[法]·GFlory 原著

周性伟 白继祖 译

拓扑与分析习题和解答

第一卷

高等教育出版社

拓扑与分析
习题和解答

第一卷

[法]G. Flory 原著
周性伟　白继祖译

高等教育出版社

内 容 提 要

本书根据法国 Vuibert 书店出版 G. Flory 著 Exercises de topologie et d'-analyse 中第一卷译出. 原书共四卷，第一卷是 1976 年出版的，即"拓扑"部分，分"实数的性质，序列"，"拓扑空间"，"距离空间"，"赋范线性空间"四章。每一章又分若干节，每节先简略回顾必要的理论知识，然后给出习题和解答. 所选习题虽是较基本的，但类型较多，涉及面较广，相当多题目是国内已出版书籍中少见的. 习题的解答叙述清楚、扼要. 读者可以通过学习这些习题使学过的知识得到巩固和加宽加深，阅读本书要学习过数学分析、线性代数并略具泛函分析、高等代数方面的常识.

本书可供高等院校数学类专业高年级学生、研究生、教师和数学工作者参考之用.

拓扑与分析

习题和解答

第一卷

[法]G. Flory 原著

周性伟　白继祖译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北 京 丰 盛　印刷厂印装

*

开本850×1168　1/32　印张 6.875　字数 164,000

1985 年 7 月第 1 版　1985 年 7 月第 1 次印刷

印数 00,001—13,650

书号 13010·0979　定价 1.75 元

引　言

这套书中所选习题的目的是为了使大学第一阶段的学生所学的知识得到巩固和更为精确.

全套书共分四卷,它们依次论及:拓扑,实变函数,可微函数和多重积分,级数和微分方程.

我们不想收集那些罕见和难度大的习题,而只是收集一些基本习题,其中有的是课程的有用的延续,有的是它们的应用.书中内容的编排比较细致,对已有知识和定义作了回顾,这些必定有便于读者查考和获得必要的材料.

题解是经过反复斟酌的,一般来说是完整的,但常常写得比较扼要,学生应作更多的努力,通过自己的研究来疏通思路.我们希望这一尝试取得成功.

第一卷目　　录

第一章

实数的性质. 序列

$\boldsymbol{R}$的定义

I. 有序域, 阿基米德域

一个域K称为全序的, 若在K上定义了一个全序关系, 这个全序关系对加法满足

$$\forall(a,b,c)\in K^3: a\leqslant b\Longleftrightarrow a+c\leqslant b+c,$$

而对与一个严格正的元素的乘法满足(我们假定K是交换的):

$$(\forall(a,b)\in K^2),\ (\forall c\in K): c>0\Longrightarrow[a\leqslant b\Longleftrightarrow ac\leqslant bc].$$

通常我们用K_+和K_+^*表示正元素子集与严格正元素子集.

在一个全序域上我们可以定义绝对值: $|x|$表示x和$-x$中正的那个元. 绝对值满足

$$(\forall(x,y)\in K^2): |xy|=|x|\cdot|y| \quad 及 \quad |x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

一个序列$(x_n)_{n\in N}$称为收敛的, 若存在$l\in K$, $l=\lim(x_n)$, 使

$$(\forall\varepsilon\in K_+^*),\ (\exists n_0\in \boldsymbol{N}^*),\ (\forall n\in\boldsymbol{N})[n>n_0\Longrightarrow|x_n-l|<\varepsilon.]$$

一个全序域K称为阿基米德的, 若

$$(\forall(a,b)\in(K_+^*)^2),\ (\exists n\in\boldsymbol{N}): na>b.$$

$\boldsymbol{Q}$*) 是阿基米德的.

1. 证明每一个全序域K包含一个与$\boldsymbol{Z}$*)同构的子环, 和一个与$\boldsymbol{Q}$同构的子域. K中的单位元用e表示.

对$n\in\boldsymbol{N}$及$a\in\boldsymbol{K}$, 我们定义$na=a+\cdots+a$ (n次), $-na=$

---

*) $\boldsymbol{N}$表示非负整数全体, $\boldsymbol{Q}$表示有理数全体, $\boldsymbol{Z}$表示整数全体, 以下同——译者.

$n(-a)$. 这样, $\mathbf{Z}$ 到 K 中的映射

$$\varphi:\ n \longmapsto ne$$

满足

$$(\forall (m, n) \in \mathbf{Z}^2): me + ne = (m+n)e$$

及

$$me \times ne = (mn)e,$$

因此对环的结构来说这是 $\mathbf{Z}$ 到 K 中的一个同态. 此外,

$$(\forall n \in \mathbf{Z}): (n+1)e = ne + e > ne.$$

因此 φ 是严格增加的, 即是单射的. 故 φ 是 $\mathbf{Z}$ 到 $\varphi(\mathbf{Z})$ 上的一个同构, 因而 $\varphi(\mathbf{Z})$ 是 K 的一个子环. 于是这个环的分数域按照映射

$$\frac{p}{q} \longmapsto (pe) \times (qe)^{-1}$$

与域 $\mathbf{Q}$ 同构(上述映射的结果与所选择的有理数的表示法无关). 我们就记 $(pe) \times (qe)^{-1} = \frac{p}{q}e$, 并把它和有理数 $\frac{p}{q}$ 等同起来.

容易验证上述映射是保序的.

2. 设 K 是阿基米德域. 证明 $\mathbf{Q}$(由上题把它等同于 K 的一个子域)在 K 中是稠的, 并且 K 的每个元素是一个有理数序列的极限.

设 a 和 b 是 K 中的两个元, $a<b$. 此时存在 $n \in N$ 使

$$n(b-a) > e = 1.$$

若 $a \geqslant 0$, 则存在 $p \in N$ 使 $p \times \frac{1}{n} > a$, 我们取 p 是使这个不等式成立的最小整数. 这样

$$\frac{p-1}{n} \leqslant a < b.$$

但是, 这样一来,

$$\frac{p}{n} \geqslant b \Longrightarrow \frac{p}{n} - \frac{p-1}{n} = \frac{1}{n} \geqslant b-a,$$

这和假设是矛盾的. 因此我们证明了存在有理数 $\frac{p}{n}$ 使 $a<\frac{p}{n}<b$.

若 $a<0$, 我们同样可证明存在自然数 p 使

$$\frac{p-1}{n}<-a\leqslant\frac{p}{n}.$$

由此容易验证

$$a<-\frac{p-1}{n}<b.$$

因此 $\boldsymbol{Q}$ 在 K 中稠.

为了证实本题, 我们还可以证明 $a\in K$ 是序列 $(x_n)_{n\in N^*}$ *) 的极限, 其中对每一 $n\in \boldsymbol{N}^*$, $x_n=\frac{p}{n}$ 是如上面所确定的有理数.

3. 在全序域 K 中, 一个收敛序列只能有一个极限

假设序列 (x_n) 有两个极限 l, l', 其中 $l<l'$. 取 $\varepsilon=\frac{l'-l}{2}$, 则

$$(\exists n_1\in \boldsymbol{N}),\ (\forall n): n>n_1 \Longrightarrow |x_n-l|<\frac{l'-l}{2},$$

$$(\exists n_2\in \boldsymbol{N}),\ (\forall n): n>n_2 \Longrightarrow |x_n-l'|<\frac{l'-l}{2},$$

于是

$$n>\max(n_1, n_2)\Longrightarrow |l-l'|\leqslant|x_n-l|+|x_n-l'|<l'-l;$$

这是一个矛盾.

Ⅱ. 实数域 R

一个全序域 K 的元列 $n\longmapsto x_n$ 称为哥西(Cauchy)序列, 若

$$(\forall \varepsilon\in K_+^*),\ (\exists n_0\in \boldsymbol{N}),\ (\forall (p, q)\in \boldsymbol{N}^2): n_0<p<q\Longrightarrow |x_p-x_q|<\varepsilon.$$

每一收敛序列是哥西序列. 一个域称为完备的, 若它的每一哥西序列都收敛.

---

*) $\boldsymbol{N}^*$ 表示正整数全体, 以下同——译者.

$\boldsymbol{R}$ 的定义：它是一个完备的阿基米德域．这就是说我们是在同构的意义下定义 $\boldsymbol{R}$ 的(见题 7)．这样一个域的存在性可以通过多种途径来证明：$\boldsymbol{Q}$ 中的哥西序列, $\boldsymbol{Q}$ 中的分割, …．途径的选择会影响以后研究和证明的方法，但不会改变结果．题 4 到 6 把 $\boldsymbol{R}$ 的这个定义和其它一些定义联系起来了．

$A\subset \boldsymbol{R}$ 的上、下确界：每一有上界的集 $A\subset\boldsymbol{R}$ 有上确界 $M=\sup A$，它是上界中的最小者．同样, $m=\inf A$ 是下界中的最大者．

1. 设 A 和 B 是 R 中两个有上界的非空子集

证明

a) $A\subset B\Longrightarrow \sup A\leqslant \sup B$;

b) $A\cup B$ **有上界, 并确定** $\sup(A\cup B)$.

a) $M_2=\sup B$ 是 A 的一个上界, 故 $M_2\geqslant M_1=\sup A$.

b) $M=\sup(M_1, M_2)$既是 A 也是 B 的一个上界，从而也是 $A\cup B$ 的一个上界．现在假设 $M=M_2$, 则每一实数 K, $K<M_2$, 不是 B 的上界, 从而也不是 $A\cup B$ 的上界．这样

$$\sup(A\cup B)=M=\sup(\sup A, \sup B).$$

2. 设 A 和 B 是 R 中两个有上界的非空子集．现在定义

$$C=A+B=\{z\in\boldsymbol{R}\mid \exists x\in A, \exists y\in B, z=x+y\},$$

证明 $\qquad \sup C=\sup A+\sup B.$

对 C 中每一个 $z=x+y$,

$$z=x+y\leqslant \sup A+\sup B.$$

因此 C 有上界, 而且

$$\sup C\leqslant \sup A+\sup B.$$

另一方面,

$$(\forall\varepsilon\in\boldsymbol{R}_+^*)^{*)}, (\exists x_0\in A): x_0>\sup A-\frac{\varepsilon}{2},$$

$$(\forall\varepsilon\in\boldsymbol{R}_+^*), (\exists y_0\in B): y_0>\sup B-\frac{\varepsilon}{2},$$

---

*) $\boldsymbol{R}_+^*$ 表示正实数全体, 以下同——译者.

于是对 $z_0=x_0+y_0\in C$ 有

$$z_0>\sup A+\sup B-\varepsilon,$$

这就是说

$$(\forall\varepsilon),\ \sup C>\sup A+\sup B-\varepsilon.$$

从而

$$\sup(A+B)=\sup A+\sup B.$$

3. 设 A 和 B 是 $(\boldsymbol{R}_+)$*) 中两个有上界的非空子集. 现在定义

$$D=AB=\{z\in\boldsymbol{R}\mid\exists x\in A,\ \exists y\in B,\ z=xy\},$$

试确定 $\sup D$.

由于

$$(\forall(x,y)\in A\times B): xy\leqslant x\times\sup B\leqslant\sup A\times\sup B,$$

因此 D 有上界而且

$$\sup D\leqslant\sup A\times\sup B.$$

现在假设 A 和 B 都不是 $\{0\}$, 于是

$$(\forall\varepsilon\in\boldsymbol{R}_+^*),\ (\exists x_0\in A): x_0>\sup A-\frac{\varepsilon}{2\sup B},$$

$$(\forall\varepsilon\in\boldsymbol{R}_+^*),\ (\exists y_0\in B): y_0>\sup B-\frac{\varepsilon}{2\sup A}$$

(事实上 $\sup A$ 和 $\sup B$ 都是严格正的), 从而

$$\begin{aligned}z_0=x_0y_0&>\sup A\times\sup B-\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{4\sup A\times\sup B}\\&>\sup A\times\sup B-\varepsilon,\end{aligned}$$

这就是说

$$\sup(AB)=\sup A\times\sup B.$$

4. 若全序域 K 的每一个有上界的子集有上确界, 则 K 必是阿基米德的.

---

*) $\boldsymbol{R}_+$ 表示非负实数全体, 以下同——译者.

设 a 和 b 是任意两个严格正的元，$a<b$. 假若 b 是 $A=\{na|n\in N\}$ 的上界且 $M=\mathrm{spu}A$. 此时

$$(\forall n),(n+1)a\leqslant M\Longrightarrow(\forall n),na\leqslant M-a,$$

即 $M-a$ 是 A 的一个上界，从而 M 就不是上确界. 这个矛盾说明 b 不能是 A 的上界. 因此存在 $n\in N$ 使 $na>b$.

5. 若全序域 K 中每一个有上界的子集都有上确界，则每一个有上界的增加序列必收敛.

设(x_n)是这样一个序列. 于是 $A=\{x_n|n\in N\}$ 是一个有上界的集. 设 $M=\sup A\in K$. 此时

$$(\forall\varepsilon\in \boldsymbol{R}_+^*),(\exists n_0\in N):x_{n_0}>M-\varepsilon.$$

但由(x_n)是增加的知道

$$(\forall n\in N):n>n_0\Longrightarrow M-\varepsilon<x_{n_0}\leqslant x_n\leqslant M.$$

这就是说 $M=\lim(x_n)$.

6. 如果一个全序域的每一个有上界的子集都有上确界，那么这个全序域必定是完备的. 为此我们要对每一哥西序列 $\{x_n\}$（注意它是有界的）证明

a) $X_p=\{x_n|n\geqslant p\}$ 有下确界 a_p 和上确界 b_p;

b) 序列$(a_p)_{p\in N}$和$(b_p)_{p\in N}$都是单调收敛的;

c) $\lim(a_p)=\lim(b_p)$，而且这个数就是 $\lim(x_n)$.

用 $-A=\{-x|x\in A\}$ 来代替 A，则由假设知道每一个有下界的子集有下确界，因此每一有下界的减少序列是收敛的.

a) 由于每一哥西序列都有界，故 $X_0=\{x_n|n\in N\}$ 有界. 但 $X_p\subset X_0$，故 X_p 既有上界也有下界，因此 X_p 有下确界 a_p 和上确界 b_p.

b) 由于$(\forall p\in N)$，$X_{p+1}\subset X_p$，从而

$$a_p\leqslant a_{p+1}\leqslant b_{p+1}\leqslant b_p.$$

设以 b_0 为上界的增加序列(a_p)是收敛的，其极限设为 l. 同样

以 a_0 为下界的减少序列(b_p)是收敛的，其极限设为 l'，$l\leqslant l'$.

c) 假若 $l<l'$. 我们取 $\varepsilon<\frac{l'-l}{3}$. 由假设$(x_n)$是哥西序列，故

$$(\exists n_0\in\boldsymbol{N}),(\forall(p,q)\in\boldsymbol{N}^2):n_0<p<q\Longrightarrow|x_p-x_q|<\varepsilon.$$

选择 $r>n_0$ 使

$$a_r\leqslant l\Longrightarrow(\exists p\in\boldsymbol{N}):p\geqslant r \text{ 且 } x_p<a_r+\varepsilon;$$

$$b_r\geqslant l'\Longrightarrow(\exists q\in\boldsymbol{N}):q\geqslant r \text{ 且 } x_q>b_r-\varepsilon.$$

由这两个不等式得

$$|x_p-x_q|>b_r-\varepsilon-(a_r+\varepsilon)\geqslant l'-l-2\varepsilon>\varepsilon.$$

这是一个矛盾，因此 $l=l'$，即序列(a_p)和(b_p)有相同的极限. 由此

$$(\forall\varepsilon\in\boldsymbol{R}_+^*),(\exists n_0\in\boldsymbol{N}),(\forall p):p>n_0\Longrightarrow l-\varepsilon<a_p<b_p<l+\varepsilon.$$

从而

$$X_p\subset]l-\varepsilon,l+\varepsilon[^{*)},$$

即

$$(\forall n):n>n_0\Longrightarrow l-\varepsilon<x_n<l+\varepsilon,$$

故

$$l=\lim(x_n).$$

既然每一哥西序列都收敛，故域是完备的.

7. 证明两个完备的阿基米德域 K' 和K'' 必同构. 为此若用e' 和 e'' 分别表示它们的单位元，我们将证明

a) 若$x'\in K'$ 是有理元序列(x'_n) $(x'_n=r_ne')$的极限，则序列$(x''_n)=(r_ne'')$是哥西序列，从而在 K'' 中收敛.

b) 由 $x'\longmapsto x''=\lim(x''_n)$所定义的映射是$K'$ 到 K'' 上的一个同构.

---

*) 在本书中，$]a,b[$表示满足 $a<x<b$ 的所有 x 的全体，也就是我们通常说的开区间(a,b)——译者.

a) K' 和 K'' 中的有理子域 Q' 和 Q'' 都同构于Q, 因此它们彼此同构. 每一元 $x'\in K'$ 是 Q' 中一个序列(x'_n) 的极限(§ I 中的题 1 和 2), $x'_n=r_n e'$.

设 $\varepsilon''\in K''^{*}_{+}$, 于是存在 $\varepsilon''_1\in Q''^{*}_{+}$ 使 $0<\varepsilon''_1<\varepsilon''$. 记

$$\varepsilon'_1=\varphi^{-1}(\varepsilon''_1)\in Q'^{*}_{+},$$

其中 φ 是 Q' 到 Q'' 上的同构 $re'\longmapsto re''$. 由于序列(x'_n)收敛, 故

$$(\exists n_0\in N),(\forall(p,q)\in N^2):n_0<p<q\Longrightarrow|x'_p-x'_q|<\varepsilon'_1.$$

但 φ 使不等式保持不变, 所以

$$(\forall(p,q)\in N^2):n_0<p<q\Longrightarrow|x''_p-x''_q|<\varepsilon''_1<\varepsilon''.$$

这样(x''_n)是哥西序列, 从而在 K'' 中收敛.

b) 用同样方法可以证明, 若 Q' 中的序列(x'_n) 收敛于 0, 则 Q'' 中的序列$(\varphi(x'_n))$也收敛于 0.

若(y'_n)是另一收敛于 x' 的序列, 则序列$(x'_n-y'_n)$收敛于 0, 从而序列

$$(x''_n-y''_n)=(\varphi(x'_n-y'_n))$$

也收敛于 0. 于是

$$\lim(x''_n)=\lim(y''_n).$$

这极限仅依赖于 x'. 因此我们可用 $\widetilde{\varphi}(x')=\lim(\varphi(x'_n))$来定义 φ 在K' 上的一个延拓 $\widetilde{\varphi}$.

映射 $\widetilde{\varphi}$ 是一一对应的, 故和上面一样 $\widetilde{\varphi}^{-1}$ 也是 φ^{-1} 的一个延拓. $\widetilde{\varphi}$ 是一个同构, 这是因为如果 $x'=\lim(x'_n)$, $y'=\lim(y'_n)$, 则

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}(x'+y')&=\lim\varphi(x'_n+y'_n)=\lim[\varphi(x'_n)+\varphi(y'_n)]\\&=\widetilde{\varphi}(x')+\widetilde{\varphi}(y'),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}(x'y')&=\lim\varphi(x'_ny'_n)=\lim[\varphi(x'_n)\times\varphi(y'_n)]\\&=\widetilde{\varphi}(x')\times\widetilde{\varphi}(y').\end{aligned}$$

$\boldsymbol{R}$ 上的拓扑

Ⅲ. 开集，邻域

我们称开区间的并为开集. 开集满足

a) 任意一族开集的并是开集；

b) 任意有限个开集的交是开集；

c) $\varnothing$ 和 $\boldsymbol{R}$ 是开集.

我们称开集的补集为闭集. 闭集满足

a) 任意一族闭集的交是闭集；

b) 任意有限个闭集的并是闭集；

c) $\varnothing$ 和 $\boldsymbol{R}$ 是闭集.

一个子集称为 $a\in\boldsymbol{R}$ 的邻域，若这个子集包含一个含 a 的开集. a 的邻域全体记为 $V(a)$. 开集是其每一点的邻域.

$\boldsymbol{Q}$ 是可数的. 而 $\boldsymbol{R}$ 中不退化为一个点的区间(特别是 $\boldsymbol{R}$) 是不可数的.

1. 设 A 和 B 是 $\boldsymbol{R}$ 中两个非空子集. 证明若 A 是开集，则 $A+B$ 也是开集.

设 $a+b\in A+B$. 于是有 a 的包含在 A(开集)中的邻域$]a-\eta, a+\eta[$. 因而$]a+b-\eta, a+b+\eta[$就包含于 $A+B$ 中. 既然 $A+B$是其每一点的邻域，故它是开集. 还可以这样看: $A+\{b\}$是由开集 A 经过平移而得到的，所以它是一个开集，从而 $A+B=\bigcup\limits_{b\in B}(A+\{b\})$ 作为开集的并是一个开集.

2. 设$(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 中一族非空开区间，满足 $\alpha\neq\beta\Longrightarrow I_\alpha\cap I_\beta=\varnothing$. 证明 A 是可数的.

由于 $\boldsymbol{Q}$ 在 $\boldsymbol{R}$ 中稠，故对每一个 $\alpha\in A$, $\boldsymbol{Q}\cap I_\alpha$ 是非空的. 设 r_α 是它的一个点. 现在

$$\alpha\neq\beta\Longrightarrow r_\alpha\neq r_\beta(\text{因为 } I_\alpha\cap I_\beta=\varnothing),$$

因此 $\alpha\longmapsto r_\alpha$ 是 A 到 $\boldsymbol{Q}$ 中的一个单射. 既然 A 和 $\boldsymbol{Q}$ 的一个子集

一一对应，故 A 是可数的.

3. 设 O 是 $\boldsymbol{R}$ 中的一个开集，$a\in O$. 研究 $A=\{x\in\boldsymbol{R}\mid x\in \complement O$*)，$x>a\}$，$B=\{x\in\boldsymbol{R}\mid x\in\complement O, x<a\}$. 证明存在一个极大区间 $]\lambda, \mu[\subset O$，使 $a\in]\lambda, \mu[$. 由此导出 O 是可数个开区间的并.

若 A 为空，则 $[a, +\infty[\subset O$. 若 A 非空，则它有下界，因此有下确界 μ. $\mu\notin O$，因为不然就有 $]\mu-\eta, \mu+\eta[\subset O$，这样 μ 就不成其为 A 的下确界了. 由此 $[a, \mu[\subset O$. 当研究 $\sup B$ 时，我们同样可得到一个点 $\lambda\notin O$ 使 $]\lambda, a]\subset O$. 于是由构造知 $]\lambda, \mu[$ 是满足下述条件的极大区间

$$a\in]\lambda, \mu[\,,\ ]\lambda, \mu[\subset O.$$

两个不同的这样的区间必不相交. 事实上若

$$]\lambda, \mu[\cap]\lambda', \mu'[\neq\varnothing,$$

不妨设 $\mu<\mu'$，于是 $\mu\in]\lambda', \mu'[$，从而 $\mu\in O$. 这是矛盾的. 换言之，若用 I_a 表示由 a 出发用上法得到的区间，而 a 和 b 是 O 中两个点，则

$$\text{或者 } I_a=I_b \qquad \text{或者 } I_a\cap I_b=\varnothing.$$

这样 O 就是满足上题要求的那些区间的并. 而这个区间族是可数的.

4. 证明不能把 $[0,1]\subset\boldsymbol{R}$ 表示成可数无穷个两两不相交的非空闭集的并. 在推理中用反证法，即假设 $[0,1]=\bigcup_n F_n$，其中当 $p\neq q$ 时 $F_p\cap F_q=\varnothing$. 然后逐次研究某些 F_n 的上确界和下确界. 这样将得到一个缩减的区间序列，这些区间的交将不属于任何 F_n.

不妨设 $1\notin F_0$（不然的话，只需对 F_n 重新编号即可）并设 $a_0=\sup F_0$（由 F_0 是闭的知道 $a_0\in F_0$）. 设 q_0 是使下式成立的最小正

*) 本书中集 A 的补集用 $\complement A$ 表示.

整数

$$[a_0, 1] \cap F_{q_0} \neq \varnothing.$$

记

$$b_0 = \inf([a_0, 1] \cap F_{q_0}),$$

则

$$a_0 \in F_0 \Longrightarrow a_0 \notin F_{q_0} \Longrightarrow a_0 < b_0.$$

令 $A_0 = [a_0, b_0]$, 于是

$$F_0 \cap A_0 = \{a_0\}, \quad F_{q_0} \cap A_0 = \{b_0\},$$

当 $0 < n < q_0$ 时

$$F_n \cap A_0 = \varnothing.$$

再设 $p_1 (> q_0)$ 是使下式成立的最小整数

$$A_0 \cap F_{p_1} \neq \varnothing,$$

并令 $a_1 = \sup(A_0 \cap F_{p_1})$, 再设 $q_1 (> p_1)$ 是使下式成立的最小整数

$$[a_1, b_0] \cap F_{q_1} \neq \varnothing,$$

并且令 $b_1 = \inf([a_1, b_0] \cap F_{q_1})$. 和前面一样我们可以证明 $a_1 < b_1$, 并且

$$A_1 = [a_1, b_1] \subset A_0.$$

此外

$$(\forall n): n < p_1 \Longrightarrow F_n \cap A_1 = \varnothing.$$

如此继续下去, 我们将得到一列缩减的非空区间 A_n, 其交至少包含一点 $\alpha \in [0, 1]$. 但由构造知 α 将不属于任何 F_n, 这是一个矛盾.

IV. $A \subset \boldsymbol{R}$ 的闭包, 内核, 聚点

$a \in \boldsymbol{R}$ 称为 $A \subset \boldsymbol{R}$ 的附着点, 若

$$\forall v \in V(a), \quad v \cap A \neq \varnothing.$$

闭包 $\bar{A}$ 即是附着点的全体, 它也是包含 A 的最小闭集. A 的内核 $\mathring{A}$ 是指包