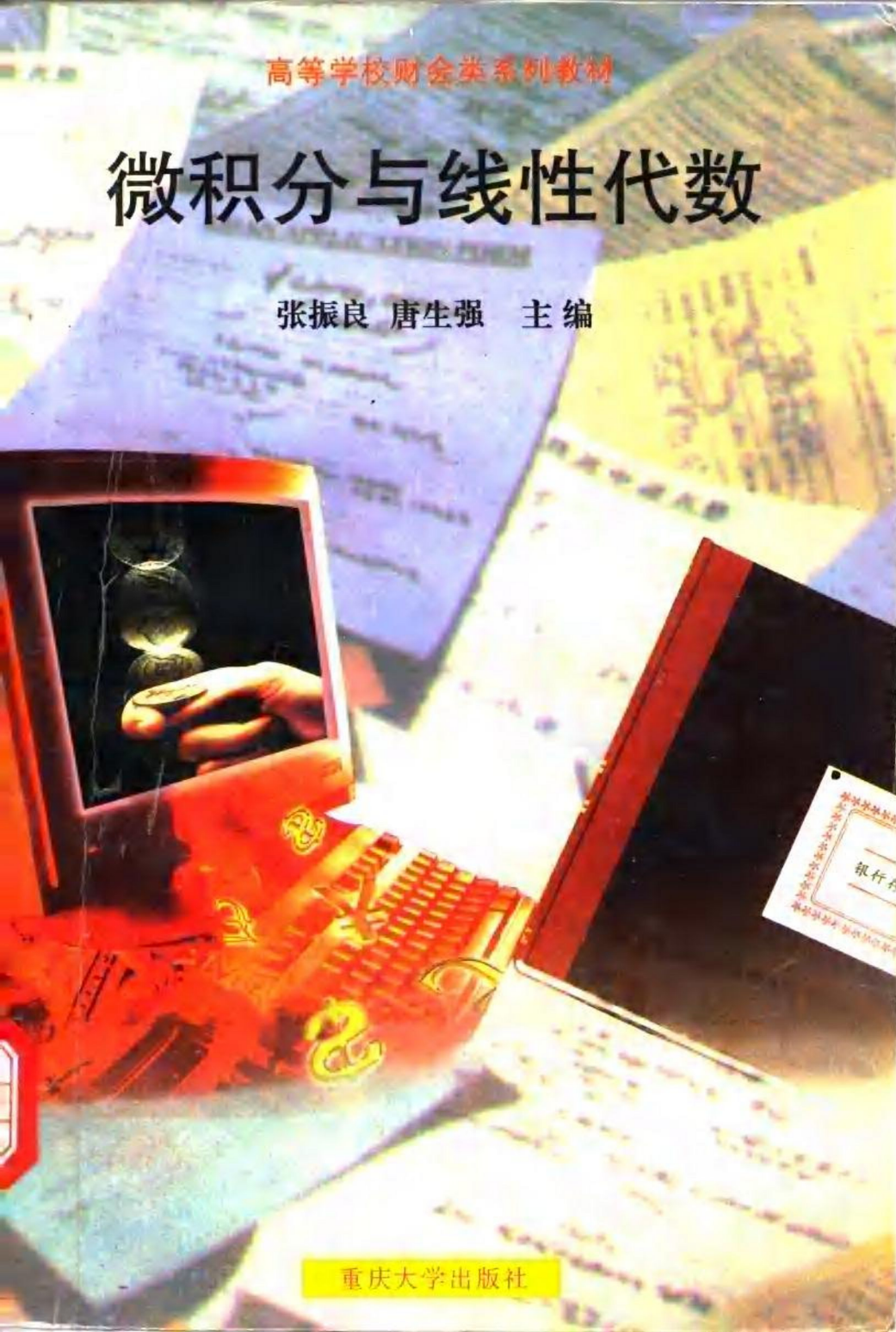


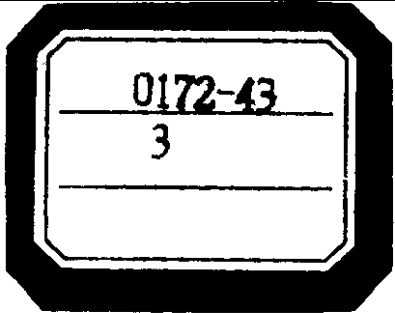
高等学校财会类系列教材

# 微积分与线性代数

张振良 唐生强 主编



重庆大学出版社



1751968

# 微积分与线性代数

张振良 唐生强 主编

7月/28/14



重庆大学出版社



北师大图书 B1370347

## 内 容 简 介

本书是高等学校财会类系列教材之一。全书分两篇,第一篇微积分共分七章,包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数的微分与积分简介。第二篇线性代数共分六章,包括行列式、矩阵、 $n$ 维向量、线性方程组、矩阵的特征值、投入产出数学模型。

本书可作为高等院校经济类各专业的教材,也可供广大经济工作者参考。

### 微积分与线性代数

张振良 唐生强 主编

责任编辑 曾令维

\*

重庆大学出版社出版发行

新华书店经销

重庆建筑大学印刷厂印刷

\*

开本:850×1168 1/32 印张:13.375 字数:360千

1998年3月第1版 1998年3月第1次印刷

印数:1—5000

ISBN 7-5624-1624-9/O·158 定价:16.00元

JY1/228/14

## 前 言

本书是高等学校财会类系列教材之一。

大学经济类应用数学基础教材应包括微积分、线性代数、概率论与数理统计三部分。作为高等数学基础的分析、代数、几何,长期以来一直分门设课,独立讲授。现在,由于各门学科的迅速发展,相互渗透以及对数学工具的整体和全面的要求,代数、几何和数学分析已成为完整的、统一的适应各专业需要的数学工具。所以,本教材把微积分和线性代数合编成一本书(其中包括空间解析几何简介)。分第一篇和第二篇编写,合计授课 120 学时。

第一篇微积分共分七章,约需讲授 90 学时。考虑到微积分作为经济分析的工具,重点讲解了一元微积分的基本概念,基本理论和基本方法;考虑到后继课程的需要,增加了多元微积分的介绍。教材中突出了微积分在经济学中的应用,淡化了在几何中的应用,几乎未涉及在力学中的应用。编者力图在概念的引入和例题的分析中,尽可能采用一些经济学中的实例,并且每章都编写了一节涉及经济中应用的内容。

第二篇线性代数共分六章,约需讲授 30 学时。前三章作为工具,介绍了行列式、矩阵、 $n$  维向量,后三章介绍了线性方程组、特征值与特征向量,还增加了投入产出数学模型的讨论。

本教材前后呼应,自成体系,一些最基本的定理,书中都给出了直观解释或证明。这样处理便于学生自学和满足基础较好的学生深入求知的需要。授课教师可根据学时的多少和学生的实际,讲授或删去某些定理的证明。总之,全书本着“打好基础,够用为度”的原则,精心选材,做到基本内容讲够,应用方法讲透;既突出了重点,又结合了专业特点。在表述上力求从直观入手、循序渐进,力争做到深入浅出、通俗易懂。

本书第一、二章由孙红兵撰写；第三、四章由唐生强撰写；第五、六章由张振良撰写；第七章由成和平撰写；第八至第十三章由何淦瞳撰写。副主编唐生强副教授审阅了一元微积分部分的初稿。全书由主编张振良教授细致地进行了统稿、定稿。本书的主审人李继彬教授提出了许多有益的改进意见，编者对他表示感谢。

由于编者水平有限，疏漏和错误在所难免，诚恳希望读者批评指正。

**编 者**

1997 年春

# 目 录

## 第一篇 微积分

第一章 函数 .....	1
§ 1.1 函数的概念 .....	1
§ 1.2 基本初等函数与初等函数 .....	9
§ 1.3 经济学中几种常见的函数 .....	21
第二章 极限与连续 .....	27
§ 2.1 数列的极限 .....	27
§ 2.2 函数的极限 .....	34
§ 2.3 无穷大与无穷小 .....	42
§ 2.4 极限的运算法则 .....	47
§ 2.5 两个重要极限 .....	53
§ 2.6 函数的连续性 .....	58
单元自测题 1 .....	70
第三章 导数与微分 .....	72
§ 3.1 导数的概念 .....	72
§ 3.2 导数的运算法则 .....	78
§ 3.3 隐函数的导数 .....	91
§ 3.4 高阶导数 .....	94
§ 3.5 经济学中的变化率问题 .....	98
§ 3.6 微分及其应用 .....	101
第四章 导数的应用 .....	109
§ 4.1 微分中值定理 .....	109
§ 4.2 罗必塔法则 .....	112
§ 4.3 函数的性态与作图 .....	117
§ 4.4 导数在经济分析中的应用 .....	130
单元自测题 2 .....	134
第五章 不定积分 .....	136

§ 5.1	不定积分的概念及性质	136
§ 5.2	不定积分的换元积分法	143
§ 5.3	不定积分的分部积分法	151
§ 5.4	有理函数的积分举例	155
§ 5.5	不定积分在经济中的应用	159
<b>第六章</b>	<b>定积分及其应用</b>	<b>163</b>
§ 6.1	定积分的概念及性质	163
§ 6.2	定积分与不定积分的关系	170
§ 6.3	定积分的换元积分法	176
§ 6.4	定积分的分部积分法	180
§ 6.5	定积分的近似计算	184
§ 6.6	广义积分	189
§ 6.7	定积分在几何中的应用	195
§ 6.8	定积分在经济中的应用	200
	单元自测题 3	204
<b>第七章</b>	<b>多元函数的微分与积分简介</b>	<b>206</b>
§ 7.1	空间解析几何简介	206
§ 7.2	二元函数及其极限	215
§ 7.3	偏导数与全微分	219
§ 7.4	复合函数与隐函数的偏导数	225
§ 7.5	偏导数在经济中的应用	230
§ 7.6	二重积分的概念	239
§ 7.7	二重积分的计算	243
	单元自测题 4	253

## 第二篇 线性代数

<b>第八章</b>	<b>行列式</b>	<b>255</b>
§ 8.1	行列式的定义	255
§ 8.2	行列式的性质	259
§ 8.3	克莱姆法则	273
<b>第九章</b>	<b>矩阵</b>	<b>279</b>
§ 9.1	矩阵的定义与运算	279
§ 9.2	逆矩阵	290

§ 9.3	分块矩阵	294
§ 9.4	矩阵的初等变换	300
§ 9.5	矩阵的秩	306
<b>第十章</b>	<b><math>n</math> 维向量</b>	<b>311</b>
§ 10.1	$n$ 维向量及其运算	311
§ 10.2	向量组的线性相关性	313
§ 10.3	向量组的秩	319
<b>第十一章</b>	<b>线性方程组</b>	<b>324</b>
§ 11.1	消元法	324
§ 11.2	齐次线性方程组	329
§ 11.3	非齐次线性方程组	336
<b>第十二章</b>	<b>矩阵的特征值</b>	<b>347</b>
§ 12.1	矩阵的特征值与特征向量	347
§ 12.2	相似矩阵与矩阵的对角化	352
<b>第十三章</b>	<b>投入产出数学模型</b>	<b>359</b>
§ 13.1	投入产出表与平衡方程组	359
§ 13.2	直接消耗系数与完全消耗系数	362
§ 13.3	投入产出方法的应用	371
	单元自测题 5	376
<b>附录</b>		<b>379</b>
	简明积分表	379
	习题答案	386
<b>参考文献</b>		<b>420</b>



# 第一篇 微积分

## 第一章 函 数

函数概念是微积分中最基本的概念之一。函数是微积分研究的主要对象。在这一章里,我们将给出函数的一般定义和函数的一些简单性质,建立经济学中的一些常见函数。复习基本初等函数和分析初等函数的结构,作为以后学习的基础。

### § 1.1 函数的概念

#### 一、常量和变量

当我们观察各种自然现象、社会现象和进行科学实验时,经常遇到两种不同的量:一种量在过程进行中相对保持不变,恒取一个数值,这种量称为常量;另一种量在过程进行中不断变化,可取不同数值,这种量称为变量。例如,某商店中商品的价格在某段时期内是常量,而商品的销售额是变量。一般用  $a, b, c, \dots$  表示常量,用  $x, y, z, \dots$  表示变量。但是,常量和变量之分都是对某一过程而言。同一个量,在某一过程中为常量,而在另一过程中就可能是变量。例如商品的价格在某一时期内是常量,但在另一时期可能是变量;同样商品在某个时期根本没有售出,这个时期它的销售额是个常量;而在某个时期不断地出售,它的销售额又是个变量。

变量在一个过程中变化时,总是在某一范围内取值,例如自然数,或某些实数等,但大多数是在两个实数之间连续取值,这样的实数集叫做区间。下面将各种区间的名称、符号介绍如下:

设  $a, b$  是实数,且  $a < b$

(1) 开区间

$$(a, b) = \{x | a < x < b\};$$

(2) 闭区间

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\};$$

(3) 半开半闭区间

$$(a, b] = \{x | a < x \leq b\};$$

$$[a, b) = \{x | a \leq x < b\}.$$

以上三类区间称为有限区间,  $|a - b| = |b - a|$  称为区间的长。

还有几类无穷区间

$$(4) (a, +\infty) = \{x | a < x < +\infty\};$$

$$[a, +\infty) = \{x | a \leq x < +\infty\};$$

$$(5) (-\infty, b) = \{x | -\infty < x < b\};$$

$$(-\infty, b] = \{x | -\infty < x \leq b\};$$

$$(6) (-\infty, +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty\}.$$

其中记号“ $\infty$ ”读作无穷大,它不是一个数。“ $\infty$ ”前面的“+”,“-”号分别表示正向和负向。

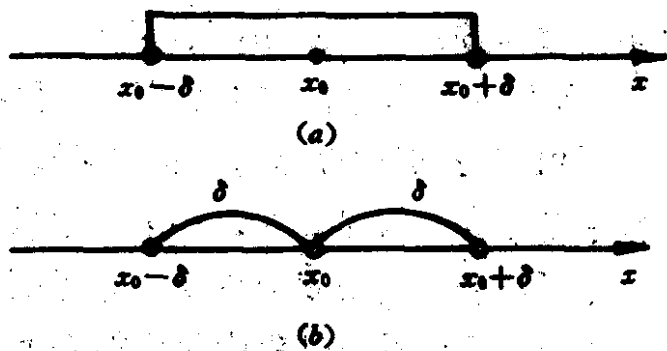


图 1.1

以后我们还会经常遇到以  $x_0$  为中心的开区间,这样的开区间称为点  $x_0$  的邻域。

对于任意的一个正数  $\delta$ , 开区间  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  称为以  $x_0$  为中心,  $\delta$  为

半径的邻域,简称为  $x_0$  的  $\delta$  邻域,记为  $u(x_0, \delta)$  (如图 1.1(a))。

$x$  属于  $x_0$  的  $\delta$  邻域,意指  $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$  或  $|x - x_0| < \delta$ 。

在  $x_0$  的  $\delta$  邻域中去掉点  $x_0$  后其余的点组成的集合,称为  $x_0$  的去心邻域,记为  $u(\overset{\wedge}{x}_0, \delta)$  (如图 1.1(b)),即  $u(\overset{\wedge}{x}_0, \delta) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 。

## 二、函数的概念

**定义 1.1** 设有两个变量  $x$  和  $y$ ,如果变量  $x$  在其变化范围  $D$  内任取一个确定的数值时,变量  $y$  按照某一确定的法则,总有唯一确定的数值和它对应,则称  $y$  为  $x$  的函数,记为  $y = f(x)$ ,且称  $x$  为自变量, $y$  为因变量, $D$  为函数的定义域。当  $x$  取遍  $D$  内所有值时,所对应的函数值全体所组成的数集

$$W = \{y | y = f(x), x \in D\}$$

称为函数的值域。

**例 1** 圆的面积  $A$  与它的半径  $r$  之间有下列的关系式

$$A = \pi r^2 \quad (0 < r < +\infty)$$

当  $r$  在  $(0, +\infty)$  内取定某一数值时,圆的面积  $A$  也就有一个确定的数值与之对应。

**例 2** 某商店规定,购买某种商品,数量在 100kg 以内,每公斤售价 80 元;数量在 100kg 及 100kg 以上,且低于 1000kg 的,每 kg 售价 72 元;数量不低于 1000kg 的,每 kg 售价 60 元,则该商店对这种商品的销售收入函数为

$$R(x) = \begin{cases} 80x & 0 \leq x < 100 \\ 72x & 100 \leq x < 1000 \\ 60x & x \geq 1000 \end{cases}$$

显然变量  $x$  在  $[0, +\infty)$  内任取某一个销售数额时,通过  $R(x)$  就有一个确定收入和它对应。

**例 3** 某城市某路公共汽车全程有 12 站,其票价规定,每乘 3 站,票价增加 0.5 元,站数和票价的关系列表如下:

表 1.1

站数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
票额(元)	0.5	0.5	0.5	1.0	1.0	1.0	1.5	1.5	1.5	2.0	2.0	2.0

在表 1.1 中取定一个行驶的站数,就有一个票价和它对应。

**例 4** 一天中气温  $T$  与时间  $t$  是两个变量。某日气温自动记录仪记录了这两者的关系图(如图 1.2)。根据这个图,在 0 到 24 小时内每取一个时刻  $t_0$  都有一个温度  $T_0$  和它对应。

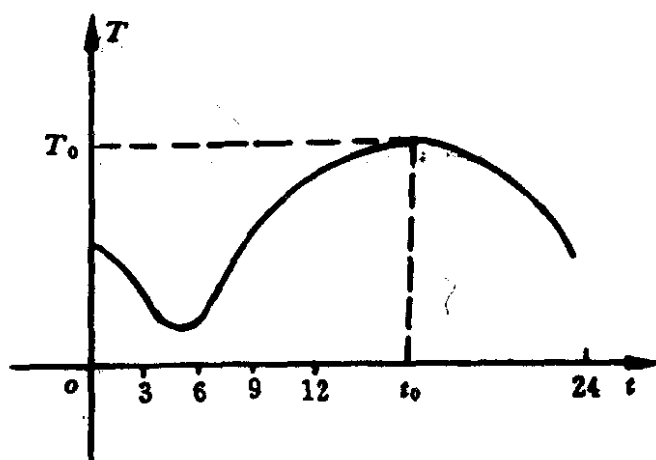


图 1.2

以上四个例子都表示了两个变量之间的对应关系,它们都是函数,由此函数有三种表示法。解析式表示法(如例 1 和例 2),表格表示法(如例 3)和图形表示法(如例 4)。今后常常碰到的是解析式表示法。作为微积分主要研究

对象的基本初等函数和初等函数都是用解析式表示的。特别要指出的是,在表示经济关系的许多函数中;所用的解析表达式不止一个。对于自变量的某一部分取值,函数关系是一个表达式,而对自变量的另一部分取值,又用另一个表达式表示,这样的函数称为分段函数,如例 2 中的函数。

### 三、函数的定义域

如果自变量取某一数值  $x_0$  时,函数  $y=f(x)$  有唯一确定的值与它对应,则称函数在  $x_0$  处有定义。函数的定义域就是使函数有定义的自变量取值的全体。当函数用解析式给出时,定义域就是使

该式有意义的自变量的取值范围。求函数的定义域通常参考以下原则：

(1) 函数式里如果有分式，则分母不能为零；

(2) 函数式里如果有根式，则偶次根式里的整个式子不能为负数；

(3) 函数式里如果有对数符号，则对数的真数必须为正；

(4) 函数式里如果有正切函数或余切函数，则正切符号后的式子不能等于  $kx + \frac{\pi}{2}$ ，余切符号后的式子不能等于  $k\pi$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )；

(5) 函数式里如果有反正弦或反余弦函数，则反正弦、反余弦符号后的式子的绝对值必须小于等于 1；

(6) 如果函数式由若干个式子组成，则它的定义域是各式定义域的公共部分；

(7) 对几个式子表示的分段函数，它的定义域是各式定义域的并集。

**例 5** 求函数  $f(x) = \frac{\lg(3-x)}{\sqrt{x+1}}$  的定义域。

**解** 根据以上求函数定义域的原则(1),(2)和(3),得下列两个不等式：

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ 3-x > 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x > -1 \\ x < 3 \end{cases}$$

所以，所求函数的定义域为  $(-1, 3)$ 。

**例 6** 求函数  $f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{2-x} + \arcsin \frac{x-1}{2}$  的定义域。

**解** 由求函数定义域的原则(1),(2)和(5),得下列三个不等式：

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ 2-x \geq 0 \\ \left| \frac{x-1}{2} \right| \leq 1 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ x \leq 2 \\ -1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

所以，所求函数的定义域为  $[-1, 0) \cup (0, 2]$ 。

### 例7 设分段函数

$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 2 \\ x + 2 & x > 2 \end{cases}$$

求  $f(x)$  的定义域。

**解** 根据求定义域的原则(7),得  $f(x)$  的定义域为  $(-\infty, 0) \cup [0, 2) \cup (2, +\infty)$ , 即  $(-\infty, +2) \cup (2, +\infty)$ 。

函数的定义域和对应法则构成函数的两个要素,所以要两个函数相同,不仅函数的对应法则相同,而且它们的定义域也必须相等。例如

$$y = \frac{x^2}{x} \text{ 和 } y = x$$

$$y = \lg x^2 \text{ 和 } y = 2 \lg x$$

它们通过运算可以变为具有相同对应法则的函数,但由于定义域不同,所以它们是不同的函数。又如

$$y = \sqrt{x^2} \text{ 和 } y = x$$

虽然它们的定义域相同,但对应法则不同,所以也是不同的函数。

## 四、函数值

函数  $y = f(x)$  中的“ $f$ ”表示函数关系中的对应法则,即对每一个  $x \in D$ ,按照规则  $f$  有一个确定的  $y$  与之对应。 $f(x)$  表示将规则  $f$  施于  $x$ ,如果把  $f(x)$  中括号内的  $x$  转换成  $D$  中的某个具体数值或表示数值的字母以及某个数学式子,则表示将规则  $f$  施于那个具体数值或表示数值的字母以及那个数学式子。

**例8** 设  $f(x) = \frac{|x-2|}{x+1}$ , 求  $f(2), f(-2), f(0), f(a), f(a+b)$ 。

**解**  $f(2) = \frac{|2-2|}{2+1} = 0$

$$f(-2) = \frac{|-2-2|}{-2+1} = -4$$

$$f(0) = \frac{|0-2|}{0+1} = 2$$

$$f(a) = \frac{|a-2|}{a+1}$$

$$f(a+b) = \frac{|a+b-2|}{a+b+1}$$

例9 设分段函数为:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \geq 0 \\ x^2+4 & x < 0 \end{cases}$$

求  $f(-1), f(0), f(1), f(x+1)$ .

解  $f(-1) = x^2+4|_{x=-1} = 5$

$$f(0) = 2x+1|_{x=0} = 1$$

$$f(1) = 2x+1|_{x=1} = 3$$

$$\begin{aligned} f(x-1) &= \begin{cases} 2(x-1)+1 & x-1 \geq 0 \\ (x-1)^2+4 & x-1 < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2x-1 & x \geq 1 \\ x^2-2x+5 & x < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

例10 设  $f(x+1) = \sin x + x^2$ , 求  $f(x-1)$ .

解 令  $t = x+1$ , 即  $x = t-1$ , 则

$$f(t) = \sin(t-1) + (t-1)^2$$

即  $f(x) = \sin(x-1) + (x-1)^2$

所以  $f(x-1) = \sin[(x-1)-1] + [(x-1)-1]^2$   
 $= \sin(x-2) + (x-2)^2$

### 习题 1.1

1. 用区间表示满足下列不等式的所有  $x$  的集合:

(1)  $|x| \leq 3$

(2)  $|x-2| \leq 1$

(3)  $|x-a| < \epsilon$  ( $a$  为常数,  $\epsilon > 0$ )

(4)  $|x| \geq 5$

(5)  $|x+1| > 2$

(6)  $0 < |x-x_0| < \delta$  ( $x_0$  为常数,  $\delta > 0$ )

2. 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \sqrt{x+2}$$

$$(2) y = \sqrt{x^2-1}$$

$$(3) y = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$(4) y = \sqrt{x^2+2x-3}$$

$$(5) y = \frac{1}{4-x^2} - \sqrt{x+3}$$

$$(6) y = \lg(x+3)$$

$$(7) y = 10^{\frac{1}{x}}$$

$$(8) y = \arccos \frac{2x}{1+x}$$

$$(9) y = \sqrt{5-x} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

$$(10) y = \frac{\sqrt{16-x^2}}{\lg(3-x)}$$

### 3. 确定函数

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & |x| \leq 1 \\ x^2-1 & 1 < |x| < 2 \end{cases}$$

的定义域并作出函数图形。

### 4. 求下列函数值:

$$(1) f(x) = \frac{1-x}{1+x}, \text{ 求 } f(0), f(1), f\left(\frac{1}{x}\right), \frac{1}{f(x)}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} 1+x^2 & x \leq 0 \\ 2^{x-1} & x > 0 \end{cases}$$

求  $f(-2), f(0), f(2)$ 。

$$(3) f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x = 0, \text{ 求 } f(x-1). \\ -1 & x > 0 \end{cases}$$

### 5. 判断下列各对函数是否相同,为什么?

$$(1) f(x) = \lg \frac{2-x}{2+x} \text{ 与 } g(x) = \lg(2-x) - \lg(2+x)$$

$$(2) f(x) = \frac{x}{2} \text{ 与 } g(x) = \frac{v}{2}$$

$$(3) f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \text{ 与 } g(x) = x+1$$

$$(4) f(x) = x|x| \text{ 与 } g(x) = x\sqrt{x^2}$$



## § 1.2 基本初等函数与初等函数

### 一、函数的几种特性

函数的几何特性与函数图形密切相关,因此,我们结合图形来研究函数的几种简单性态。

#### 1. 函数的奇偶性

**定义 1.2** 设函数  $y=f(x)$  的定义域为  $(-a, a)$ ,  $a>0$ 。如果对于定义域中任何  $x$ , 有

$$f(-x)=f(x)$$

成立,则称  $y=f(x)$  为偶函数;如果对于定义域中任何  $x$ , 有

$$f(-x)=-f(x)$$

成立,则称  $y=f(x)$  为奇函数。

偶函数的图形关于  $y$  轴对称。因为由  $f(-x)=f(x)$  知,若  $A(x, f(x))$  是图形上的点,那么它对称于  $y$  轴的点  $A'(-x, f(x))$ ,也是图形上的点(如图 1.3)。

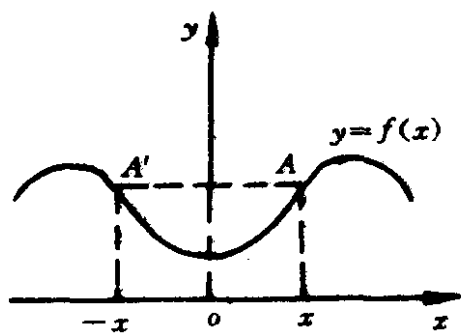


图 1.3

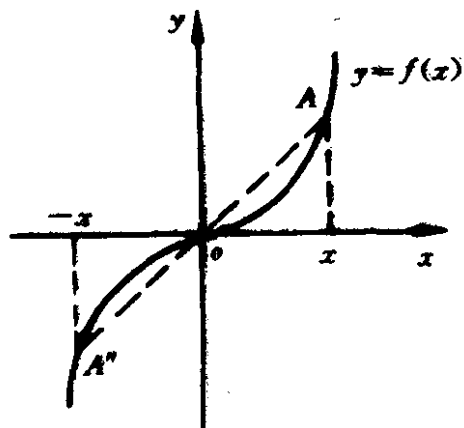


图 1.4

奇函数的图形关于原点对称。因为由  $f(-x)=-f(x)$  知,若  $A(x, f(x))$  是图形上的点,则它对称于原点的点  $A''(-x, -f(x))$ ,也是图形上的点(如图 1.4)。