等学校
学用书

泛函分析

周美珂 编著

北京师范大学出版社

高等学校教学用书

泛 函 分 析

周美珂 编著

北 京 师 范 大 学 出 版 社

（京）新登字160号

高等学校教学用书
泛　函　分　析
周美珂　编著
※
北京师范大学出版社出版
新华书店总店科技发行所发行
天津宝坻第十印刷厂印刷

开本：850×1168　1/32　印张：9.125　字数：223千
1992年3月第1版　　1992年3月第1次印刷
印数：1—1 500

ISBN7-303-01295-8/O·152
定价：3.05元

内 容 简 介

本书是根据作者多年讲授泛函分析课的经验并针对泛函分析课教学的普遍状况而编写的。主要内容包括：线性拓扑空间的基本知识；线性算子理论的几个基本定理；Hilbert 空间中的正交投影定理和 Riesz 表现定理，以及在许多现代学科中有重要应用的负范数空间；Hahn-Banach定理、凸集分离定理、$L^p(\Omega)$ 和 $C(S)$ 上连续线性泛函的一般形式，以及弱拓扑、弱*拓扑的基本概念；自反Banach 空间的局部弱紧性；含紧算子的第二类泛函方程的Fredholm三定理和正规可解算子；C_0半群理论及其在微分方程中的简单应用。

本书是泛函分析的基础教材，可供高等院校数学系各专业研究生使用，也可供有关研究人员参考。

前　言

从1982年开始，编者一直在北京师范大学数学系讲授泛函分析课，对象是微分方程、函数论、概率论、数理统计、代数、应用数学和力学等各方向的硕士研究生。从对数学系研究生培养的一般要求、后续课和科学研究工作的需要看，他们在泛函分析方面的知识和训练，应当从数学系本科教材所体现的水平的基础上再大大提高一步。但是，实际上他们当中多数人只读过通常数学系本科泛函分析课本中的很少的一部分内容，有的人甚至一点也没读过。这种情况已经持续多年，看来不是暂时的。因此，尽管已有不少优秀的泛函分析教材和专著，我们仍然感到有必要写一本具有这种针对性的教材。

本书共分七章：第一章是线性拓扑空间的基本知识；第二章是线性算子理论的几个基本定理；第三章介绍Hilbert空间中的正交投影定理和Riesz表现定理，以及在微分方程、现代控制理论等学科中有重要应用的负范数空间；第四章包括Hahn-Banach定理、凸集分离定理、$L^p(\Omega)$和$C(S)$上连续线性泛函的一般形式，以及弱拓扑、弱*拓扑的基本概念；第五章讨论了Banach空间中弱拓扑的基本问题，证明了自反Banach空间的局部弱紧性；第六章介绍含紧算子的第二类泛函方程的Fredholm三定理和正规可解算子；第七章是C_0半群理论及其在微分方程中的简单应用。显然，许多重要内容（如广义函数，Banach代数和算子的谱分解理论等）都没有编入本书，对此我们也感到遗憾。但是，作为供60—70学时用的一个教材，也只好如此。

引入概念时，力求把它和读者熟悉的知识联系起来；

注意突出中心问题和基本定理；重要结果的证明，尽量写得
"探索性"，使之更适合读者认识的自然发展过程。泛函分析
多学科中有重要应用，这些应用推动了泛函分析的发展，并且成为泛函分析的组成部分。在我们这样一本篇幅很小的书中，不可能去讨论这些内容。我们只是通过一些简单的例子使读者对应用泛函分析解决具体问题时应当注意的那些重要环节有所领会。本书基本上是自给自足的，除要求读者知道Lebesque积分的基本结果外，没有其他特别的要求，所需的预备知识，都在适当的地方给出了足够详细的叙述。

书末的参考书目不是全面的，只是告诉读者，我们在编写过程中主要参考过这些书。

编者在教学和编写本书的过程中，得到了严士健、孙永生两位老师的热情关怀和支持；本书的油印稿朱汝金老师在教学中曾经用过，天津师范大学数学系李凤友老师曾经看过，他们都提出了宝贵意见。在此，我向以上各位老师表示衷心感谢。由于编者水平有限、经验不足，本书难免有不少缺点，希望读者予以指正。

周美珂

1991年2月23日于北京师大

目　录

第一章　线性拓扑空间……………………………………………（1）

§1　对某些预备知识的回顾……………………………………（1）

§2　线性拓扑空间的定义及基本性质…………………………（7）

§3　原点邻域基定理……………………………………………（10）

§4　完备性与完备化……………………………………………（13）

§5　有界集和紧集………………………………………………（18）

§6　线性赋拟范空间……………………………………………（24）

§7　局部凸空间…………………………………………………（34）

§8　归纳限………………………………………………………（39）

习题一…………………………………………………………（45）

第二章　线性算子的基本定理……………………………………（49）

§1　线性算子的连续性和有界性的关系………………………（49）

§2　一致连续性定理……………………………………………（52）

§3　闭图象定理，逆算子定理和开映射定理…………………（58）

§4　应用举例……………………………………………………（63）

习题二…………………………………………………………（67）

第三章　Hilbert空间中的正交投影………………………………（70）

§1　内积空间与Hilbert空间……………………………………（70）

§2　正交投影与投影算子………………………………………（73）

§3　正交基………………………………………………………（77）

§4　F. Riesz表现定理……………………………………………（81）

§5　负范数空间…………………………………………………（88）

习题三…………………………………………………………（95）

章　Hahn-Banach延拓定理………………………………………（98）

§ 1　Hahn-Banach延拓定理 …………………… (98)
§ 2　凸集分离定理 ……………………………… (103)
§ 3　某些Banach空间上连续线性泛函的一般形式
…………………………………………………… (110)
§ 4　对偶空间，弱收敛和弱*收敛 ……………… (130)
习题四 ………………………………………… (140)
第五章　Banach 空间的弱拓扑 ……………………… (142)
§ 1　Alaoglu定理 ………………………………… (142)
§ 2　Eberlein-Шмульян定理 …………………… (148)
§ 3　自反Banach空间的局部弱紧性 …………… (154)
§ 4　应用举例 …………………………………… (160)
习题五 ………………………………………… (164)
第六章　紧算子和正规可解算子 ………………… (166)
§ 1　紧线性算子 ………………………………… (166)
§ 2　第二类泛函方程 …………………………… (172)
§ 3　Hilbert空间中的全连续自伴线性算子 …… (184)
§ 4　积分方程理论 ……………………………… (189)
§ 5　正规可解算子 ……………………………… (199)
习题六 ………………………………………… (209)
第七章　有界线性算子半群 ……………………… (212)
§ 1　C_0半群的定义及简单性质 ……………… (212)
§ 2　Hille-Yosida定理 ………………………… (219)
§ 3　解析半群 …………………………………… (229)
§ 4　向量值函数的积分和微分 ………………… (24
§ 5　抽象Cauchy 问题 ………………………… (26
§ 6　收缩半群与散逸算子 ……………………… (2
习题七 ………………………………………… (2
参考文献 ………………………………………… (2

第一章　线性拓扑空间

在数学中经常遇到"空间"一词．所谓空间，就是用公理确定了其元素和元素间关系的集合．这些公理通常涉及两方面内容：一是规定元素的运算规律的，一是规定元素的几何关系的．经常用到的大多数空间可以概括成叫做"线性拓扑空间"的一类空间，这类空间既是线性空间，又是拓扑空间，而且，运算方面的线性性与几何方面的拓扑关系是"协调"的．线性拓扑空间理论是本世纪四十年代以后发展起来的，现在它已经成为现代分析的重要组成部分．本章介绍线性拓扑空间的基本概念和基本性质、原点邻域基定理、完备化、有界集和紧集、线性赋拟范空间、局部凸空间和归纳限．

§1　对某些预备知识的回顾

在正式讨论线性拓扑空间理论之前，我们简要地回顾一下点集拓扑和距离空间的一些有关的概念和结论．

极限概念是分析数学的基础，它是借助于"邻域"或"开集"概念表述的．拓扑空间理论是从把邻域或开集的概念公理化入手的．有许多不同的方法给一个集合装备拓扑，最简单的可能是以公理形式指定它的全部开集．

定义 1　集合X叫做拓扑空间，如果指定了由它的一些子集组成的、满足下述开集公理的子集系τ：

O1）$\phi, X \in \tau$；

O2）如果$O_\alpha \in \tau (\alpha \in \mathscr{A})$，则$\bigcup_{\alpha \in \mathscr{A}} O_\alpha \in \tau$；

O3) 如果O_1，$O_2\in\tau$，则$O_1\cap O_2\in\tau$。

这时，称τ是X上的一个拓扑．为了强调空间X的拓扑是τ，常把它记做(X,τ)．如果$O\in\tau$，则称O是拓扑空间(X,τ)的一个开集．

如果对拓扑空间(X,τ)中任意两个不同的点x_1和x_2，总存在开集O_1和$O_2\in\tau$，使$x_1\in O_1$，$x_2\in O_2$，且$O_1\cap O_2=\phi$，则称τ是X上的一个Hausdorff拓扑，而(X,τ)叫Hausdorff拓扑空间．

容易证明

定理1 设M是拓扑空间(X,τ)的子集，则$\tau_M\triangleq\{O\cap M;O\in\tau\}$是$M$上的一个拓扑，称它为$\tau$在$M$上的诱导拓扑或$M$在$(X,\tau)$中的相对拓扑，$(M,\tau_M)$叫做$(X,\tau)$的拓扑子空间．

像在欧氏空间一样，利用开集概念可以陈述邻域、聚点和闭集的概念．

定义2 称$V\subset X$是拓扑空间(X,τ)中点x的一个邻域，如果存在$O\in\tau$使$x\in O\subset V$．如果V是子集$M\subset X$的每一点邻域，则称V是M的邻域．如果点x的每个邻域中都包含属于子集M且又不与x重合的点，则称x是集合M的聚点或极限点．包含自己的一切聚点的集合叫做闭集．

容易证明以下两个定理．

定理2 设F是拓扑空间(X,τ)的一个子集，则F是闭集的充分必要条件是：F的余集$F^c\triangleq X\backslash F\in\tau$．

定理3 设$\mathscr{F}$是拓扑空间(X,τ)的全部闭集构成的子集系，则

$F1$) ϕ、$X\in\mathscr{F}$；

$F2$) 如果$F_\alpha\in\mathscr{F}$ $(\alpha\in\mathscr{A})$，则$\bigcap_{\alpha\in\mathscr{A}}F_\alpha\in\mathscr{F}$；

$F3$) 如果$F_1,F_2\in\mathscr{F}$，则$F_1\cup F_2\in\mathscr{F}$．

根据定理3，拓扑空间的开集系和闭集系是彼此唯一决定的．因此，也可以用指定闭集系的方法给一个集合装备拓扑．显然，

时，开集应定义做闭集的余集。

定义3 设M是拓扑空间(X,τ)的一个子集，称$\overline{M}^{\tau}=\bigcap\limits_{\substack{F\in\mathscr{F}\\F\supset M}}F$（$\mathscr{F}$表示$(X,\tau)$的全部闭子集所成的子集系）为$M$的闭包。如果不致引起混淆，$\overline{M}^{\tau}$也简记作$\overline{M}$。

容易证明

定理4 设M是拓扑空间(X,τ)的一个子集，则

1） $\overline{M}^{\tau}$是闭集；

2） M是闭集的充分必要条件是$M=\overline{M}^{\tau}$；

3） $x\in\overline{M}^{\tau}$的充分必要条件是：对于x的每一个邻域V_x，均有$V_x\cap M\neq\phi$。

定义4 给定两个拓扑空间(X,τ)，(Y,σ)。称映射$f: X\to Y$在点$x_0\in X$连续，如果对于$y_0\triangleq f(x_0)$在(Y,σ)中的每一个邻域U_{y_0}，都存在x_0在(X,τ)中的邻域V_{x_0}，使$f(V_{x_0})\triangleq\{y\in Y; \exists x\in V_{x_0}$满足$y=f(x)\}\subset U_{y_0}$。如果$f$在$X$的每一点都连续，则称$f$是连续映射。

可以证明

定理5 给定拓扑空间(X,τ)，(Y,σ)以及映射f：$X\to Y$，则下述三个断言彼此等价：

1） f连续；

2） 在f下，开集的原象是开集；

3） 在f下，闭集的原象是闭集。

定理6 给定拓扑空间(X,τ)，(Y,σ)以及连续映射f：$X\to Y$，则对于任何子集$E\subset X$，有 $\overline{E}\subset\overline{f^{-1}(f(E))}\subset f^{-1}(\overline{f(E)})$

$$f(\overline{E}^{\tau})\subset\overline{f(E)}^{\sigma}$$

定义5 设(X,τ)，(Y,σ)是由两个拓扑空间，Φ：$X\to Y$是X到Y的映射。如果Φ是一一映上且双方连续的，则称它是一个同胚映射，而且(X,τ)与(Y,σ)叫做同胚的拓扑空间。

由此定义直接推出

定理7 设 (X,τ)，(Y,σ) 是两个拓扑空间，$\Phi: X\to Y$是同胚映射，则

$$\sigma=\{f(O);O\in\tau\}$$

定义6 设在集合X上分别装备了拓扑τ和拓扑σ。如果$\tau\subset\sigma$，则称τ比σ弱或σ比τ强。

容易证明

定理8 给定拓扑空间 (X,τ_1)，(X,τ_2) 和 (Y,σ)。设f: $X\to Y$是从 (X,τ_1) 到 (Y,σ) 的连续映射。如果$\tau_1\subset\tau_2$，则f也是从 (X,τ_2) 到(Y,σ) 的连续映射。

定理9 给定拓扑空间 (X,τ)，(Y,σ_1) 和 (Y,σ_2)。设f: $X\to Y$ 是从 (X,τ) 到 (Y,σ_1) 的续续映射。如果$\sigma_2\subset\sigma_1$，则f也是从 (X,τ) 到 (Y,σ_2) 的连续映射。

定义7 给定拓扑空间 (X,τ)，(Y,σ)，在集合$X\times Y\triangleq\{(x,y);x\in X,y\in Y\}$中取子集系

$$\mathscr{B}=\{O\times G;O\in\tau,G\in\sigma\}.$$

容易验证

1) $\bigcup_{B\in\mathscr{B}}B=X\times Y$;

2) 如果B_1，$B_2\in\mathscr{B}$，$z\in B_1\cap B_2$，则存在$B\in\mathscr{B}$，使$z\in B\subset B_1\cap B_2$。

由1)、2)不难证明：集系

$$\tau\times\sigma\triangleq\{\bigcup_{B\in\mathscr{B}'}B;\mathscr{B}'\subset\mathscr{B}\}$$

是$X\times Y$上的一个拓扑，称它为τ与σ的乘积拓扑，而拓扑空间 $(X\times Y;\tau\times\sigma)$ 叫 (X,τ) 和 (Y,σ) 的乘积拓扑空间。

容易证明

定理10 给定拓扑空间 (X,τ)，(Y,σ)。设$A\subset X,B\subset Y$，则$\overline{A}^{\tau}\times\overline{B}^{\sigma}\subset\overline{A\times B}^{\tau\times\sigma}$。

定义8 给定拓扑空间 (X,τ)，设$M\subset X$。如果$\overline{M}^{\tau}$不含$(X,$

τ）的任何非空开集，则称它是稀疏集；如果$\overline{M}^{\tau}=X$，则称它是(X,τ)的稠密子集；如果$M=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}M_n$，其中每个$M_n(n=1,2,\cdots)$都是稀疏集，则称$M$是$(X,\tau)$中的第一纲集；$(X,\tau)$的不是第一纲的子集叫做它的第二纲集。

容易看出："M稀疏"，"$\overline{M}^{\tau}$稀疏"，"$\overline{\overline{M}^{\circ}}^{\tau}=X$"这三个断言是彼此等价的。

按通常的拓扑，有理数集$\boldsymbol{Q}$是实数集空间$\boldsymbol{R}$中的第一纲稠密子集。

最重要的拓扑空间要数度量空间。

定义9 设d是定义在集合X上的二元实值函数，且满足

$d1$）$d(x,y)\geqslant 0$；

$d2$）$d(x,y)=0$的充分必要条件是$x=y$；

$d3$）$d(x,y)=d(y,x)$；

$d4$）$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(y,z)$，

这里$x,y,z\in X$。我们称d是X上的一个距离函数。装备了距离函数d的集合X，记做(X,d)，叫做度量空间或距离空间。

设$x\in(X,d)$，$\varepsilon>0$，称

$$B(x,\varepsilon)\triangleq\{y\in X;d(x,y)<\varepsilon\}$$

为以x为中心、ε为半径的开球。令

$$\tau_d\triangleq\{O\subset X;O\text{是空集或开球的并}\}.$$

容易验证，τ_d是X上的一个拓扑，称它为距离拓扑。我们约定，在论及度量空间中有关拓扑的问题时，如无特别声明，均指由其距离所确定的距离拓扑。

下述定理是关于距离空间的最重要的结果之一。

定理11 (Baire-Hausdorff) 非空完备度量空间是第二纲集。

注：设(X,d)是非空完备度量空间，该定理断言：X是(X,d)中的第二纲集。

证明 假若非空完备度量空间(X,d)不是第二纲集，则存在(X,d)的可数多个稀疏子集$M_n(n=1,2,\cdots)$使$X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}M_n$. 显然，不妨设$M_n(n=1,2,\cdots)$都是闭集。由$M_n$的稀疏性，$\overline{M_n^c}=X$。因此，对任何闭球$\overline{B}(x_0,r_0)=\{x\in X;d(x_0,x)\leqslant r_0\}$，这里$x_0\in X,r_0>0$，存在闭球$\overline{B}(x_1,r_1)\subset\overline{B}(x_0,r_0)\cap M_1^c$，且$0<r_1<\frac{1}{2}$。同理，存在闭球$\overline{B}(x_2,r_2)\subset\overline{B}(x_1,r_1)\cap M_2^c$，且$0<r_2<\frac{1}{2^2}$。如此继续下去，我们得到一列闭球$\{\overline{B}(x_n,r_n)\}_{n\in N}$，它满足

$$\overline{B}(x_n,r_n)\subset\overline{B}(x_{n-1},r_{n-1})\cap M_n^c$$

且

$$0<r_n<\frac{1}{2^n}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

不难验证，$\{x_n\}_{n\in N}$是(X,d)中的基本列，从而根据(X,d)的完备性，存在$x_0\in X$使$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$。另外，由于

$$d(x_0,x_n)\leqslant\overline{\lim_{m\to\infty}}[d(x_0,x_m)+d(x_m,x_n)]$$

$$=\overline{\lim_{m\to\infty}}d(x_m,x_n)\leqslant r_n,$$

得到

$$x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{B}(x_n,r_n)\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}M_n^c=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}M_n\right)^c=\phi.$$

这个矛盾说明X是(X,d)中的第二纲集。

由这个定理立刻得到

推论 非空完备度量空间中第一纲集的补集是第二纲的稠密子集。

§2 线性拓扑空间的定义及基本性质

首先叙述线性拓扑空间的定义.

定义1 设X是一个线性空间，其数域为K（我们将总限定K是实数域$\boldsymbol{R}$或复数域$\boldsymbol{C}$）. 设τ是X上的一个拓扑. 如果X中的加法和数乘法分别作为从乘积拓扑空间$X\times X$到X和从乘积拓扑空间$K\times X$到X的映射都是连续的，则说τ是X上的一个线性拓扑，(X,τ)是线性拓扑空间。

根据乘积拓扑的定义，加法连续，即对一切x, $y\in X$, 对$x+y$的任何邻域V_{x+y}，总存在x的邻域V_x和y的邻域V_y，使$V_x+V_y\subset V_{x+y}$（这里记号$U+V$表示集合$\{x+y;x\in U,y\in V\}$）；数乘法连续，即对一切$\lambda\in K,x\in X$, 对λx的任何邻域$V_{\lambda x}$，总存在$\delta>0$和x的邻域V_x，使对一切满足条件$|\mu-\lambda|<\delta$的$\mu\in K$有$\mu V_x\subset V_{\lambda x}$（这里记号$\alpha U$表示集合$\{\alpha x;x\in U\}$）。

容易检验

例1 $\boldsymbol{R}^n$

设$\boldsymbol{R}^n$是全体n维实数组的集合按通常的加法和数乘法构成的线性空间，其中的任意两点$x=(x_1,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,\cdots,y_n)$之间的距离由

$$d(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

规定，则相应的距离拓扑是一个线性拓扑，从而$\boldsymbol{R}^n$是一个线性拓扑空间.

例2 设X是定义在$[0,1]$上的实值函数全体的集合按通常的加法和数乘法构成的线性空间. 对于$f\in X,x\in[0,1],\varepsilon>0$,记

$$U_f(x,\varepsilon)=\{g\in X;\ |g(x)-f(x)|<\varepsilon\}.$$

设τ是由ϕ, X以及形如$U_f(x,\varepsilon)$的集合的任意并、有限交所构成

的集系，则τ是X上的一个Hausdorff线性拓扑。

现在讨论线性拓扑的基本性质。

定理1 给定线性拓扑空间(X,τ)，其数域为K。设$a\in X$，$\alpha\in K$，$\alpha\neq 0$，则映射T_a：$x\to x+a$和S_α：$x\to \alpha x$都是(X,τ)的自同胚映射。

证明 容易看出T_a是一一映上的，且其逆映射为T_{-a}，$T_a^{-1}=T_{-a}$。下边证明T_a（T_{-a}也一样）是连续的。

任给$x_0\in X$以及x_0+a的邻域V_{x_0+a}。根据加法连续性，存在x_0的邻域U_{x_0}，a的邻域U_a，使$U_{x_0}+U_a\subset V_{x_0+a}$。特别地，$U_{x_0}+a\subset V_{x_0+a}$，即$T_aU_{x_0}\subset V_{x_0+a}$。因此，$T_a$连续。

S_α的一一映上和双方连续性可以类似地去证明.

定理2 给定线性拓扑空间(X,τ)，其数域为K。设$x\in X$，则映射R_x：$\lambda\to\lambda x$是从K到(X,τ)的连续映射。

证明 由数乘法的连续性即得。

利用定理1和定理2以及§1定理10，立刻可以得到线性拓扑的如下性质：

性质1 设V是线性拓扑空间(X,τ)的一个原点邻域，$a\in X$，则$V+a$是a的邻域。

性质2 设V是以K为数域的线性拓扑空间(X,τ)的原点邻域，$\alpha\in K$，$\alpha\neq 0$，则αV也是(X,τ)的原点邻域。

性质3 设V是线性拓扑空间(X,τ)的原点邻域，则V是(X,τ)中的吸收集，即对任何$x\in X$，存在$\alpha>0$使$x\in\alpha V$。

性质4 给定线性拓扑空间(X,τ)，设E是X的线性子空间，则$\overline{E}^{\tau}$也是x的线性子空间。

在验证拓扑的线性性时经常用到以下的定理。

定理3 设X是一个线性空间，K是其数域，设τ是X上的一个拓扑，则τ是线性拓扑的充要条件是

1）$(x,y)\to x+y$是从$X\times X$到X的连续映射，

2）$(\alpha,x)\to\alpha x$是从$K\times X$到X的在点$O(0,0)$连续的映射，

3）$\forall x_0\in X$，$\alpha\to\alpha x_0$是从K到X的在点O连续的映射，

4）$\forall\alpha_0\in K$，$x\to\alpha_0 x$是从X到X的在点O连续的映射。

证明 利用等式

$\alpha x-\alpha_0x_0=(\alpha-\alpha_0)x_0+\alpha_0(x-x_0)+(\alpha-\alpha_0)(x-x_0)$即得。

最后，作为线性拓扑定义的应用，我们来讨论线性拓扑的商拓扑概念。

先回忆一下商空间的概念。

设M是线性空间X的线性子空间，$x_1,x_2\in X$。如果$x_1-x_2\in M$，则说x_1和x_2关于模M等价，并记做$x_1=x_2(\mathrm{mod}M)$。容易验证，"关于模M等价"是一个等价关系。将X按这个等价关系分类所得的全部类所构成的集合记做X/M。设$x\in X$，x所属的类记做$\hat{x}$。我们规定两个运算：

$$\hat{x}+\hat{y}=\widehat{x+y},\quad \alpha\hat{x}=\widehat{\alpha x}$$

这里$x,y\in X$，而α属X的数域K。容易验证，这两个运算的规定是合理的，并作为X/M的加法和数乘法使X/M成为以K为数域的线性空间，称它为关于模M的商空间。称映射$J_M:X\to X/M$，$J_Mx=\hat{x}$，为典型映射。容易看出

$$J_Mx=x+M,$$

$$J_M^{-1}(\hat{0})=M.$$

另外，注意到M是线性子空间，可以看出，J_M是线性映射。

定义2 给定线性拓扑空间(X,τ)，设M是X的线性子空间，称X/M上使J_M连续的最强的拓扑为商拓扑，记做$\hat{\tau}$，而$(X/M,\hat{\tau})$为(X,τ)关于模M的商拓扑空间。

显然，

$$\hat{\tau}=\left\{\hat{D};\ \hat{D}\subset X/M,\quad J_M^{-1}(\hat{D})\in\tau\right\},$$

并且不难验证