微积分学教程

上　　册

王　现　　罗亚平　　编

南京大学出版社

1987·南京

内 容 提 要

本书是根据国家教委拟定的计算机科学系“数学分析”纲要，并参照综合性大学物理学专业“高等数学”和数学专业“数学分析”教学大纲编写的全书分上下两册，上册包括函数与极限，一元函数的微积分学和级数理论；下册包括空间解析几何和多元函数微积分。

本书重视基本概念、理论和方法，叙述深入浅出，例题、习题多样，便于教学和学生自学。本书可供高等学校计算机科学系、工科大学应用数学系、师范院校数学系以及对数学要求较高的物理类各专业作为教材。也可供理工科大学生及自学青年参考。

微积分学教程

上 册

王 现 罗亚平 编

南京大学出版社出版

（南京大学校内）

江苏省新华书店发行 国营练湖印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 15.4375 字数 401千

1987年8月第1版 1987年8月第1次印刷

印数 1—3500

ISBN 7-305-00037-X/O·4

统一书号：13336·035 定价：4.60 元

前　言

本书是根据国家教委计算机软件教材编委会1984年拟定的计算机科学系“数学分析”纲要，並参照原教育部1980年颁发的综合大学物理学专业“高等数学”和数学专业“数学分析”教学大纲编写的，可作为计算机科学系、工科大学应用数学系、师范院校数学系的“数学分析”教材，也可作为对数学基础要求较高的物理类各专业的“微积分学”教材，对数学有兴趣希望提高一点的理工科大学生和自学青年用于参考，也不会使他失望。

编写时我们注意了以下几点：

1．密切与中学教材相衔接，对中学教材已有的内容只作扼要地复习和补充。

2．取材注重基本理论和解题能力的培养。在理论方面，本书除实数理论外，较系统地讲述了极限论、闭区间上连续函数的性质、微分学中值定理、函数的R可积性和级数理论等；在解题能力培养方面，各节都举了若干有代表性的例题，每节末配了足够多的习题、全书还配了二个综合性的总复习题。当然我们没有忘记本书是供非数学专业的读者使用，因此理论限于最基本的，习题大多为“计算型”，较难的题目在书末附了提示。在应用数学、物理等专业日益需要用到抽象数学分支知识，不少学生又有机会攻读硕士、博士学位继续深造需要深厚的数学基础，而新生数学水平已有所提高的今天，给青年同学这样一些数学训练，就我们的浅见，是需要的，也是可能的。

3．叙述方面，1°力求深入浅出，便于教学和自学，我们重视推导的同时，十分注意讲清思考方法，对初学者不易接受的理论的叙述和证明，尽可能采用先从几何直观入手，引出定理和证明思路，然后再脱离几何直观进行严格论证；2°通过博采众长以及

把一些知识预先作附注，例题和习题的办法，使一些定理的证明较为简明，也节省了后面部分内容的篇幅；3°可以表格化的地方我们都采用了表解这种简明形式。

本书内容我们已在南京大学计算机科学系试用三次，150学时左右全部讲完。在少年部、天文系试用两次，对带“*”号的内容只作简单介绍，130学时左右讲完。

微积分学的基本内容已比较稳定，方法也很经典，我们努力的目标是希望通过重视基本理论、加强基本训练，使在同样多的教学时间内，获很更好的教学效果。当然，由于编者水平所限，未必能达到预想的目标，並且缺点和错误也会存在，诚恳期望专家和读者批评指正！

最后，本书初稿1—6、10、12章由王现，7—9、11、13—15章由罗亚平执笔写成，试用中上册由王现，下册由罗亚平负责修改定稿。本书得以问世，得到南京大学数学系、计算机科学系、教材科、出版社领导的大力支持，蒙徐家福教授关心和指导，姚天行、陈仲、宋国柱、罗定军诸同志给我们提供了宝贵意见，在此谨向他们致以衷心的感谢！

编　者

1987年1月

目 录

第一章 函数与极限

第二章 函数的连续性

第三章 导数与微分

第四章 微分中值定理和导数的应用

第五章 不定积分

第六章　定 积 分

第七章　定积分的应用

第八章　无穷级数

第一章 函数与极限

函数与极限是数学中的两个基本概念，它们贯穿于数学分析的始终，因此在本课程以及后继课程中具有头等重要的地位。函数概念读者中学都已学习过，在此基础上本章作一概述和补充，对极限的最基本理论则作较详细的介绍。根据我们的经验，同学们把这部分内容理解得深刻一些，对今后的学习非常有利，是事半功倍的事。

§1.1 实数集合

常见的数量可以归成两类：如一群牛，一堆蛋，一筐苹果等等，具有不可分割的自然单元者，称为可数型的量；如长度、重量、体积等等，是可以无限细分而不具有自然单元者，称为度量型的量。人类在对客观世界的认识过程中，创造出自然数系来讨论可数型的数量问题，创造出有理数系来讨论度量型的数量问题；但是后来发现有理数系还不能满足讨论度量型的数量问题，或者说变量的数学问题的需要，尚需把有理数系扩展成实数系。

鉴于使用集合论的记号和术语在以后的讨论中能带来很大方便，我们先来阐述集合论中的某些基本概念。

1. 集合论的某些基本概念

在数学中，“集合”一词用来代表具有某种共同特性的、可以相互区别的相异对象之集体，例如平面内以坐标原点O为圆心、定数R为半径的圆周C，就是平面内无穷多个相异的点由到原点O的距离等于定数R这样一个共同特性相联系而成的集合。集

合中的个别对象称为该集合的元素，并说它们属于该集合，也说集合由它的元素所组成。元素与集合的关系，是个别与整体之间的关系。

我们有兴趣的主要是数学对象的集合，如：数的集合，几何图形的集合，函数的集合，等等。但对集合的对象的性质不作任何特殊的假定是有好处的，这样的集合称为抽象的集合。抽象集合论阐述了对任意对象的集合的理论，由于它的一般性而使得应用极其广泛。

集合通常用大写字母 A，B，C，…，S 等表示；集合的元素通常用小写字母 a，b，c，…，s，x，y等表示。a是集合A的元素，记为 $a\in A$，读作"a 属于A"；b 不是A的元素，记为 $b\notin A$或$b\overline{\in} A$，读作"b 不属于 A"。

仅由有限个元素组成的集合称为有限集；含有无穷多个元素的集合称为无限集；不包含任何元素的集合称为空集合，专门用记号ϕ来表示它。

表示集合的方法常用的有列举法和描述法。列举法就是把集合中的元素一一列举出来，写在一个大括号内来表示。例如：

E 是由全部正偶数组成的集合，表示为

$$E=\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 2m,\ \cdots\},\ m\text{—正整数}$$

描述法就是把集合中各元素所具有的共同特性写在大括号内来表示这一集合。例如：

上述集合 E 又可表成：$E=\{n:n\text{ 正偶数}\}$。

前面谈到的圆周C可以表成：

$$C=\{(x,\ y):x^2+y^2=R^2,\ x,\ y\text{ 实数}\}$$

一般，若集合 S是由集合 U 中具有性质 p 的元素 x 组成的，就把它表示成

$$S=\{x:x\in U,\ x\text{ 具有性质}p\}$$

或

$$S=\{x|x\in U,\ x\text{具有性质}p\}$$

这里U称为全集。当全集U是不言自明时，通常简写为

$$S=\{x: x\text{具有性质}p\}\text{，或}S=\{x|x\text{具有性质}p\}$$

设有集合A，B。若A与B是由完全同样的元素组成的，就说A与B相等，记为$A=B$；若至少有一个元素$a\in A$，但$a\notin B$，就说A与B不相等，记为$A\neq B$。例如：

(1) $\{2,4,6,8\}=\{4,6,8,2\}=\{8,6,2,4\}$。

(2) $\{x|x^2-1=0\text{的根}\}=\{y|y^2-1=0\text{的根}\}=\{-1,1\}$。

(3) $\{0\}\neq\phi$。

注意 这一定义说明任何两个集合只要全由同样的元素组成就是等同的，如(1)，(2)所示，因此对抽象集合不考虑其中元素的次序，也与表示此集合的元素使用什么记号无关。

若$\forall x\in A$，同时$x\in B$，则称A为B的子集合，也说集合B包含集合A，记为$A\subseteq B$。

显然，若$A\supseteq B$，同时$B\supseteq A$，则A与B由完全相同的元素组成，因此$A=B$。故$A=B$的充要条件是$A\supseteq B$，且$A\subseteq B$。

若$A\subseteq B$，但$A\neq B$，则称A是B的真子集，记为$A\subset B$。

约定空集ϕ是任何一个非空集合的真子集。

由属于A或属于B的全体元素组成的集合称为A与B的和集或并集，记为$A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x|x\in A\text{或}x\in B\}$$

显然，$A\cup A=A$；$A\cup\phi=A$；$A\subseteq A\cup B$。

由同时属于A，B的一切元素所组成的集合称为A与B的交集，记为$A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x|x\in A\text{，且}x\in B\}$$

在$A\cap B=\phi$的情形，称A与B不相交或A与B是互相分离的。显然，$A\cap\phi=\phi$；$A\cap B\subset A$。

由属于A但不属于B的全体元素所组成的集合，也就是从A中去掉属于B的元素余下元素所组成的集合，称为A与B的差集或B相对于A的补集，记为$A\setminus B$或$A-B$，即

$$A\setminus B=\{x\mid x\in A,\ \text{但}x\notin B\}$$

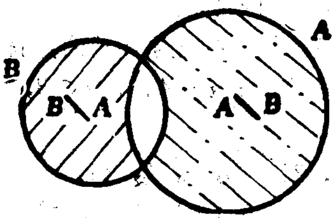

图 1.1

图1.1中 A 内画斜线的部分代表$A\setminus B$；B内画斜线的部分代表$B\setminus A$。

显然，$(A\setminus B)\cup B=A\cup B$。特别，若$B\subset A$，则$(A\setminus B)\cup B=A$（请读者画出示意图形）。

例 设$Q=\{$有理数$\}$，$J=\{$整数$\}$。则

$$Q\cup J=Q;\qquad Q\cap J=J$$

$$Q\setminus J=\{\text{非整数的全部分数}\};\ J\setminus Q=\phi$$

2. 有理数域

大家知道，凡能表成两个整数之商（分母非零）的数称为有理数，全体有理数组成的集合通常用Q表示，即

$$Q=\{q\mid q=\frac{m}{n},\ m,\ n\text{整数},\ n\neq 0\}$$

对有理数除了可施行加、减、乘、除四种运算，并且服从交换律、结合律、分配律（因而Q构成一个数域）外，还有下列性质：

1.1.1 大小次序 $\forall a,\ b\in Q$，有且仅有下列三种关系之一成立：

$$a>b;\ a=b;\ a<b$$

相当于

$$a-b>0;\ a-b=0;\ a-b<0$$

1.1.2 若$a>b$，$b>c$，则$a>c$。

1.1.3 若$a>b$，则$a+c>b+c$，$\forall c\in Q$。

1.1.4 阿基米德(Archimedes)原理，不论数c怎样大，总可找到自然数n，使$n>c$。

这一原理的几何意义是：一线段不论多长，用某个长度单位去度量它，足够多次后总会超过它。

1.1.5 密布性 在任何两个不相等的有理数之间总存在有理数c。

事实上，$c=\frac{1}{2}(a+b)$就是介于a与b之间的一个有理数。

由此性质不难推知：任何两个不相等的有理数之间存在无穷多的有理数。正因为这样，常说“有理数处处密布”。几何直观上表示：有理数对应的点（称为有理点）密密地布满了整个数轴，不再象整数集相应的点那样在数轴上是些离散的点了。这是有理数集区别于整数集的一个重要特性。

3．实数域

“有理数处处密布”的性质，容易使人相信有理数是够用的了，似乎没有引入新数的必要，也没有引入新数的可能。其实不然。如大家知道的：

命题 没有一个有理数其平方等于2。

这说明尽管有理数处处密布，但其间仍有空隙，如果我们只限制在有理数域内讨论，那么，二次方程$x^2-2=0$便没有根；边长为1的正方形之对角线便没有长度，数轴上到原点的距离为此对角线之长的那个点便没有数和它对应，从而说“x从1连续变化到2”就言之无理。因此有理数还不能满足实际需要，尚需引入新数来把有理数加以扩展，这种新数人们把它叫作无理数。可以有各种途径来引进无理数，例如中学教材里把无限不循环小数称为无理数，但在数学分析的教程中大多采用狄台金（Dedekind）分划来定义，我们不准备去深入讨论，在此仅作一粗略描述。先看下列具体例子。

例 我们把有理数集Q作这样三种分划（其中$a, b\in Q$）：

（1） $A=\{a|a\leqslant 1\}$，$B=\{b|b>1\}$，那么A内有最大有理数1，B内无最小有理数。

（2） $A\{a|a<1\}$，$B=\{b|b\geqslant 1\}$，那么A内无最大有理数，B内有最小有理数1。

(3) $A=\{a \mid a\leqslant 0$ 或 $a>0$ 且 $a^2<2\}$，$B=\{b \mid b>0$ 且 $b^2>2\}$，那么可以证明：A 内无最大有理数，B 内也无最小有理数。

一般，把有理数集 Q 任意划分成两个非空的子集合 A，B，使它们满足：

(Ⅰ)每个有理数必在且只在 A，B 的一个之中；

(Ⅱ) $\forall a\in A$，$\forall b\in B$，有 $a<b$。

我们称这样一种分法为对有理数集 Q 的一个分划，记为 $A|B$。可以证明有也只有三种可能：(i) A 内有最大有理数，B 内无最小有理数；(ii) A 内无最大有理数，B 内有最小有理数；(iii) A 内无最大有理数，B 内也无最小有理数。简言之，有也只有两种情况：如，(i)，(ii)两种分划以一有理数为界数，我们说它是由有理数产生的，或者说它定义了一个有理数，如上例中的分划(1)与(2)都定义了有理数 1；另外如第(iii)种分划没有有理数作界数，此时我们就说它定义了一个无理数，如上例中的分划(3)定义了一个无理数，用 $\sqrt{2}$ 表示它。通俗地说，我们一刀把数轴分成两段，那么有也只有两种可能：两段中有一段以有理点为端点，或两段都不以有理点为端点，前一种情形我们说它的分点是一有理点，后一情形我们说它的分点是一无理点。

有理数与无理数统称为实数，对有理数集合 Q 的一个分划或定义了一个有理数，或定义了一个无理数，因此总是定义了一个实数。有了这样的定义之后，我们就可以从有理数的运算性质出发，定义两个实数的和、积与次序，並证明**实数满足有理数具有的上段所述全部性质**，此外它还有与有理数集本质不同的特点：它不再有空隙是一连续的统一体，确切地说就是，若对全体实数构成的集合 R 来作象对有理数集合作的那样的分划，那么有下述情形。

1.1.6 实数集的连续性，把实数集合 R 分划成两个非空子集合 L 和 U：

(Ⅰ) 每个实数必在且只在 L，U 的一个之中；

(Ⅱ) $\forall x\in L$，$\forall y\in U$，有 $x<y$。

则这样的分划$L|U$确定了唯一实数r：

$$x\leqslant r<y \quad 或 x<r\leqslant y,\ \forall x\in L,\ \forall y\in U$$

通俗地讲，一刀切数轴成两段，恒有一段以某个实数r相应的点作为端点。这样任何一个实数可用数轴上唯一的一个点P来表示它，反之，数轴上的每个点P均有唯一实数（称为点P的坐标）与之对应，于是在实数集R和数轴上的点之间建立了一一对应关系。这种一一对应关系看去似乎平淡无奇，但是我们必须强调指出，正是这种一一对应关系，使得我们用几何术语来称呼实数，例如我们可以把"数x"说成"点x"；也才使我们说"点x从点a连续变化到点b"言之有据，因而使整个数学分析建立在可靠的基础之上。

4. 不等式

前已指出实数满足基本不等关系式1.1.1—1.1.4，由此我们可推出下面的一些常用不等式：

1.1.7 若$a>b$，则$c>0$时，$ac>bc$；$c<0$时，$ac<bc$。

1.1.8 若$a>b$，且$ab>0$，则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$。

1.1.9 若$a>b>0$，则$a^n>b^n$（$n\geqslant 2$，正整数）。

事实上，由

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

因为$a-b>0$，且$a>0$，$b>0$，因而右边第二括号内的值>0，所以$a^n-b^n>0$，即$a^n>b^n$。

1.1.10 若$a>b>0$，则$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$（$n\geqslant 2$正整数）。

证明 用反证法，若不然，

$$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b} \text{ 或 } \sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}$$

则由1.1.9和等式的性质有

$$(\sqrt[n]{a})^n\leqslant(\sqrt{b})^n，即 a\leqslant b$$

与假设矛盾。