GAODENGSHUXUEJIANMINGTUBIAO

高等数学简明图表

陈 强编

湖南科学技术出版社

高等数学简明图表

陈 强 编

湖南科学技术出版社

高等数学简明图表
陈 强 编
责任编辑：胡海清
*
湖南科学技术出版社出版
（长沙市展览馆路14号）
湖南省新华书店发行 湖南省新华印刷二厂印刷
*
1982年10月第1版第1次印刷
开本：850×1168毫米 1/32 印张：1.375 字数：31,000
印数：1—18,500
统一书号：13204·65 定价：0.22元

前 言

这本小册子以图表形式概括了高等数学的主要内容(包括基本概念、定理、公式、运算法则和方法等)。它具有内容全面、重点突出、简明扼要、形式新颖等特点。在高等数学教学参考资料中,它别具一格。

这本图表不拘于通常的内容编排顺序,而注意高等数学前后知识的联贯。比如;

表中归纳了求极限的各种基本方法,以便于读者识别类型,系统掌握;

表中将微分与积分,将定积分与重积分、曲线积分及曲面积分,从概念及其实际背景、性质和定理、计算公式与法则等各方面予以比较,这样既便于记忆或查阅,又便于了解它们的区别与联系,从而帮助读者更牢固地掌握这部分非常重要的内容。

此外,对高等数学中一些重要的计算或运算步骤、解题方法以及需要注意的问题或难点,表中也尽量予以列出。

这本小册子可供各类理工科大学及有关电视、业余、函授等高等院校、中等专业学校的学生以及自学高等数学的读者学习或复习时使

用；也可供工程技术人员及一切需要用到高等数学的同志当作手册查阅。另外，对从事高等数学教学的同志也有一定的参考作用。

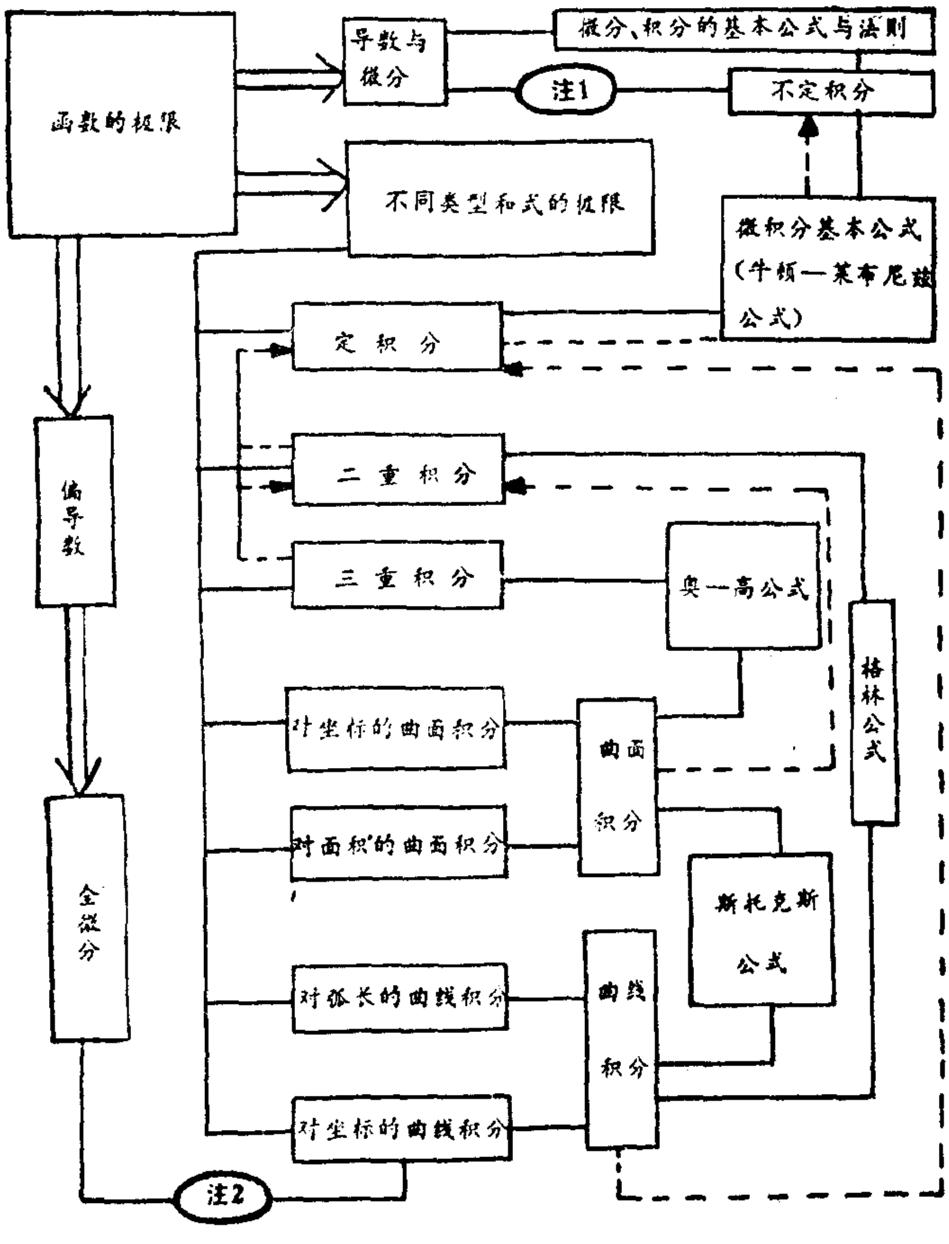
在编制本图表过程中，承彭肇藩，邹节铣副教授给予热情支持和帮助，并提出许多宝贵意见，值此谨向他们表示衷心的感谢。

限于编者水平，本书难免有不少缺点、错误，敬请读者批评指正。

编　　者　1981.2.

目 录

微积分主要关系简图



说明 ⟹ 引出　　—— 关联　　----- 计算转化

注1　$F'(x)=f(x) \Longleftrightarrow \int f(x)dx = F(x)+c$（互逆关系）

注2　$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 为全微分充要条件 $\Longleftrightarrow \int Pdx+Qdy$ 与路线无关条件

函 数 的 极 限

定义		$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$是指：对任给$\varepsilon>0$，总存在一个$\delta>0$，使当$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$时恒有$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$成立。 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$是指：对任给$\varepsilon>0$，总存在一个正数$N$，使当$\lvert x\rvert>N$时恒有$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$成立。 注：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)$（左极限＝右极限）。
求极限的	利用极限基本公式	设 $\lim f(x)$、$\lim g(x)$存在，则有 $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$； $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$； $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ $(\lim g(x)\neq 0)$ （有时配合约简分式或有理化分子或分母）
	利用无穷大与无穷小关系	$\underset{(无穷小)}{\lim f(x)=0} \underset{f(x)\neq 0}{\Longrightarrow} \dfrac{1}{f(x)}$为无穷大；$\underset{(无穷大)}{\lim f(x)=\infty} \Longrightarrow \dfrac{1}{f(x)}$为无穷小。
	利用两个基本极限	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$； $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$或$\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)^z=e$。
	利用初等函数的连续性	设 $f(x)$为初等函数，$x_0\in$定义区间则有：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$；$\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]$。
	利用相当无穷小简化计算	若$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，则$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$ $\left(\alpha\sim\alpha'\text{是指}\lim\dfrac{\alpha}{\alpha'}=1\right)$ 如：$x\to 0$时，$x\sim\sin x\sim \mathrm{tg}\, x\sim(e^x-1)\sim\ln(1+x)\sim\arcsin x\sim\mathrm{arc\,tg}\, x$等。 注：和或差中的项不能用其相当无穷小替代。

基本方法	不定式的罗必塔法则	$\frac{0}{0}$型：设1）$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$；2）在点$a$的某邻域（点$a$除外）$f'(x)$。$g'(x)$存在且$g'(x)\neq 0$； 3）$\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K$（有穷或无穷）。则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g'(x)}=K$。 $\frac{\infty}{\infty}$型：设1）$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$，2）、3）同上，则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K$。 **注**：1°以上当$x\to\infty$时，2）中某邻域改为$\lvert x\rvert>N$则有同样结论。 2°若$\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$亦为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型，可再用以上方法计算。
		$0\cdot\infty$或$\infty-\infty$型：先化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型再用法则。 1^{∞}，0^{0}，∞^{0}型：可先取对数再用法则，如设$y=[f(x)]^{g(x)}$，则$\ln y=g(x)\cdot\ln f(x)$的极限为$0\cdot\infty$型，用法则求出$\lim(\ln y)=K$（或$+\infty$或$-\infty$），则$\lim y=e^{k}$（或∞，或0）。
	关于数列的极限	1° 数列$\{a_n\}=\{f(n)\}$若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在（有限或无限），则$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$。 2° 利用数列极限的存在准则：1）单调有界数列必有极限； 2）若$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$（$n=1, 2, \cdots$），$\lim y_n=a$，$\lim z_n=a$，则$\lim x_n=a$。其他，如利用级数收敛的必要条件；利用定积分等。

函数的连续性

连续性定义	两个重要定理	两类间断
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$或$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ 则称$f(x)$在x_0处连续。 一切初等函数在所有使它们有意义的点连续。	$f(x)$在$[a,b]$连续，（端点指单边连续），则有 1° 最大最小值定理 2° 介值定理	第一类：跳跃间断点$f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$；可去间断点$f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$ 第二类：$f(x_0-0)$、$f(x_0+0)$至少有一个不存在。

一元微积分基本概念

导数	微分	不定积分	定积分
设 $y=f(x)$，则 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$	$dy=f'(x)\Delta x=f'(x)dx$ 它是函数增量Δy的线性主部： $\Delta y=dy+\alpha\cdot\Delta x$ ($\Delta x\to 0$时$\alpha\to 0$)	$f(x)$的原函数全体，叫$f(x)$的不定积分，记为 $\int f(x)dx=F(x)+c$ c为任意常数，$F(x)$为$f(x)$的一个原函数，即	$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i$ 式中$[a,b]$任意分为n个小区间$[x_i,x_{i+1}]$($i=0,1,\cdots n-1$) ξ_i表示子区间$[x_i,x_{i+1}]$上任一点，λ

几何上表示曲线$y=f(x)$在点$(x,f(x))$的切线的斜率。 高阶导数 $f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}(x)]'$. $(n=2, 3, \cdots)$	高阶微分 $d^ny=d(d^{n-1}y)$	$F'(x)=f(x)$	表示最大子区间的长度

一元微积分中几种重要关系

连续与可导	可导与可微	导数与不定积分	对积分上限的导数	定积分与不定积分
$f(x)$在点x可导，则在点x连续；反之，若$f(x)$在点x连续，则不一定可导。如$y=\|x\|$在$x=0$连续，但$f'(0)$不存在(左导数≠右导数)。	$f(x)$在点x可导$\Longleftrightarrow f(x)$在点x可微。	$F'(x)=f(x)\Longleftrightarrow$ $\int f(x)dx=F(x)+c$。 $[\int f(x)dx]'=f(x)$，即： $d[\int f(x)dx]=f(x)dx$， $\int f'(x)dx=f(x)+c$， 即： $\int df(x)=f(x)+c$。	$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$ $\frac{d}{dx}\int_a^{b(x)} f(t)dt$ $=f[b(x)]\frac{db(x)}{dx}$	$\int_a^b f(x)dx=\int f(x)dx\Big\|_a^b$ $=F(b)-F(a)$。 (其中$F'(x)=f(x)$) $\int f(x)dx=\int_a^x f(t)dt+c$。

微分、积分基本公式

$$\left(F'(x)=f(x)\Longleftrightarrow\int f(x)dx=F(x)+c\right)$$

$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$	$\int x^\mu\,dx=\frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1}+c,$
$(a^x)'=a^x\ln a,$	$\int a^x dx=\frac{1}{\ln a}a^x+c,$
$(e^x)'=e^x,$	$\int e^x dx=e^x+c,$
$(\log_a x)'=\frac{\log_a e}{x},$	$\int\frac{1}{x}dx=\ln\|x\|+c,$
$(\ln x)'=\frac{1}{x},$	
$(\sin x)'=\cos x,$	$\int\cos x\,dx=\sin x+c,$
$(\cos x)'=-\sin x,$	$\int\sin x\,dx=-\cos x+c,$
$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x},$	$\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\operatorname{tg} x+c,$
$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x},$	$\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\operatorname{ctg} x+c,$
$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$	$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+c,$
$(\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$	
$(\operatorname{arc\,tg} x)'=\frac{1}{1+x^2},$	$\int\frac{1}{1+x^2}dx=\operatorname{arc\,tg} x+c,$
$(\operatorname{arc\,ctg} x)'=\frac{-1}{1+x^2},$	
$(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x,$	$\int\operatorname{ch} x\,dx=\operatorname{sh} x+c,$
$(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x,$	$\int\operatorname{sh} x\,dx=\operatorname{ch} x+c,$
$(\operatorname{th} x)'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$	$\int\frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}=\operatorname{th} x+c,$
$(\operatorname{Arsh} x)'=[\ln(x+\sqrt{x^2-1})]'$ $=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$	$\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\operatorname{ar\,sh} x+c,$ $=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+c,$
$(\operatorname{Arch} x)'=[\ln(x+\sqrt{x^2-1})]'$ $=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$	$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx=\operatorname{arch} x+c$ $=\ln(x+\sqrt{x^2-1})+c,$
$(\operatorname{arth} x)'=\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)'$ $=\frac{1}{1-x^2},$	$\int\frac{1}{1-x^2}dx=\operatorname{arth} x+c$ $=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+c,$

微分(求导)法则与不定积分法则

和差求导	$c'=0,(cv)'=cv',\ (u\pm v)'=u'\pm v'$
和差求积	$\int(k_1,u\pm k_2v)dx=k_1\int udx\pm k_2\int vdx$

积商求导		$(uv)'=uv'+vu'$; $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-uv'}{v^2}$.
分部积分法		$\int uv'dx=u\,v-\int vu'dx$ 或 $\int udv=uv-\int vdu$.
	注 1	关键在于正确选择u和dv，一般要求，由dv容易求出v，$\int vdu$比$\int u\ dv$简单易求。
	注 2	对于 $\int x^n\ln xdx$，$\int x^n\text{arc tg}\,xdx$，$\int x^n\ \text{arc sin}\,xdx$，可设$dv=x^ndx$
	注 3	对于 $\int x^n\cos\alpha xdx$，$\int x^n\sin\alpha xdx$，$\int x^ne^{\alpha x}dx$等，设$x^n=u$，多次用分部积分，使幂函数的幂逐步降低
	注 4	有时用分部积分后又出现原来要求的那个积分，从而得到所求积分的一个代数方程，解此方程即得所求之积分。如： $\int e^{\alpha x}\sin\beta xdx$；$\int e^{\alpha x}\cos\beta xdx$。设$u=e^{\alpha x}$。

微分形式不变性	$df(x)=f'(x)dx\Longrightarrow df(u)=f'(u)du$. 如：$d\sin x=\cos xdx\Longrightarrow d\sin u=\cos udu$，于是微分基本公式可予扩充。
积分形式不变性	$\int f(x)dx=F(x)+c\Longrightarrow\int f(u)du=F(u)+c$， 如：$\int\cos xdx=\sin x+c\Longrightarrow\int\cos udu=\sin u+c$，于是积分基本公式可予扩充。

复合函数求导	法则	若$y=f(u), u=\varphi(x)$可导，则$\frac{dy}{dx}=f'(u)\varphi'(x)=y'_u\cdot u'_x$。
	用参数表示的函数的导数	设$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}$ $(\alpha<t<\beta)$。 则有 $y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$，$y''_{xx}=\frac{d\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{dx}=\frac{\left[\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}\right]'_t}{\varphi'(t)}$， $\varphi(t)$、$\psi(t)$可微，$\varphi'(t)\neq 0$。
	对数求导法	等式两边先取对数，如：$y=u^v$，$\ln y=v\ln u$，$1/y\cdot y'=(v\ln u)'$， 再按复合函数求导。则$y'=u^v(vu'/u+v'\ln u)$。
	隐函数求导	设 $F(x,y)=0$，等式两边按复合函数求导可求出y'；或$y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}$ $(F'_y\neq 0)$
积分	第一换元法	$\int g(x)\,dx\xlongequal{凑微分}\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx\xlongequal{u=\varphi(x)}\int f(u)\,du\xlongequal{易求}F(u)+c=F[\varphi(x)]+c$。 如：$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int f(u)du$； $\int f(ax^2+b)xdx=\frac{1}{2a}\int f(u)du$ $\int f(\sin x)\cos x dx=\int f(\sin x)d\sin x$； $\int f(\cos x)\sin x dx=-\int f(\cos x)d\cos x$； $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\frac{df(x)}{f(x)}=\ln\lvert f(x)\rvert+c$； $\int f(\ln x)\frac{1}{x}dx=\int f(\ln x)d(\ln x)$ 等

换元法	第二换元法	$\int f(x)\,dx \xlongequal{x=\psi(t)} \int f[\psi(t)]\psi'(t)\,dt = \int g(t)\,dt \xlongequal{易求} F(t)+c = F[\overline{\psi}(x)]+c$。 ($x=\psi(t)$单调可导，且$\psi'(t)\neq 0$) 1° 被积函数含$\sqrt{a^2-x^2}$，设$x=a\sin t$；含$\sqrt{a^2+x^2}$，设$x=a\,\mathrm{tg}\,t$；含$\sqrt{x^2-a^2}$，设$x=a\sec t$。 2° $\int R(\cos x,\sin x)dx$，$R(\quad)$表有理函数，设 $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$，则$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，$dx=\frac{2dt}{1+t^2}$将其代入转化。 3° $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}\right)dx$（$n$整数），设$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}=t$。 4° $\int R[(ax+b)^{\alpha},(ax+b)^{\beta},\cdots,(ax+b)^{\delta}]dx$，式中$\alpha$、$\beta\cdots$、$\delta$为分数，若分母的最小公倍数为$m$，则设$t=(ax+b)^{1/m}$。

注 1	有时用代数或三角变换将被积函数表示成若干函数的和，从而可把一个较复杂的积分分解为若干简单积分的和。
注 2	有时交替使用分部积分法与换元积分法。
注 3	关于有理函数的积分：1）先化为一个多项式与一个真分式的和；2）有理真分式化为部分分式（待定系数法）可归结为下列形式之积分 $\int\frac{A}{x-a}dx$；$\int\frac{A}{(x-a)^n}dx$；$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$；$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx\,(p^2<4q)$

中值定理

微分中值定理				定积分中值定理
洛尔定理	拉格朗日定理	哥西定理	泰勒公式	设$f(x)$在$[a,b]$连续，则在(a,b)上至少存在一点ξ使 $\int_a^b f(x)dx$ $=f(\xi)(b-a)$，$(a\leqslant\xi\leqslant b)$
设$f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)可导，且$f(a)=f(b)$，则在(a,b)至少存在一点$\xi(a<\xi<b)$使 $f'(\xi)=0$	设$f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)可导，则在(a,b)至少存在一点$\xi(a<\xi<b)$使 $f(b)-f(a)$ $=f'(\xi)(b-a)$或 $f(x+\Delta x)-f(x)$ $=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$，$(0<\theta<1)$。	设$f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)可导，$g'(x)\neq 0$，则在(a,b)至少存在一点$\xi(a<\xi<b)$使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ $=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$	设$f(x)$在含有x_0的某个开区间(a,b)内具有直到$(n+1)$阶导数，则当$x\in(a,b)$ $f(x)$可表为 $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k+R_n$. 式中 $R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$. ξ是在x及x_0间的某个值。$x_0=0$得麦克劳林公式，$n=0$得拉格朗日定理。	
			注：哥西定理 $\xrightarrow{g(x)=x}$ 拉格朗日定理 $\xrightarrow{f(a)=f(b)}$ 洛尔定理	

广义积分

	无穷区间上的广义积分	无界函数的广义积分
收敛	若$\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$存在，则定义	若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx(\varepsilon>0)$存在，则定义