

MATHEMATICAL ECONOMICS

数理经济学

·下册·

[英] R. G. D. 艾伦 著

商务印书馆

数 理 经 济 学

下 册

〔英〕 R. G. D. 艾伦 著

吴易风 刘天芬 译

商 务 印 书 馆

1990年·北京

R. G. D. Allen
MATHEMATICAL ECONOMICS

Macmillan & Co LTD

London 1959

根据伦敦麦克米伦公司 1959 年第 2 版译出

SHÙLǐ JĭNGJÌXUÉ

数 理 经 济 学

下 册

[英] R. G. D. 艾伦 著

吴易风 刘天芬 译

商务印书馆出版

(北京王府井大街 36 号)

新华书店总店北京发行所发行

三河县二百户印刷厂印刷

ISBN 7-100-00662-7/F·65

1990 年 3 月第 1 版

开本 850×1168 1/32

1990 年 3 月北京第 1 次印刷

字数 355 千

印数 2.1 万册

印张 18

定价: 6.70 元

目 录

第十章 一般经济均衡	1
10.1 交换的均衡	1
10.2 具有固定生产系数的均衡	5
10.3 一般市场均衡	9
10.4 计数方程	13
10.5 市场均衡的稳定性	16
10.6 比较静态的若干问题	22
10.7 生产函数	26
10.8 作为矩阵的生产函数	33
第十一章 部门间关系	41
11.1 部门的投入-产出分析	41
11.2 交易矩阵	43
11.3 里昂惕夫的开放体系	48
11.4 以货币值表示的交易矩阵	52
11.5 投入系数矩阵	54
11.6 三个部门的解	56
11.7 瓦尔拉斯-里昂惕夫封闭体系	61
11.8 里昂惕夫的动态体系	65
11.9 两个部门的动态解	70
第十二章 数学分析: 矢量和矩阵	78
12.1 引论	78
12.2 线性方程和线性变换	81
12.3 矢量	85
12.4 矢量代数	88

12.5	矢量的线性组合; 凸集	93
12.6	矩阵	101
12.7	矢量和矩阵	108
12.8	Σ 符号; 内积	110
12.9	行列式	116
第十三章	数学分析: 矩阵代数	123
13.1	引论; 代数的基本规则	123
13.2	矩阵运算的说明	129
13.3	等式、不等式、加法和与纯量相乘	134
13.4	矩阵的乘法	138
13.5	矩阵的转置	150
13.6	矢量和矩阵的乘法	152
13.7	方阵的逆; 行列式的值	158
13.8	矩阵的等价和秩	167
13.9	方阵	174
第十四章	矢量和矩阵代数的应用	184
14.1	线性组合和线性相关	184
14.2	线性方程组和它们的解	192
14.3	线性变换	202
14.4	方阵的特征方程	212
14.5	二次型	218
14.6	市场均衡的稳定性	229
14.7	里昂惕夫的静态体系	233
14.8	交易矩阵	237
14.9	里昂惕夫的动态体系	241
第十五章	对策论初步	248
15.1	对策论的经济应用	248
15.2	两人零和对策及其支付矩阵	250
15.3	对策期望; 纯粹策略与固定策略	256

15.4	极小化极大、鞍点和对策的解	260
15.5	2×2 阶的支付矩阵的解	267
15.6	$2 \times n$ 支付矩阵的图解	274
15.7	两人零和对策的一般情况	280
15.8	特殊对策的解	290
15.9	例证	300
第十六章 线性规划		309
16.1	线性规划的一个简单例子	309
16.2	简单例子: 对偶问题	315
16.3	简化为对策的解	318
16.4	一般线性规划和它的对偶	323
16.5	一般线性规划和两人零和对策的等价	325
16.6	为计算而安排的线性规划	329
16.7	凸集的一些性质	334
16.8	解的单纯形法	339
16.9	用单纯形法解简单的线性规划	343
第十七章 活动规划与资源配置		351
17.1	引论: 一般经济均衡	351
17.2	活动分析: 概念和定义	355
17.3	作为活动的线性规划的里昂惕夫开放体系	359
17.4	里昂惕夫开放体系的替代	362
17.5	技术可能性的表示	367
17.6	有效配置: 原始要素不受限制	378
17.7	价格和对偶问题	385
17.8	有效配置: 原始要素受到限制	390
17.9	时间过程的规划: 冯·纽曼增长模型	397
第十八章 厂商理论		408
18.1	边际分析: 生产要素的替代	408
18.2	联合生产	414

18.3	厂商的边际分析与线性规划	421
18.4	厂商的技术	425
18.5	两个作为例证的线性规划	430
18.6	线性规划: 固定要素和既定产品价格	441
18.7	李嘉图效应	449
18.8	线性规划: 固定需求比例	455
18.9	专业化的例子	463
第十九章 价值理论		470
19.1	效用: 序数观点	470
19.2	消费者的需求	475
19.3	收入和替代效应	478
19.4	图示	484
19.5	效用的可衡量性	489
19.6	消费活动和线性规划	499
19.7	技术-爱好的线性规划	504
19.8	几个例证	510
第二十章 加总问题		522
20.1	问题	522
20.2	简单的例子: 对单个消费者加总	525
20.3	简单的例子: 对商品加总	531
20.4	微观关系与宏观关系之间的矛盾	535
20.5	简单例子的扩大	542
20.6	对单个消费者和对商品求和	546
20.7	一般情况: 一种宏观关系	550
20.8	福利经济学	555
人名译名对照表		563

第十章 一般经济均衡

10.1 交换的均衡

生产和交换的一般均衡在本章中是在“纯粹竞争”的静态条件下展开论述的,“纯粹竞争”的意思是,没有一个个体(消费者或厂商)处于直接影响价格的地位。对于消费者和厂商来说,价格是已知的参数,只取决于市场条件。纯粹竞争并不意味着可以“自由进入”任何生产者集团。这是一个单独的概念,“自由进入”的条件也许加在、也许不加在纯粹竞争的模型之中。

这里的分析是以现代作者如希克斯(1939年,1946年)和萨缪尔森(1947年)所发展的瓦尔拉斯和帕累托的成果为依据的。这是最广泛的和无所不包的一种分析,它研究经济社会中为数众多的个体消费者和生产者,它对所处理的变量的数目不加任何限制。危险之处在于,这种分析变得过于一般化,以致会完全没有结果。所有变量都一起由已知条件决定,在这个意义上,一般均衡是封闭式的。为了确定这个体系同均衡的一致性,可以把方程的数目同未知数作一对比。但是,关于均衡,甚至是关于存在一个均衡,还是存在一个以上的均衡,知道的可能很少。没有任何意思暗示在动态的意义上均衡是稳定的。

需要引出“具有许多市场的价格体系的作用的一般规律”(希

克斯(1946年)著作,第6页),引出“对于实际材料作了概括的……有意义的定理,这些实际材料但愿在理想的条件下被驳倒”(萨缪尔森(1947年)著作,第4页)。假如这一体系中的某些情况发生变化,那么变量会向什么方向变动?为了回答这类问题,一般需要考察开放体系——完全封闭体系的一个部分,在封闭体系中某些变量可以指定任意值的参数。开放体系只能导致局部分析,但是它的灵活性足以有助于获得“有意义的定理”。

交换均衡分析是瓦尔拉斯在一种形式上留下来的,对这种形式只需补充少数注释。在处理大量变量时符号问题是相当重要的,小写字母例如 x 用于单个消费者和生产者的购买量和销售量,大写字母例如 X 用于市场总量。加下标以表示商品之间 ($r=1, 2, \dots, m$) 或单个消费者或生产者之间 ($i=1, 2, \dots, n$ 或 $j=1, 2, \dots, N$) 的区别。有 m 种商品(下标 r), n 个单个消费者(下标 i) 和 N 个厂商(下标 j)。这样, X_r 可以表示第 r 种商品的市场总量, x_{ri} 表示第 i 个消费者对第 r 种商品的购买量。

在一般交换经济中,假设 $\bar{x}_{ri}$ 是由第 i 个人最初持有第 r 种商品的已知量, x_{ri} 是在交换之后的相应量,然而未知数。第 r 种商品的交换所按照的价格用 p_r 表示。有待确定的只是价格比例。为了方便起见,设以第 m 种商品作为等价物(numéraire),并令 $p_m=1$ 。变量的总数是:

$$m(n+1)-1$$

即: $r=1, 2, \dots, m$ 以及 $i=1, 2, \dots, n$, 有 $m \cdot n$ 个变量 x_{ri} , $r=1, 2, \dots, (m-1)$, 有 $(m-1)$ 个价格 p_r 。

存在着两组均衡条件:一组同各个人的购买量和销售量有关,

另一组同市场各要素有关。

(i) 每个人在市场价格已知时在自己的预算平衡的条件下, 确定自己的购买量或销售量, 以便使自己的“效用”极大化。每个人的序数效用函数假定为:

$$u_i = u_i(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{mi}) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

带有连续偏导数:

$$u_{ri} = \frac{\partial u_i}{\partial x_{ri}} \quad \begin{matrix} (r = 1, 2, \dots, m) \\ (i = 1, 2, \dots, n) \end{matrix}$$

对于各种不同的 r , u_{ri} 的比率同 u_i 的序数性质无关。 u_i 极大值, 同时又满足预算平衡方程:

$$\sum_r p_r (x_{ri} - \bar{x}_{ri}) = 0$$

条件是“边际效用” u_{ri} 的比率(或边际替代率)等于已知价格比率 p_r 。因为 $p_m = 1$, 所以, 对 r 从 1 到 $(m-1)$ 的每一个值以及对于 i 从 1 到 n 的每一个值的条件是

$$\frac{u_{ri}}{p_r} = u_{mi}$$

(ii) 市场条件是, 价格必须同每种商品的总需求量和总供给量(总购买量和总销售量)的均等相一致。这就是说, 对于每一个 r , $\sum_i (x_{ri} - \bar{x}_{ri}) = 0$ 。但是, 这些关系式中的一个关系式可以从其他关系式中推导出来。假定

$$\sum_i (x_{ri} - \bar{x}_{ri}) = 0 \quad r = 1, 2, \dots, (m-1)。$$

然后, 求出所有个人的预算均衡条件的总和:

$$0 = \sum_i \sum_r p_r (x_{ri} - \bar{x}_{ri}) = \sum_r p_r \left\{ \sum_i (x_{ri} - \bar{x}_{ri}) \right\} = p_m \sum_i (x_{mi} - \bar{x}_{mi})$$

即

$$\sum_i (x_{ri} - \bar{x}_{ri}) = 0$$

对于 $r=m$ 也是如此。

对于 $r=m$, 最后的市场条件可以因此而消除。

这时均衡的条件是:

$$(i) \quad (a) \quad \frac{u_{ri}}{p_r} = u_{mi} \quad \begin{cases} r=1, 2, \dots, (m-1) \\ i=1, 2, \dots, n \end{cases}$$

$$(b) \quad \sum_r p_r (x_{ri} - \bar{x}_{ri}) = 0 \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$(ii) \quad \sum_i (x_{ri} - \bar{x}_{ri}) = 0 \quad r=1, 2, \dots, (m-1)$$

方程的数目在 (i) (a) 中是 $(m-1)n$, 在 (i) (b) 中是 n , 在 (ii) 中是 $(m-1)$, 总共是 $m(n+1)-1$, 等于变量的数目。体系是封闭的, 同交换的均衡相一致。

完全体系可以分为几个开放部分, 并按照各个阶段达到均衡。关于个人需求, 对第 i 个人来说, 在 (i) (a) 中有 $(m-1)$ 个方程, 在 (i) (b) 中有 1 个方程。 $r=1, 2, \dots, m$, 以及在 i 为已知时, 这些 m 个方程足以确定用价格表示的变量 x_{ri} 。这时市场均衡同总需求和总供给方程有关, 即同方程 (ii) 有关。假定:

$$X_r = \sum_i x_{ri}, \quad \bar{X}_r = \sum_i \bar{x}_{ri}$$

因此, X_r 是第 r 种商品 ($r=1, 2, \dots, m$) 的总需求, $\bar{X}_r$ 是总供给。 $\bar{X}_r$ 是已知资料, X_r 决定于个人需求, 用价格 p_r 表示。因此, 条件 (ii) 不过是:

$$X_r = \bar{X}_r, \quad r=1, 2, \dots, (m-1)$$

或者用 $(m-1)$ 个价格 p_r 表示的 $(m-1)$ 个方程, 而 $p_m=1$ 。在市场上, 个人需求 (同已知的初始供给有关) 加总在一起决定同均

衡相一致的市场价格。

市场条件(ii)意味着“价格必须使需求和供给相等”。这并不排除负价格的可能性。能不能把条件增强为“必须有使需求和供给相等的非负价格”?这并非如此。事实上,正象苏森(1942年,1955年)所着重指出的那样,条件需要重新改变为:或者是需求等于供给(没有闲置资源),或者是该商品价格等于零。这是一种极容易用后面第16章和第17章的技术处理的公式。

习题 10.1

1. 考察两个人($i=1, 2$)和两种商品 X 和 Y 的情况,假定二次效用函数是:

$$u_1 = a_1 x_1^2 + 2h_1 x_1 y_1 + b_1 y_1^2; u_2 = a_2 x_2^2 + 2h_2 x_2 y_2 + b_2 y_2^2$$

写出交换均衡的条件,明确地用两种商品的价格比率 p 求出个人需求(x_1, y_1, x_2 和 y_2)。

2. 在上题的情况下,证明,市场条件可以简化为 p 的单一方程,这是一个三次方程。写出 p 的三个根的乘积式,说明在 u_1 和 u_2 的可能有的条件下乘积是正值。从而证明,在这些条件下,至少有一个 p 的正值同均衡相一致。

3. 证明,在求上题 p 的三次方程时, $(a_1 - 2h_1 p + b_1 p^2)$ 和 $(a_2 - 2h_2 p + b_2 p^2)$ 必须不等于零。证明,如果对 x_1 和 y_1 (两者都不等于零)的所有值来说, u_1 都是正值,那么情况就是如此。对于 u_2 , 情况也类似。为什么有把握作出这一假设?

10.2 具有固定生产系数的均衡

现在仍然假定有 n 个人($i=1, 2, \dots, n$)占有 m 种商品($r=1, 2, \dots, m$)的初始数量 $\bar{x}_{ri}$, 在已知价格比率 p_r ($p_m=1$ 作为等价物)时需要该商品的最终数量 x_{ri} 。个人需求的条件是上述 10.1 的方

程(i)(a)和(i)(b)。

现在假定,除了商品交换之外,又出现了从生产或初始资源变换 $\bar{x}_{ri}$ 进入市场的新供给量。为了简单起见,作为中间产品以及作为消费品和生产要素的商品都不加考虑。一批 n 种商品可以分成互不重合的两组商品: k 种生产要素($s=1, 2, \dots, k$)和 $(m-k)$ 种消费品($t=k+1, k+2, \dots, m$)。下标 r 用来表示整个一组 m 种商品,在考虑划分时,下标 s 指的是 k 种要素, t 指的是 $(m-k)$ 种消费品。

在市场总量中,假设

$$X_r = \sum_i x_{ri}, \quad \bar{X}_r = \sum_i \bar{x}_{ri}$$

分别为在已知价格的情况下第 r 种商品的需求量和供给量。因此, $\bar{X}_r$ 或者用来交换($r=t$),或者用来作为生产要素($r=s$); X_r 或者作为消费品的需求量(经交换或来自新的生产),或者作为要素劳务的“保留”需求。对于一些商品(下标 s), $X_s < \bar{X}_s$,差额是要素的供给。对于另一些商品(下标 t), $X_t \geq \bar{X}_t$,增加的需求量来自新的生产。因此:

$$\text{市场供给(要素)} = - (X_s - \bar{X}_s) \quad s=1, 2, \dots, k$$

$$\text{市场需求(商品)} = X_t - \bar{X}_t \quad t=k+1, k+2, \dots, m$$

供给和需求全部都是作为价格 p_r 的函数求出的。

假定新的生产是在固定技术系数(没有联合生产,规模收益不变)的条件下发生的。令 a_{st} 是生产第 t 种产品(消费品)的单位数量所使用的第 s 种要素的数量。这里的 a_{st} 在 $s=1, 2, \dots, k$ 以及 $t=k+1, k+2, \dots, m$ 时是已知常数。假定 Y_r 是新的生产的第 r

种商品的产量,因而对于要素($s=1, 2, \dots, k$)来说, $Y_s < 0$; 对于消费品($t=k+1, k+2, \dots, m$)来说, $Y_t \geq 0$ 。第一个技术条件是, 在技术系数已知的情况下, 要素的总使用量为

$$(-Y_s) = \sum_t a_{st} Y_t.$$

因此: $\sum_t a_{st} Y_t + Y_s = 0 \quad s=1, 2, \dots, k$

再假定, 厂商可以“自由加入”各生产部门, 以致在价格已知时对于新的生产来说收益和成本相等(零利润)。对于第 t 种消费品来说, 收益是 $p_t Y_t$, 成本是 $(\sum_s p_s a_{st}) Y_t$ 。因此, 第二个技术条件是,

$$\sum_s p_s a_{st} - p_t = 0 \quad t=k+1, k+2, \dots, m$$

为了完成这一体系, 仍然需要加上需求和供给方程的市场条件。对于要素来说, 供给是 $-(X_s - \bar{X}_s)$, 新的生产的需求是 $(-Y_s)$ 。对于消费品来说, 来自新的生产的个人需求是 $(Y_t - \bar{X}_t)$, 供给是 Y_t 。因此, 要素和消费品的市场条件相同, 都是:

$$Y_r = X_r - \bar{X}_r, \quad r=1, 2, \dots, m$$

与上述 10.1 的相同, 这些条件的某一条件(比如说在 $r=m$ 时)可以从其他条件导出(见本节习题第 1 题)。相关条件应当消去。这时完整的体系是:

$$(i) \quad (a) \quad \frac{u_{ri}}{p_r} = u_{mi} \quad \begin{cases} r=1, 2, \dots, (m-1) \\ i=1, 2, \dots, n \end{cases}$$

$$(b) \quad \sum_r p_r (x_{ri} - \bar{x}_{ri}) = 0 \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$(ii) \quad (a) \quad \sum_t a_{st} Y_t + Y_s = 0 \quad s=1, 2, \dots, k$$

$$(b) \quad \sum_s p_s a_{st} - p_t = 0 \quad t=k+1, k+2, \dots, m$$

$$(iii) \quad Y_r = \sum_i (x_{ri} - \bar{x}_{ri}) \quad r=1, 2, \dots, (m-1)$$

变量是 x_{ri} , Y_r 以及 p_r ; 它们的数目是

$$mn + m + (m-1) = m(n+2) - 1$$

方程的数目相同, 在 (i) (a) 中等于 $(m-1)n$, 在 (i) (b) 中等于 n , 在 (ii) (a) 中等于 k , 在 (ii) (b) 中等于 $(m-k)$, 在 (iii) 中等于 $(m-1)$ 。这是一个封闭体系, 同均衡相一致。

以下是表明逐步导致均衡的一种方式。条件 (i) (a) 和 (i) (b), 可以用来求以价格表示的个人需求 x_{ri} 。同生产技术有关的条件 (ii) (a), 可以用来求以产量 Y_t 表示的要素需求 $(-Y_s)$ 。表示“自由加入”意指“竞争”这一事实的条件 (ii) (b), 可以用来求用要素价格 p_s 表示的消费品价格 P_t 。消费品的市场条件, 即在 $t=k+1, k+2, \dots, (m-1)$ 时的方程 (iii), 可以用来求产量 Y_t , 先用所有价格表示, 然后只用要素价格 p_s 表示 (因为 p_t 现在可以用 p_s 消去)。现在留下的全部只是一组要素市场条件或 $s=1, 2, \dots, k$ 时的方程 (iii)。按照上述关系, 这些条件只是 k 个要素价格 p_s 的 k 个方程。在要素市场上, 这一问题的所有其他关系都一起共同决定同均衡相一致的市场价格。

习题 10.2

1. 写出 $\sum_r p_r \{ \sum_i (x_{ri} - \bar{x}_{ri}) - Y_r \}$, 按照 $r=1, 2, \dots, m$ 求和。证明, 条件 (i) (b), (ii) (a) 以及 (ii) (b) 将使此式等于零。推论, 如果在 $r=1, 2, \dots, (m-1)$ 时条件 (iii) 成立, 那么在 $r=m$ 时这些条件也能成立。

2. 对于某些消费品, 假设 $X_t = \bar{X}_t$, 因而需求完全由交换得到满足。方程 (i) — (iii) 受到什么影响? 它们同均衡还一致不一致?

3. 把另一种商品(下标 u)加到这一体系上, 这种商品是生产中的中间产品(即最初个人没有占有并且没有提出需求的产品)。它是由要素 s 按固定系数 a_{su} 生产的, 而且它本身按固定系数 a_{ut} 被用于商品 t 的生产。证明, (ii)(b) 还要增加一个方程 $\sum_s p_s a_{su} - p_u = 0$, (ii)(a) 还要增加一个方程

$$\sum_t a_{ut} Y_t + Y_u = 0.$$

指出这些只确定这种额外商品的价格和生产量(和使用量)。

10.3 一般市场均衡

上节的均衡分析是生产和交换的均衡分析, 然而限于生产中固定规模收益的情况。这一条件现在可以放宽, 问题可以推广到容许个别厂商以各不相同的技术可能性进行生产。

假定有 n 个人, 具有 m 种商品的初始资源 $\bar{x}_{ri}$ 和需求 x_{ri} ($r=1, 2, \dots, m$ 以及 $i=1, 2, \dots, n$)。均衡条件仍写成上节(i)(a)的形式。现在进一步假定, 这些个人包括某些在控制生产性厂商中充当企业家的人。预算平衡, 以前写成支出 $\sum_r p_r x_{ri}$ 等于来自初始资源 s 的收入 $\sum_r p_r \bar{x}_{ri}$, 现在则需要加以改变。如果“自由加入”被认为对所有厂商和企业家都意味着零净利润, 那么上节的条件(i)(b)仍然成立。但是这里举出一种更为一般的情况, 在此情况下, 假定第 i 个人有一笔企业主收入, 这笔收入是全部生产所赚取的总利润 R 的一个固定的和已知的比例份额 π_i 。他的收入按 $\pi_i R$ 增加, 就个人来说是固定的, 但是涉及到一个尚待确定的参数 R 。代替条件(i)(b)的个人预算平衡是:

$$\sum_r p_r (x_{ri} - \bar{x}_{ri}) = \pi_i R \quad (\text{式中: } \sum_i \pi_i = 1) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

注意, 如果 $\pi_i = 0$ 为已知, 那么第 i 个人就不是企业主。

假定,生产是通过 N 个厂商进行的,用下标 j 代表,每一家厂商都在已知的技术条件下进行生产,这种技术条件用生产函数表示:

$$f_j(y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{mj}) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, N)$$

式中 y_{rj} 是(如果是正值)所生产的第 r 种商品量,或者是(如果是负值)所使用的要素量。也可能有一些商品,或者是要素,或者是产品,对这些商品来说, $y_{rj}=0$, 第 j 个特殊厂商正巧既不使用它们,也不生产它们。假定 f_j 有连续偏导数:

$$f_{rj} = \frac{\partial f_j}{\partial y_{rj}} \quad \begin{cases} r=1, 2, \dots, m \\ j=1, 2, \dots, N \end{cases}$$

f_{rj} 的比率表示生产的边际替代率。

每一家厂商组织生产都是为了使净利润 $R_j = \sum_r p_r y_{rj}$ 极大化,限制条件是它的生产函数和已知的市场价格。在 R_j 中有一些项是正值(收益, $y_{rj} > 0$), 另一些项是负值(成本, $y_{rj} < 0$)。满足于 $f_j=0$ 的 R_j = 极大值的条件是:

$$\frac{f_{rj}}{p_r} = f_{mj} \quad \begin{cases} r=1, 2, \dots, (m-1) \\ j=1, 2, \dots, N \end{cases}$$

比率 $f_{1j}:f_{2j}:f_{3j}:\dots:f_{mj}$ (j 为已知)表示在第 j 个厂商所具有的生产可能性下要素和(或)产品之间的边际替代率。

与上述 10.2 一样,市场条件是所有要素和消费品的需求都等于供给。设 $Y_r = \sum_j y_{rj}$ 。如果 Y_r 是正值,那么它就是所生产的商品的净产量;如果 Y_r 是负值,那么它的绝对值就是要素的净使用量,在所有情况下,市场条件都是 $Y_r = X_r - \bar{X}_r$, 式中 $X_r = \sum_i x_{ri}$, $\bar{X}_r = \sum_i \bar{x}_{ri}$ 。所以: