$ 的符號 $\mathcal{L}$, 又稱為“拉氏變換運算子”(Laplace transformation operator)。由於 $\mathcal{L}$ 滿足上述定理, 所以我們又稱之為線性運算子:

Linear operator), 或是說它具有線性性質 (Linearity property)。

2. 第一平移性質

定理 1-3: 若 $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, 則

$$\mathcal{L}\{e^{at} F(t)\} = f(s-a) \quad (3)$$

例題 1.4

因 $\mathcal{L}\{\cos 2t\} = \frac{s}{s^2+4}$, 故

$$\mathcal{L}\{e^{-t} \cos 2t\} = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} = \frac{s+1}{s^2+2s+5}$$

3. 第二平移性質

定理 1-4: 若 $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, 且 $G(t) = \begin{cases} F(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$, 則

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = e^{-as} f(s) \quad (4)$$

例題 1.5:

因 $\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4}$ ，故函數

$$G(t) = \begin{cases} (t-2)^3 & t > 2 \\ 0 & t < 2 \end{cases}$$

的拉氏變換 $6e^{-2s}/s^4$ 。

4. 標度改變性質

定理 1.5: 若 $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ ，則

$$\mathcal{L}\{F(at)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right) \quad (5)$$

例題 1.6:

因 $\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$ ，故

$$\mathcal{L}\{\sin 3t\} = \frac{1}{3} \frac{1}{(s/3)^2+1} = \frac{3}{s^2+9}$$

5. 導式之拉氏轉換

定理 1.6: 若 $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ 則

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = sf(s) - F(0) \quad (6)$$

但上述定理之成立需滿足下列條件：第一 $F(t)$ 在 $0 \leq t \leq N$ 之間為連續，且在 $t > N$ 時， $F(t)$ 為指數級。第二， $F'(t)$ 在 $0 \leq t \leq N$ 之間為分段連續。

例題 1.7:

若 $F(t) = \cos 3t$ ，則 $\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{s}{s^2+9}$ 故

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = \mathcal{L}\{-3 \sin 3t\} = s \left(\frac{s}{s^2+9} \right) - 1 = \frac{-9}{s^2+9}$$

此方法在求拉氏轉換式時可免去積分麻煩。(參見 15 題)

定理 1.7: 在定理 1.6 中，若 $F(t)$ 在 $t=0$ 時不連續，但 $\lim_{t \rightarrow 0} F(t) = F(0+)$ 值存

6 第一章 拉卜拉士變換

在 (此值不一定等於 $F(0)$ ，因 $F(0)$ 可能不存在)，則

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = sf(s) - F(0+) \quad (7)$$

定理 1.8: 在定理 1.6 中，若 $F(t)$ 在 $t = a$ 時不連續，則

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = sf(s) - F(0) - e^{-as}\{F(a+) - F(a-)\} \quad (8)$$

其中 $F(a+) - F(a-)$ 的值，我們稱為在不連續點 $t = a$ 的躍斷 (Jump)。若有更多不連續點，可依此法一一修正。

定理 1.9: 若 $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ ，則

$$\mathcal{L}\{F''(t)\} = s^2 f(s) - sF(0) - F'(0) \quad (9)$$

此定理之成立亦需滿足：第一， $F(t)$ 和 $F'(t)$ 在 $0 \leq t \leq N$ 時均連續，且在 $t > N$ 時均為指數級，第二， $F''(t)$ 在 $0 \leq t \leq N$ 時為分段連續。

若 $F(t)$ 和 $F'(t)$ 有不連續點，可依定理 1.7 及 1.8 來修正 (9) 式。

定理 1.10: 若 $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ ，則

$$\mathcal{L}\{F^{(n)}(t)\} = s^n f(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) - \dots - sF^{(n-2)}(0) - F^{(n-1)}(0) \quad (10)$$

此定理之成立亦需滿足：第一， $F(t), F'(t) \dots F^{(n-2)}(t)$ 在 $0 \leq t \leq N$ 時均連續，且 $t > N$ 時均為指數級，第二， $F^{(n)}(t)$ 在 $0 \leq t \leq N$ 時為分段連續。

6. 積分式之拉氏變換

定理 1.11: 若 $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ ，則

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t F(u) du\right\} = \frac{f(s)}{s} \quad (11)$$

例題 1.8:

因 $\mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2 + 4}$ ，我們可直接得到

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \sin 2u du\right\} = \frac{2}{s(s^2 + 4)}$$

7. 乘以 t^n

定理 1.12 : 若 $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, 則

$$\mathcal{L}\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s) = (-1)^n f^{(n)}(s) \quad (12)$$

例題 1.9 :

因為 $\mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2}$, 故

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{te^{2t}\} &= -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-2}\right) = \frac{1}{(s-2)^2} \\ \mathcal{L}\{t^2e^{2t}\} &= \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-2}\right) = \frac{2}{(s-2)^3} \end{aligned}$$

8. 除以 t

定理 1.13 : 若 $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, 則

$$\mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u) du \quad (13)$$

在此須先確定 $\lim_{t \rightarrow 0} F(t)/t$ 存在。

例題 1.10 :

因為 $\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$ 且 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, 所以

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{du}{u^2+1} = \tan^{-1}(1/s)$$

9. 週期函數

定理 1.14 : 若 $F(t)$ 有週期 $T > 0$ 使得 $F(t+T) = F(t)$ (見圖 1-2) ,

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} F(t) dt}{1 - e^{-sT}}$$

則

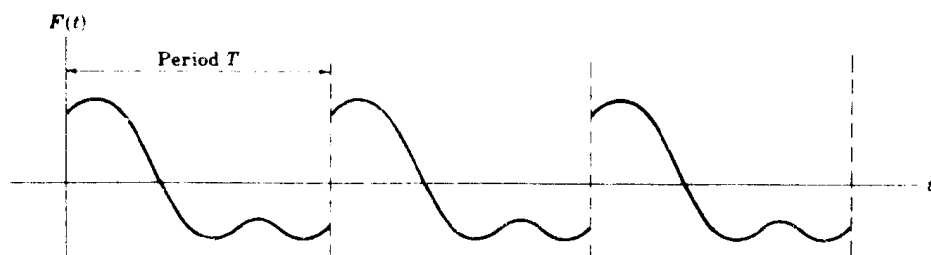


圖 1-2

10. $s \rightarrow \infty$ 時, $f(s)$ 之極限值

定理 1.15 : 若 $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, 則

$$\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 0 \quad (15)$$

11. 初值定理

定理 1.16 : 假設以下之極限值均存在, 則

$$\lim_{t \rightarrow 0} F(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s f(s) \quad (16)$$

12. 終值定理

定理 1.17 : 若以下之極限值均存在, 則

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s f(s) \quad (17)$$

13. 初值定理之推廣

若 $\lim_{t \rightarrow 0} F(t)/G(t) = 1$, 則在 t 值很小時, $F(t)$ 和 $G(t)$ 的值很相近, 我們寫成“當 $t \rightarrow 0$ 時, $F(t) \sim G(t)$ ”。

同理, 若 $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s)/g(s) = 1$, 則在 s 很大時, $f(s)$ 和 $g(s)$ 的值很相近, 我們寫成“當 $s \rightarrow \infty$ 時, $f(s) \sim g(s)$ ”。

在此可將定理 1.16 推廣如下

定理 1.18 : 若當 $t \rightarrow 0$ 時, $F(t) \sim G(t)$, 則當 $s \rightarrow \infty$ 時, $f(s) \sim g(s)$, 其中

$$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}, g(s) = \mathcal{L}\{G(t)\}.$$

14. 終值定理之推廣

若 $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t)/G(t) = 1$ ，我們寫成“當 $t \rightarrow \infty$ 時， $F(t) \sim G(t)$ ”。同理若 $\lim_{s \rightarrow 0} f(s)/g(s) = 1$ ，寫成“當 $s \rightarrow 0$ 時， $f(s) \sim g(s)$ ”，由此可得定理 1.17 的推廣。

1.8 計算拉氏變換的方法

以下之方法均可用於計算拉氏變換

1. 直接計算：直接由定義(1)計算出。
2. 級數法：若 $F(t)$ 可化為冪級數展開如下

$$F(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \quad (18)$$

則其拉氏變換可由等式右方級數逐項變換，然後相加而得之，故

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2} + \frac{2!a_2}{s^3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!a_n}{s^{n+1}} \quad (19)$$

但此法須保證在 $s \rightarrow r$ (19) 式必能收斂時方為有效。參見 34, 36, 39 及 48 題。

3. 微分方程式法：找到滿足 $F(t)$ 的微分方程式，再使用前述定理即可求得；參見 34 及 48 題。
4. 對某參數微分：參見第 20 題。
5. 其他方法：須用到各定理中較特殊的方法。例如定理 1.13。
6. 查表法：（見附錄）。

1.9 積分的計算

若 $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$ ，則

$$\int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt = f(s) \quad (20)$$

令 $s \rightarrow 0$ ，可得