高等量子物理与杨振宁-米尔斯规范场理论

赵庆海　著

北京师范大学出版社

前　言

我在北京师范大学毕业后，先在牡丹江师范学院数学系任教。在此期间，曾在南开大学陈省身数学研究所进修，学习泛涵分析空间理论的应用，当时由美籍华人林伯碌教授主讲。在他讲到 l^2 应用时，涉及到高等量子物理学。引起我对这门学科的兴趣。后来，学院组建物理系，我又到牡丹江师范学院物理系工作。嗣后，我很幸运地回北师大物理系统计物理研究班进修，先后两次敬听尊敬的喀兴林教授主讲高等量子物理学。

通过学习高等量子物理学，使我感到，按海森堡所说，初等量子物理是矩阵力学，那么高等量子物理学就应该是泛函力学。我的这个想法得到了美籍华人林伯碌教授的支持，同时也得到中科院系统所朱广田教授和中科院原子能所阳明珠教授的支持。因为 Banach 空间四大定理（闭图象定理、开映象定理、共鸣定理、延拓定理）可以构成高等量子物理学的数学理论基础，而独树一帜的泛函分析中的函数逼近论的核心定理——维尔斯特拉斯定理，则充当了这一主要角色。正因为如此，才有可能实现高等量子物理学公理化的数学描述。这是本书形成的指导思想之一。

高等量子物理的数学理论基础是泛函分析，那么高等量子物理学属于何种理论体系呢？

关于这个问题，我想在这里多用点笔墨。

1984 年 12 月，在中国北京首次召开扬振宁-米尔斯场学术会议。扬振宁、米尔斯都亲临北京，一个偶然的机会使我得到米尔斯的讲话。米尔斯在这个长篇讲话中，全面论述了这个理论产生的历史背景，以及当时他们所做的工作，最后讲及了这个理论的发展前途，这就是扬振宁-米尔斯规范场。

同年，华东师范大学胡瑶光教授出版《规范场论》一书。这

本书以精炼语言介绍了扬振宁-米尔斯规范场论。

从此后，我一直在研究这个理论。多年来，经过反复讨论，可以得出这样的结论：

扬振宁-米尔斯规范群参数化的指数形式（$u=e^{-i\theta_a T_a}$）是一种普适矩阵表示，而本书§4.5中（4.75）式（三维完全转动群的公式 R（α）$=e^{-i\alpha_i T_i}$）是扬振宁-米尔斯规范群的特殊矩阵表示，这说明高等量子物理学理论体系是属于扬振宁-米尔斯规范场论理论。

这种形式的完美及统一，充分说明了基本粒子在内禀空间（包括轻子数，重子数，同位旋等）转动时的和谐。同时，也证明了扬振宁-米尔斯定域规范群具有更大的对称性。从而为我们强烈地预示了通过扬振宁-米尔斯定域规范群而实现包括引力场在内的弱，电强四种相互作用的超统一超对称理论。

为了纪念扬振宁-米尔斯规范场理论发表38周年，我用泛函积分方法证明了扬振宁-米尔斯规范场群表达式 $u=e^{-i\theta_a T_a}$。具体来说，就是在一个丛截面上引进一个 λ 参数。进行泛函积分后，令其投影。我的这一工作受到在美国加州大学获得博士学位的刘亦铭教授的支持，并写成论文，题目是：

《Disscussing Lp Group And It's Infinitesimal Transformation in quantum Field》（此文已收入国际会议论文集）

今年是扬振宁-米尔斯规范场理论发表40周年，作者借出版机会，把此文载于书后附录，以此作为隆重纪念。

中国科学院理论物理研究所朱重远教授在1994年春节前于百忙之中阅稿，并提出宝贵意见，作者表示敬意。

作者特别感谢中国科学院系统所朱广田教授赐序。

北京师范大学校长、博士导师方福康教授对本书出版给与热情支持，在此，作者一并向他们表示感谢。

作　者

一九九四年二月

序

本书是作者赵庆海为纪念扬振宁-米尔斯规范场理论发表40周年而写的一部专著。是作者多年来利用泛函分析和扬振宁-米尔斯规范场理论研究高等量子物理学的结果。

作者利用泛函分析理论阐述了高等量子物理的基本原理，说明高等量子物理也就是泛函力学。因为目前高等量子物理正在被数学化，所以作者这种观点具有新意。

作者以群论为核心，说明三维转动群是扬振宁-米尔斯规范群的特殊矩阵表示，从而论证了高等量子物理学属于扬振宁-米尔斯规范场理论体系，这是一种创新观点，值得一读。

本书附录是作者用泛函方法证明扬振宁-米尔斯规范群表达式 $u=e^{-i\theta_a T_a}$，已收入国际会议论文集。今载于书末，是为了隆重纪念扬振宁-米尔斯规范场理论发表40周年。我想，作者如此为之，也是适时的。

中国科学院系统科学研究所教授朱广田

一九九四年春节前夕

目　录

第一部　高等量子物理学的数学理论

第一章　泛函分析空间理论

泛函分析空间是建立高等量子物理学的数学框架，物理可观测量用希耳伯特空间中的算子表示，而物理态是希耳伯特空间的向量（函数）。描述物理系统中可能状态的函数最重要性质是它们形成一个完备集，整个量子理论是建立在这一事实的基础之上的。因此本章的大部分将以这种或那种方式与函数集合的完备性有关。

在本章末尾我们将综合全章所发展的关于泛函分析空间理论的关键结论，并着重于它们在表述高等量子物理中的作用。

§1.1　函数空间和希耳伯特空间

现在，我们定义一个向量空间，它的组元是函数。这个空间的组元是定义在闭区间 $[a, b]$ 上实变量 x 的复值函数，它们的平方可积的。我们将证明平方可积函数的集合形成一个向量空间，这种空间被数学家称为 L_2，我们 叫它函数空间，它是一个无穷维空间。

1）闭区间 $[a, b]$ 是满足 $a \leqslant x \leqslant b$ 所有点 $\{x\}$ 的集合，开区间 (a, b) 是满足 $a<x<b$ 所有点 $\{x\}$ 的集合，闭区间总是有限的；若 a 或 b 是无限的，则区间在那端是开的，在本章的后半部，当讨论到无限区间时，我们将提醒读者明确地指出这种从有限到无限区间的变动。

2）若$\int_a^b |f(x)|^2 dx$存在且有限，则函数在$[a, b]$上是平方可积的。

直观上，函数空间似乎要比有限维空间P_n大很多，某种意义上也确是如此，但是，设P_n的基函数集合为$\{x^m, m=0, 1, 2, \cdots\cdots n\}$当$n\to\infty$时，该集合将扩充到包括所有可能的$x$的幂。本章的中心结论，维尔斯特拉斯（Weierstrass）定理指出这个函数的无限集合并不像它们似的那样贫乏。我们将扼要地给出它的潜在能力的精确说明，首先我们要回到函数空间的定义。

在函数空间中两个向量f_1和f_2的加法，按自然规则定义为$(f_1+f_2)(x) \equiv f_1(x) +_2 (x)$，而与复标量$\alpha$的乘法定义为

$\alpha f \equiv \alpha f(x)$。

在说明这些运算满足定义向量空间的各种公理时，唯一的困难是建立封闭性，即是平方可积函数的和以及与标量的乘积是否仍是平方可积的？回答是肯定的。并且该空间事实上是一个向量空间，我们证明求和的封闭性。

$$\begin{aligned}|f_1 + f_2|^2 &= |f_1|^2 + |f_2|^2 + f_1^* f_2 + f_1 f_2^* \\ &= |f_1|^2 + |f_2|^2 + 2\mathrm{Re}(f_1^* f_2) \\ &\leqslant |f_1|^2 + |f_2|^2 + 2|f_1^* f_2| \\ &\leqslant |f_1|^2 + |f_2|^2 + 2|f_1||f_2| \end{aligned} \tag{1.1}$$

又 $0 \leqslant (|f_1| - |f_2|)^2 = |f_1|^2 + |f_2|^2 - 2|f_1||f_2|$，

所以$|f_1|^2 + |f_2|^2 \geqslant 2|f_1||f_2|$.

我们用最后一个不等式来代替方程（1.1）中的$2|f_1||f_2|$，它使式（1.1）右方数值增大，因此不等式仍保持。于是不等式

$$|f_1 + f_2|^2 \leqslant 2|f_1|^2 + 2|f_2|^2 \tag{1.2}$$

在$[a, b]$中任一点上成立。两边积分后可得出：平方可积的f_1与f_2之和仍是平方可积的。

现在我们对函数空间定义内积。

定义 1.1 属于函数空间的两函数 f_1 和 f_2 的内积定义为

$$(f_1, f_2) \equiv \int_a^b f_1^*(x) f_2(x) \mathrm{d}x, \tag{1.3}$$

注意平方可积隐含 $(f_1, f_2) \equiv ||f||^2 = \int_a^b |f|^2 \mathrm{d}x < \infty$。量 $||f||$ 称为 f 的模，任何一对平方可积函数的内积也存在，因为

$$|f_1^* f_2| = |f_1||f_2| \leqslant \frac{1}{2}(|f_1|^2 + |f_2|^2),$$

所以可得

$$\int_a^b f_1^* f_2 \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}(||f_1||^2 + ||f_2||^2) < \infty;$$

又因任何函数若绝对值可积则其本身也是可积的，同时，(f_1, f_2) 存在。

由方程（1.3）所定义的 (f_1, f_2) 是一个内积的证明过程直到正定性问题都是很顺利的，显然，

$$(f, f) \equiv ||f||^2 = \int_a^b |f|^2 \mathrm{d}x \geqslant 0$$

但是，$(f, f) = 0$ 是否隐含对于在 $[a, b]$ 中所有的 x，$f(x) = 0$ 呢？不完全是，因为函数 $f(x)$ 可以在任何有限个点上不为零，而积分则完全不“注意”这些，也就是尽管被积函数在整个 $[a, b]$ 并不恒等于零，但对于积分没有贡献。

如果利用稍为更一般的积分概念时，像这种情形的讨论可以简化，利用黎曼（Riemann）积分会遇到一些困难，例如我们考虑一种极端情况：考查一种奇特的函数 $f(x)$ 定义在 $[0, 1]$，对每个有理数它为 1 而对每一个无理数为零，现因为有理数是“十分少的”，在事实上它仅是可数的，因此可以认为该函数的积分是零。然而，如果我们把 $[0, 1]$ 分割成很多小段 Δx_i 构成上、下黎曼积分，并按通常方式写出：

$$\bar{\int} f(x) \mathrm{d}x = \sum_i \Delta x_i \max[f(x)], x_i \leqslant x \leqslant x_i + \Delta x_i$$

$$\underline{\int} f(x)\mathrm{d}x = \sum_i \Delta x_i \min[f(x)], x_i \leqslant x \leqslant x_i + \Delta x_i$$

则不管子区间 Δx_i 分得如何小，f（x）在该区间上的最大值总是1而最小值总是零。

因此 $$\overline{\int} f(x)\mathrm{d}x = 1 \text{ 和} \underline{\int} f(x)\mathrm{d}x = 0$$

所以黎曼积分是不存在的。

在勒贝格（Lebesgue）积分理论中，这种积分是存在的且它等于零。我们称 f（x）除了在测度为零的点集以外均等于零，或者说 f（x）几乎处处等于零。这句话的直观内容很简单，如果在实轴上有可数个点并给出长为 ε 的纸条，则可以把纸条分为可数个长为 $\varepsilon/2^n$ 的小段并把它们贴在集合中每一个组元上。因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varepsilon/2^n=\varepsilon$，故在这过程中我们仅用掉给定的纸条，又因原始纸条可以任意小，因此 f（x）非零的那些点 x 的集合与 f（x）等于零的 x 的集合相比可以忽略，尽管每个实数可以与某个有理数无限接近。因此，在实数轴上有理数是测度为零的集合。

我们将不再深入讨论勒贝格积分的概念，因为在本书中实际要积分的所有的函数均是黎曼可积的。例如，对于定义在闭区间上逐段连续的函数，黎曼积分总是存在的，在任何情形中，只要黎曼积分存在，则它与勒贝格积分是相等的。

总之，若 f 是函数空间中一个函数且（f，f）$=0$，则 f（x）并不一定要在所有 x 上均等于零，但它只能在测度等于零的集合上取非零值。我们称（f，f）$=0$ 隐含几乎处处 f（x）$=0$，任何几乎处处等于零的函数称为零函数，利用这种广义零函数的概念，满足于内积公理。因此定义 1.1 确实定义了一个内积。

于是我们有了定义在函数空间上的复内积，而函数空间本身则是在闭区间$[a,b]$上的实变量的复平方可积函数的复向量空间。

为了对物理学有用，内积空间必须是完备的，一个完备空间，即在其中不存在空间组元的柯西（Cauchy）序列趋于空间之外的极限。一个初等的不完备空间的例子是有理数的集合。部分和序列 $S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n!}$ 是一个有理数的序列，但它收敛于无理数 e，然而，实分析的基本定理指出所有实数的集合是完备的，我们不可能通过取实柯西序列极限的方法而走出集外。

类似地，我们要找到具有这种性质的一类函数，即不存在极限不属于这类的该类函数的柯西序列。这样一类函数是完备的。

Riesz-Fisher 定理解决了这种在分析中非常基本的问题，它指出平方可积函数（模是有限的函数）空间是完备的，定理可以叙述如下：

雷尔兹-费雪（Riesz-Fisher）定理设函数 $f_1(x)$，$f_2(x)$，……是函数空间中的组元。若

$$\lim_{n,m\to\infty}||f_n-f_m||^2\equiv\lim_{n,m\to\infty}\int_a^b|f_n(x)-f_m(x)|^2\mathrm{d}x=0,$$

则存在一平方（勒贝格）可积函数 f（x），而序列 f_n（x）“平均”收敛于它；即存在一个 f 便得

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b|f(x)-f_n(x)|^2\mathrm{d}x=0$$

在下一节中，我们将更详细地讨论平均收敛性，应该着重指出，除非积分是采用勒贝格积分，否则定理是不成立的。

因此我们已定义的函数空间事实上是完备的。今后我们将用通用的名称希耳伯特空间来称呼这个完备的内积空间，虽然函数空间并不是只有希耳伯特空间这一种。

函数的正交性，归一性和正交归一集合的概念可以完全像对向量一样来定义，因此，若

$$(f_i,f_j)\equiv\int_a^b f_i^*(x)f_j(x)\mathrm{d}x=\delta_{ij},$$

则函数集合 $\{f_i\}$ 称为正交归一的。

例 傅里叶函数，令 $f_n(x)=e^{inx}/\sqrt{2\pi}$，其中 $n=0,\pm1,\pm2,$ ……集合 $\{f_n\}$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上是正交归一的。

证：

$$(f_n,f_m)=\int_{\pi}^{+\pi}f_n^*f_m\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(m-n)x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi(m-1)i}e^{i(m-n)x}\Big|_{-\pi}^{+\pi}=0,\text{当 } m\neq n$$

$$(f_n,f_n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x=1,\text{当}(m=n).$$

所以 $(f_n,f_n)=\delta_{nm}$

一种常用的正交归一性的推广如下：

定义 1.2 对于一个在 $[a,b]$ 上非负的权变函数 $W(x)$，若

$$(f_n,f_m)=\int_{u}^{b}f_n^*(x)f_m(x)W(x)\mathrm{d}x=\delta_{nm},$$

则函数集 $\{f_n\}$ 是对于权变函数 $W(x)$ 正交归一的。

以后我们总是讨论正交归一函数集，因为像在有限维向量空间中一样，它们使计算大为简化。

§1.2 完备的正交归一函数集合

在有限维向量空间理论中，我们得到基向量完备集的一系列互相等价的特性描述。在希耳伯特空间中相应的问题是将函数表示成给定的函数的成性组合，换句话说即利用给定的函数的级数展开的问题。这种级数展开的典型是傅里叶级数。但是，我们论述的将是一般的情形，它包括很多数学物理函数，傅里叶级数仅作为一种特殊情形来讨论。

我们必须面临的第一个问题是确定在希耳伯特空间中一正交归一函数集合的完备性的问题。(函数集合的完备性与在上一节中曾扼要地提到的空间的完备性是不相同的，但是我们将看到它们

之间有内在的联系。）如果在希耳伯特空间中任一函数 $f(x)$ 可以表示成正交函数集 $\{f_i(x)\}$ 的线性组合，即

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}C_i f_i(x),$$

该级数在任一点 x 上收敛于 f，则称正交归一函数集 $\{f_i(x)\}$ 是完备的，它与在有限维空间中基向量集的完备性概念是十分相似的。但是这种收敛性的准则是非常严格和狭窄的，在很多情形下是不必要这样严的。我们将会看到，利用这种准则在希耳伯特空间中将不存在完备的正交归一函数集。所以要求代替这种严格的逐点收敛性。我们将减弱收敛性准则，并用这种方法便得完备函数集存在。

处理内积正定性所遇到的困难启发我们适当地减弱收敛性准则，在那里我们发现 $(f,f)=\int_a^b|f|^2\mathrm{d}x=0$ 隐含 $f(x)$ 并不是在 $[a,b]$ 中每一点 x 上为 0，而仅是在 $[a,b]$ 上几乎处处为 0，即除了在一个测度为零的点集以外均为 0。类似地，若

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\left|f(x)-\sum_{i}^{n}C_i f_i(x)\right|^2\mathrm{d}x=0,$$

则称 $\sum_{i}^{n}C_i f_i(x)$ “平均”收敛于 $f(x)$，它允许级数与 $f(x)$ 在测度为零的集上有差别。

为了进一步发展正交归一函数集的完备性的概念，我们需要定义不同类型的收敛性，我们将要利用的有：

1. 逐点收敛性。
2. 一致收敛性。
3. 平均收敛性。

定义 1.3 一函数序列 $h_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上逐点收敛于 $h(x)$ 的定义是：对于在 $[a,b]$ 中的任一 x 和任一 $\varepsilon>0$，存在一个整数 $N(x,\varepsilon)$，使得当 $n>N$，

$$|h(x) - h_n(x)| < \varepsilon$$

$h_n(x)$ 本身可以是另一序列的部分和，即

$$h_n(x) = \sum_{i=1}^{n} R_i(x)$$

逐点收敛的定义以及下列的另一些收敛类型可以等价地用无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} R_i(x)$ 来叙述，后者是部分和序列 $h_n(x)$ 的极限。若对于在 $[a, b]$ 上任一 x 以及任一 $\varepsilon>0$，存在一整数 $N(x, \varepsilon)$，使当 $n>N$ 时，满足

$$|h(x) - h_n(x)| = |h(x) - \sum_{i=1}^{n} R_i(x)| < \varepsilon,$$

则我们称该级数逐点收敛于 $h(x)$.

若在上述定义中对于在 $[a, b]$ 中所有的 x，仅存在一个 N，则收敛称为是一致的。形式上，我们有：

定义 1.4 一函数序列 $h_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $h(x)$ 的定义是：对于任何 $\varepsilon>0$，存在一个与 x 无关的整数 $N(\varepsilon)$，使当 $n>N$ 时，对于在 $[a, b]$ 中所有的 x 满足

$$|h(x) - h_n(x)| < \varepsilon,$$

显然一致收敛暗含着逐点收敛。

注意在该定义中明确地提到了函数序列 $h_n(x)$ 的极限 $h(x)$，对于一致收敛的柯西准则给我们提供了另一种有用的定义，其中没有假设极限函数的知识，在分析教程中对柯西准则进行了证明，在这里我们只叙述它。

定理 1.1 若对于任意 $\varepsilon>0$，存在一个整数 $N(\varepsilon)$，使当所有 $r>N$ 时，$s>N$ 以及在 $[a, b]$ 中的 x，满足 $|h_r(x) - h_s(x)| < \varepsilon$，则函数序列 $h_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛。

利用部分和 $h_n(x) \equiv \sum_{i=1}^{r} k_i(x)$，它变成：

$$|h(x)-h_s(x)|=|\sum_{i=1}^{r}k_i-\sum_{i=1}^{s}k_i|=|\sum_{i=r+1}^{s}k_i(x),|<\varepsilon.$$

若存在一致收敛或逐点收敛，我们可以写出

$$h(x)=\lim_{n\to\infty}h_n(x)=\sum_{i=1}^{\infty}k_i(x).$$

我们前面讨论过的较弱的收敛性现在可用公式精确地表述。

定义 1.5 一个函数序列 $h_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上平均收敛于 $h\ (x)$ 的定义是：

若
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b|h(x)-h_n(x)|^2\mathrm{d}x=0$$

即若对于任给 ε，存在一个 $N\ (\varepsilon)$，使当 $n<N$ 时，

$$\int_a^b|h(x)-h_n(x)|^2\mathrm{d}x<\varepsilon,$$

若
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b|h(x)-\sum_{i=1}^{n}k_i(x)|^2\mathrm{d}x=0,$$

则级数 $\sum_{i=1}^{\infty}k_i\ (x)$ 平均收敛于 $h\ (x)$.

容易了解，一致收敛隐含平均收敛，因为若收敛是一致的，则对任何 ε 存在一个 N 使得当 $n>N$ 时，对于在 $[a,\ b]$ 中所有的 x 满足 $|h-h_n|<\varepsilon$，因此，

$$\int_a^b|h-h_n|^2\mathrm{d}x<\int_a^b|\varepsilon^2\mathrm{d}x=\varepsilon^2(b-a),$$

所以选择 ε 可以使积分任意小，它正好是

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b|h-h_n|^2\mathrm{d}x=0,$$

所以得到平均收敛，但是应注意，逐点收敛并不隐含平均收敛。

利用平均收敛可以定义正交函数集的完备性。

定义 1.6 设 $g\ (x)$ 为希耳伯特空间中任何函数（即任何平方可积函数）并设 $\{f_i(x)\}$ 为希耳伯特空间中一正交归一函数集，

若存在常数系数 $\{a_i\}$ 使得部分和序列 $g_n(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x)$ 平均收敛于 $g(x)$，则函数集 $\{f_i\}$ 是一个完备的正交归一集合。等价地，若均方误差可以任意小，即

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |g - g_n|^2 \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b |g - \sum_{i=1}^{n} a_i f_i|^2 \mathrm{d}x = 0,$$

则集合 $\{f_i\}$ 是一个完备的正交归一函数集。应注意系数 $\{a_i\}$ 与 n 无关。因此当 n 增加而在 g 的近似部分和中取更多项时，前面的系数是不改变的。当我们把求和扩展到无限时，我们可以说无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$ 平均逼近于任意函数 g。我们将把它写为

$$g(x) \doteq \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(x).$$

在等号上加一个点以示平均收敛与逐点收敛的区别。

因为平均收敛不必隐含逐点成一致收敛，所以由关系

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f - \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i|^2 \mathrm{d}x = 0,$$

即用符号表示：$f(x) \doteq \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(x)$.

所描述的正交归一函数集 $\{f_i\}$ 的完备性并不隐含

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(x) \tag{1.4}$$

只有当级数逐点收敛或一致收敛时，我们才能对 $f(x)$ 和展开级数使用等号。

设 $f(x)$ 为希耳伯特空间中的任意一个函数，并暂时设存在一个正交归一函数集 $\{f_i(x)\}$，使得级数 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(x)$ 一致收敛于 $f(x)$，

即
$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i f_i(x).$$