線性代數

問題詳解

原著 Serge Lang
譯著 劉 建 勛

曉園出版社
世界圖書出版公司

内 容 简 介

本书是根据《线性代数》（第二版 Lang 著）而编成的习题详解。本书内容丰富、语言精练，是一本很好的自学教材。

线性代数问题详解

S.朗 原著

刘建勋 译著

晓 园 出 版 社 出版

世界图书出版公司北京分公司重印

（北京朝阳门内大街137号）

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1992年4月 重印 开本 850×1168 1/32

1992年4月第一次印刷 印张 9

印数：0,001—2,300

ISBN：7-5062-1160·2/O·18

定价：6.30元

前　　言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則澈底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與鋪路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精微的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

LANG線性代數問題詳解

（目　錄）

第一章
向　量

1.1　n維空間點之定義

依所給條件，求 $A+B$，$A-B$，$3A$，$-2B$

1. $A=(2,-1)$，$B=(-1,1)$

解：$A+B=(1,0)$，$A-B=(3,-2)$，$3A=(6,-3)$，$-2B=(2,-2)$

2. $A=(-1,3)$，$B=(0,4)$

解：$A+B=(-1,7)$，$A-B=(-1,-1)$，$3A=(-3,9)$，$-2B=(0,-8)$

3. $A=(2,-1,5)$，$B=(-1,1,1)$

解：$A+B=(1,0,6)$，$A-B=(3,-2,4)$，$3A=(6,-3,15)$，$-2B=(2,-2,-2)$

4. $A=(-1,-2,3)$，$B=(-1,3,-4)$

解：$A+B=(-2,1,-1)$，$A-B=(0,-5,7)$，$3A=(-3,-6,9)$，$-2B=(2,-6,8)$

5. $A=(\pi,3,-1)$，$B=(2\pi,-3,7)$

解：$A+B=(3\pi,0,6)$，$A-B=(-\pi,6,-8)$，$3A=(3\pi,9,-3)$，$-2B=(-4\pi,6,-14)$

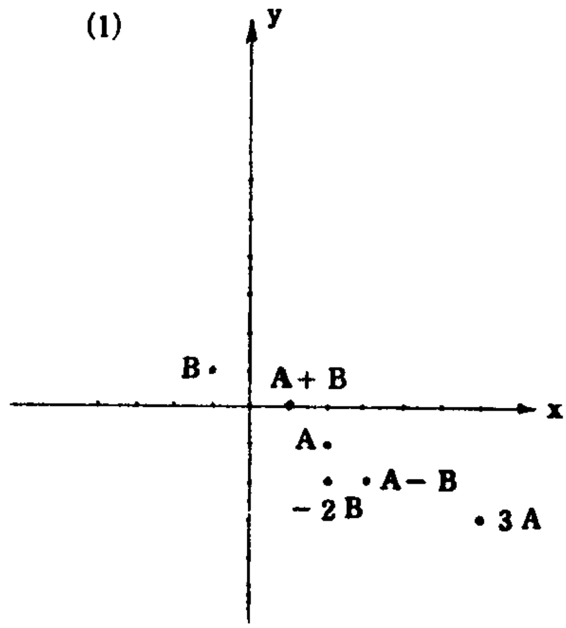
6. $A=(15,-2,4)$，$B=(\pi,3,-1)$

解：$A+B=(15+\pi,1,3)$，$A-B=(15-\pi,-5,5)$，$3A=(45,-6,12)$，$-2B=(-2\pi,-6,2)$

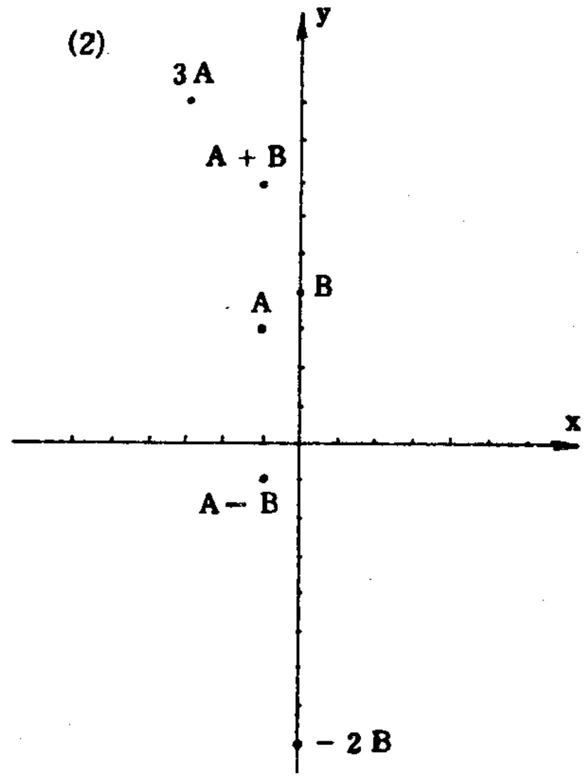
7. 畫出習題1～4之點於圖格紙上。

解：

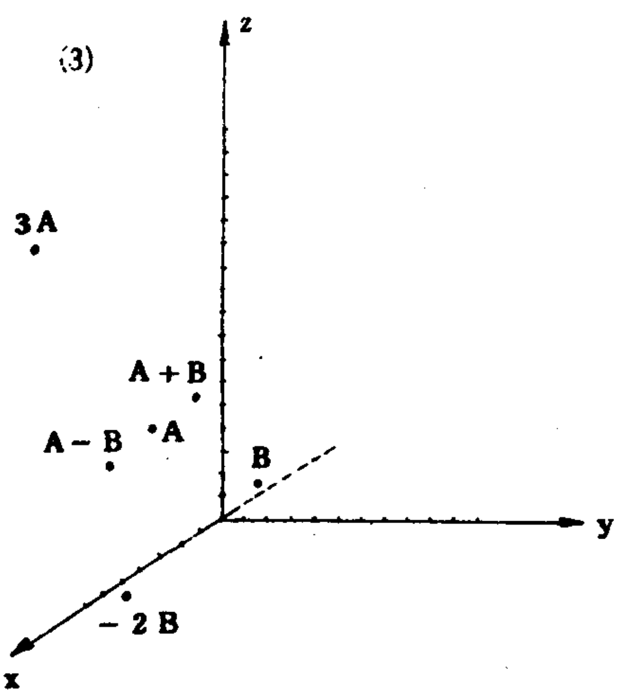
(1)


y
x
B
A+B
A
A−B
−2B
3A

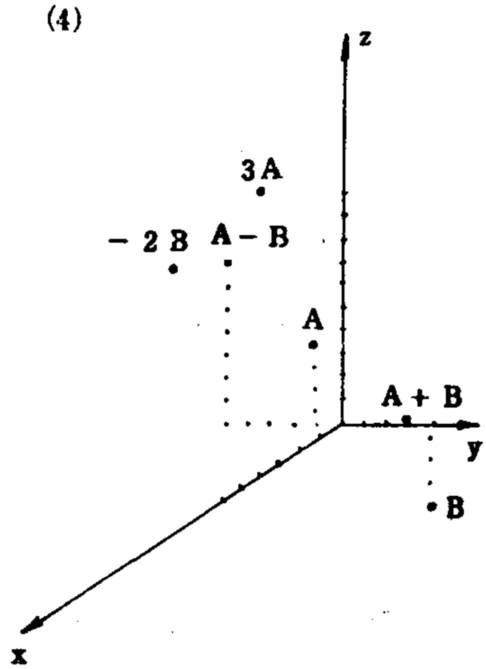
(2)


y
3A
A + B
B
A
x
A− B
− 2 B

(3)

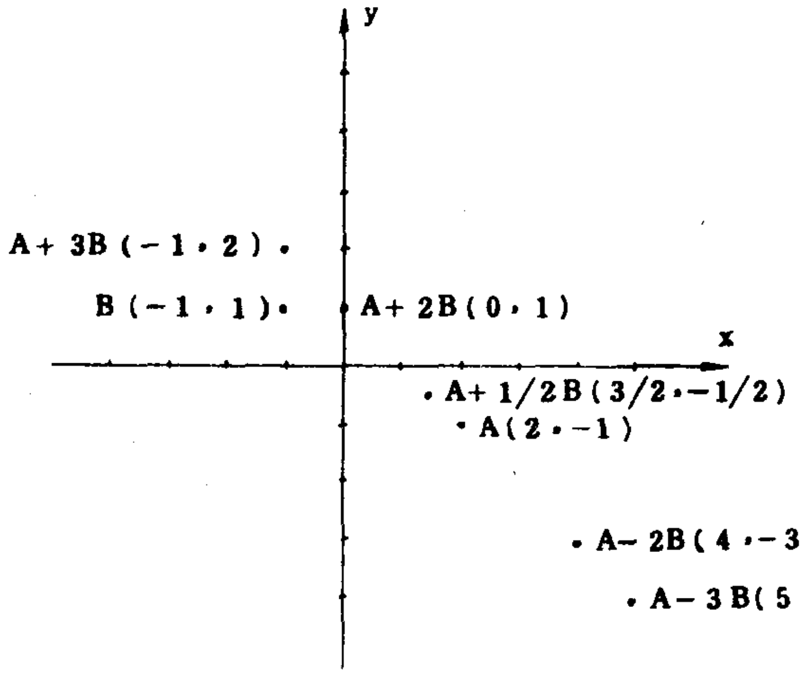

z
3A
A + B
A − B
A
B
y
− 2 B
x

(4)


z
3A
− 2 B
A − B
A
A + B
y
B
x

8. 令 A，B 如習題 1 所示，畫出 A + 2B，A + 3B，A − 2B，A − 3B，A + ½ B 於圖格紙上。

解：



1.2 位置向量

下列各題中，試求位置向量 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{PQ}$ 是否爲等價。

1. $P = (1, -1)$，$Q = (4, 3)$，$A = (-1, 5)$，$B = (5, 2)$

解：$\mathbf{Q} - \mathbf{P} = (3, 4)$

$\mathbf{B} - \mathbf{A} = (6, -3) \neq \mathbf{Q} - \mathbf{P}$

2. $P = (1, 4)$，$Q = (-3, 5)$，$A = (5, 7)$，$B = (1, 8)$

解：$\mathbf{Q} - \mathbf{P} = (-4, 1)$

$\mathbf{B} - \mathbf{A} = (-4, 1) = \mathbf{Q} - \mathbf{P}$

3. $P = (1, -1, 5)$　　$Q = (-2, 3, -4)$

$A = (3, 1, 1)$　　$B = (0, 5, 10)$

解：$\mathbf{Q} - \mathbf{P} = (-3, 4, -9)$

$\mathbf{B} - \mathbf{A} = (-3, 4, 9) \neq \mathbf{Q} - \mathbf{P}$

4. $P = (2, 3, -4)$　　$Q = (-1, 3, 5)$

$A = (-2, 3, -1)$　　$B = (-5, 3, 8)$

解：$\mathbf{Q} - \mathbf{P} = (-3, 0, 9)$

$\mathbf{B}-\mathbf{A}=(-3\,,\,0\,,\,9\,)=\mathbf{Q}-\mathbf{P}$

下列各題中，試求位置向量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{PQ}$是否爲平行。

5. $P=(\,1\,,-1\,)\,,\,Q=(\,4\,,\,3\,)\,,\,A=(\,-1\,,\,5\,)\,,\,B=(\,7\,,\,1\,)$

解：$\mathbf{Q}-\mathbf{P}=(\,3\,,\,4\,)$

$\mathbf{B}-\mathbf{A}=(\,8\,,-4\,)\neq c\,(\,\mathbf{Q}-\mathbf{P}\,)$ 不平行

6. $P=(\,1\,,\,4\,)\,,\,Q=(\,-3\,,\,5\,)\,,\,A=(\,5\,,\,7\,)\,,\,B=(\,9\,,\,6\,)$

解：$\mathbf{Q}-\mathbf{P}=(\,-4\,,\,1\,)$

$\mathbf{B}-\mathbf{A}=(\,4\,,-1\,)=-(\,\mathbf{Q}-\mathbf{P}\,)$ 平行

7. $P=(\,1\,,-1\,,\,5\,)$ $Q=(\,-2\,,\,3\,,-4\,)$

$A=(\,3\,,\,1\,,\,1\,)$ $B=(\,-3\,,\,9\,,-17\,)$

解：$\mathbf{Q}-\mathbf{P}=(\,-3\,,\,4\,,-9\,)$

$\mathbf{B}-\mathbf{A}=(\,-6\,,\,8\,,-18\,)=2\,(\,\mathbf{Q}-\mathbf{P}\,)$ 平行

8. $P=(\,2\,,\,3\,,-4\,)$ $Q=(\,-1\,,\,3\,,\,5\,)$

$A=(\,-2\,,\,3\,,-1\,)$ $B=(\,-1\,,\,3\,,-28\,)$

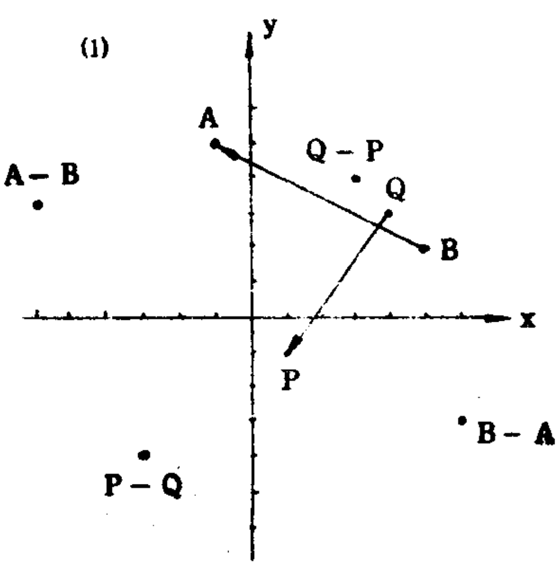
解：$\mathbf{Q}-\mathbf{P}=(\,-3\,,\,0\,,\,9\,)$

$\mathbf{B}-\mathbf{A}=(\,1\,,\,0\,,-27\,)\neq c\,(\,\mathbf{Q}-\mathbf{P}\,)$ 不平行

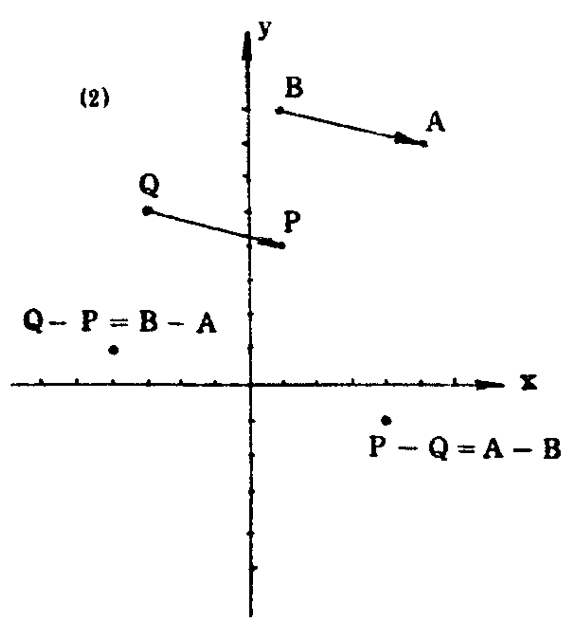
9. 把習題1. 2. 5.及6.描繪在圖表紙上並繪出位置向量$\overrightarrow{QP}$和$\overrightarrow{BA}$及點$\mathbf{Q}-\mathbf{P}$，$\mathbf{B}-\mathbf{A}$，$\mathbf{P}-\mathbf{Q}$和$\mathbf{A}-\mathbf{B}$。

解：

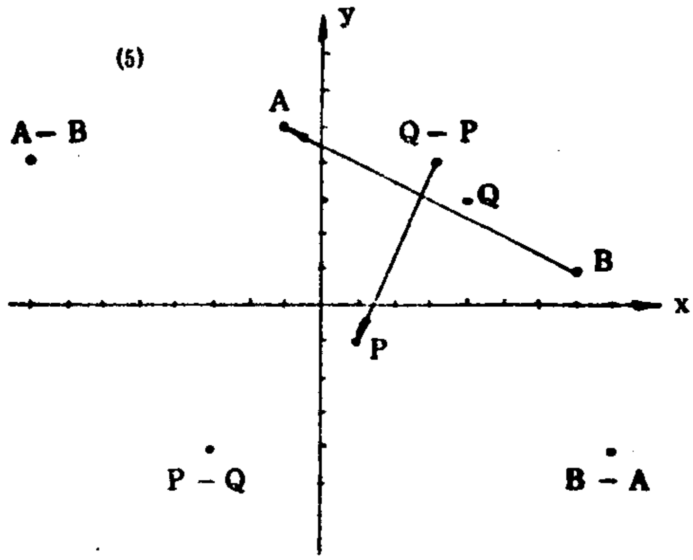
(1)



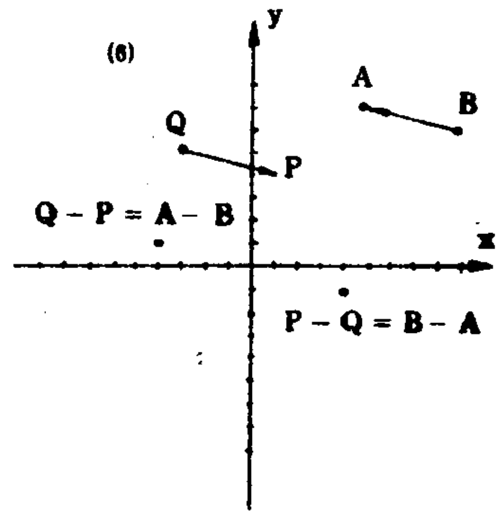
(2)



(5)



(6)



1·3 純量積

1 求第一節習題 1 到 6 的每一個 n 維向量的 A · A 。

解：(1)$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=2^2+(-1)^2=5$ (2)$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=(-1)^2+3^2=10$

(3)$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=2^2+(-1)^2+5^2=30$ (4)$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=(-1)^2+(-2)^2+3^2=14$

(5)$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=\pi^2+3^2+(-1)^2=\pi^2+10$

(6)$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=15^2+(-2)^2+4^2=245$

2 求第一節習題 1 到 6 的每一個 n 維向量的 A · B 。

解：$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=(-2)+(-1)=-3$ (2)$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=12$

(3)$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=(-2)+(-1)+5=2$ (4)$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=1+(-6)+(-12)=-17$

(5)$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=2\pi^2+(-9)+(-7)=2\pi^2-16$

(6)$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=15\pi+(-6)+(-4)=15\pi-10$

3 僅利用純量乘積的四個性質證明

$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2=\mathbf{A}^2+2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{B}^2$，$(\mathbf{A}-\mathbf{B})^2=\mathbf{A}^2-2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{B}^2$

解：$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2=(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})$

$=(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{A}+(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{B}$ ($SP2$)

$=\mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ ($SP1$)

$=\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}$ ($SP2$)

$=\mathbf{A}^2+\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{B}^2$ ($SP1$)

$=\mathbf{A}^2+2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{B}^2$

$(\mathbf{A}-\mathbf{B})^2=[\mathbf{A}+(-\mathbf{B})]\cdot[\mathbf{A}+(-\mathbf{B})]$(和上導法同以 $-\mathbf{B}$ 代 $\mathbf{B}$

$$= \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A}\cdot(-\mathbf{B}) + (-\mathbf{B})\cdot(-\mathbf{B})$$
$$= \mathbf{A}^2 + 2(-1)(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) + (-1)[\mathbf{B}\cdot(-\mathbf{B})] \quad (SP3)$$
$$= \mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} - (-1)(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}) \quad (SP3)$$
$$= \mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{B}^2$$

4. 下列每對向量是否垂直？

(a) $(1, -1, 1)$ 及 $(2, 1, 5)$

(b) $(1, -1, 1)$ 及 $(2, 3, 1)$

(c) $(-5, 2, 7)$ 及 $(3, -1, 2)$

(d) $(\pi, 2, 1)$ 及 $(2, -\pi, 0)$

解：(a) $(1, -1, 1)\cdot(2, 1, 5) = 2 - 1 + 5 = 6 \neq 0$ 不垂直

(b) $(1, -1, 1)\cdot(2, 3, 1) = 2 - 3 + 1 = 0$ 垂直

(c) $(-5, 2, 7)\cdot(3, -1, 2) = -15 - 2 + 14 = -3 \neq 0$ 不垂直

(d) $(\pi, 2, 1)\cdot(2, -\pi, 0) = 2\pi - 2\pi + 0 = 0$ 垂直

5. 考慮〔1，－1〕間的連續函數。任二函數 f，g 定義純量乘積爲 $\int_{-1}^{+1} f(x)g(x)\,dx$ 以 $\langle f, g\rangle$ 表之，證明此滿足純量乘積的四個性質，換言之，要證明：

$sp\,1$ $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$

$sp\,2$ $\langle f, g+h\rangle = \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle$

$sp\,3$ $\langle cf, g\rangle = c\langle f, g\rangle$

$sp\,4$ 如 $f = 0$ 則 $\langle f, f\rangle = 0$，$f \neq 0$ 則 $\langle f, f\rangle > 0$。

解：

$sp\,1$ $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx = \int_{-1}^{1} g(x)f(x)\,dx = \langle g, f\rangle$

$sp\,2$
$$\langle f, g+h\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)[g(x)+h(x)]\,dx$$
$$= \int_{-1}^{1} [f(x)g(x) + f(x)h(x)]\,dx$$
$$= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx + \int_{-1}^{1} f(x)h(x)\,dx$$
$$= \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle$$

$sp\,3$ $\langle cf, g\rangle = \int_{-1}^{1} cf(x)g(x)\,dx = c\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$

$$= c < f , g >$$

sp 4. $f = 0 , < f , f > = \int_{-1}^{1} f^2(x)dx = 0$

$f \neq 0 , < f , f > = \int_{-1}^{1} f^2(x)dx$ ，因 f 爲連續

$$\int_{-1}^{1} f^2(x)dx > 0$$

6. 如 $f(x) = x$ ，$g(x) = x^2$ ，求 $< f , f >$ ，$< g , g >$ 及 $< f , g >$ 。

解：$< f , f > = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{2}{3}$

$< g , g > = \int_{-1}^{1} x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5} \right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{2}{5}$

$< f , g > = \int_{-1}^{1} x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_{x=-1}^{x=1} = 0$

7. 考慮 $[-\pi , \pi]$ 間的連續函數，純量乘積的定義如習題 5 證明函數 $\sin nx$ ，$\cos mx$ 在此純量乘積的定義下爲正交（m ，n 爲整數）。

解：$< \sin nx , \cos mx > = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \ dx$

$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} [\sin (n+m) x - \sin (n-m) x] dx$

（ $n \neq m$ 時 ）

$= \frac{-1}{2} \left[\frac{1}{n-m} \cos (n-m) x + \frac{1}{n+m} \cos \right.$

$\left. (n+m) x \right]_{x=-\pi}^{x=\pi}$

$= 0$ （當 $n = m$ 時沒有 $\sin (n-m) x$ 項，純量積亦爲 0 ）

$n \neq m$ ，$< \sin nx , \sin mx > = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \ dx$

$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos (n-m) x - \cos (n+m$

$x] dx$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n-m}\sin(n-m)x-\frac{1}{n+m}\sin(n+m)x\right]_{x=-\pi}^{x=\pi}=0$$

同樣 $n \neq m$ $\langle \cos nx, \cos mx \rangle$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n-m}\sin(n-m)x+\frac{1}{n+m}\sin(n+m)x\right]_{x=-\pi}^{x=\pi}=0$$

8. 設 $\mathbf{A}$ 爲向量且垂直於每一向量 $\mathbf{X}$，則證明 $\mathbf{A}=\mathbf{0}$ 。

解：$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=0 \Rightarrow \mathbf{A}=\mathbf{0}$

1.4 向量之模

1. 求第一節習題 1 ～ 6 的向量 A 之長度。

解：(1) $\|\mathbf{A}\|=\sqrt{5}$ (2) $\|\mathbf{A}\|=\sqrt{10}$ (3) $\|\mathbf{A}\|=\sqrt{30}$ (4) $\|\mathbf{A}\|=\sqrt{14}$

(5) $\|\mathbf{A}\|=\sqrt{\pi^2+10}$ (6) $\|\mathbf{A}\|=\sqrt{245}=7\sqrt{5}$

2. 求第一節習題 1 ～ 6 的向量 B 之長度。

解：(1) $\|\mathbf{B}\|=\sqrt{2}$ (2) $\|\mathbf{B}\|=4$ (3) $\|\mathbf{B}\|=\sqrt{3}$ (4) $\|\mathbf{B}\|=\sqrt{26}$

(5) $\|\mathbf{B}\|=\sqrt{58+4\pi^2}$ (6) $\|\mathbf{B}\|=\sqrt{10+\pi^2}$

3. 求第一節習題 1 ～ 6 的 A 沿 B 的投影。

解：(1) $\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}}\mathbf{B}=-\frac{3}{2}(-1,1)=\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$

(2) $\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}}\mathbf{B}=\frac{12}{16}(0,4)=(0,3)$

(3) $\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}}\mathbf{B}=\frac{2}{3}(-1$, [illegible], $1)$

(4) $\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\vec{B}\cdot\mathbf{B}}\mathbf{B}=-\frac{17}{26}(-1,3,4)$

(5) $\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}}\mathbf{B}=\frac{2\pi^2-16}{58+4\pi^2}(2\pi,-3,7)=\frac{\pi^2-8}{29+2\pi^2}(2\pi,-3,7)$

(6) $\dfrac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}}\mathbf{B}=\dfrac{15\pi-10}{10+\pi^2}(\pi,3,-1)$

4. 求第一節習題 1 ~ 6 的 B 沿 A 的投影。

解：(1) $\dfrac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}}{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}\mathbf{A}=\dfrac{-3}{5}(2,-1)=\dfrac{3}{5}(-2,1)$

(2) $\dfrac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}}{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}\mathbf{A}=\dfrac{12}{10}(-1,3)=\dfrac{6}{5}(-1,3)$

(3) $\dfrac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}}{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}\mathbf{A}=\dfrac{2}{30}(2,-1,5)=\dfrac{1}{15}(2,-1,5)$

(4) $\dfrac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}}{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}\mathbf{A}=\dfrac{-17}{14}(-1,-2,3)=\dfrac{17}{14}(1,2,-3)$

(5) $\dfrac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}}{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}\mathbf{A}=\dfrac{2\pi^2-16}{10+\pi^2}(\pi,3,-1)$

(6) $\dfrac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}}{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}\mathbf{A}=\dfrac{15\pi-10}{245}(15,-2,4)=\dfrac{3\pi-2}{49}(15,-2,4)$

5. 在第三節習題 6，求 f 沿 g 和 g 沿 f 的投影，利用本節的投影定義（不要依照座標）。

解：$\langle f-cg,g\rangle=0 \Rightarrow \langle f,g\rangle-c\langle g,g\rangle=0$

因 $\langle f,g\rangle=0$，$\langle g,g\rangle\neq0 \Rightarrow c=0$

同樣 $\langle f,g-cf\rangle=0\Rightarrow c=0$，故 f 沿 g 和 g 沿 f 之投影均為 0

6. 求函數 $\sin 3x$ 和 $\cos x$ 的模關於在 $[-\pi,\pi]$ 中所給予的積分之純量乘積。

解：設 $f(x)=\sin 3x$，$g(x)=\cos x$

$$\|f\|^2=\langle\sin 3x,\sin 3x\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 3x\,dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 6x}{2}dx=\pi \qquad \|f\|=\sqrt{\pi}$$

$$\|g\|^2=\langle\cos x,\cos x\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\,dx=\pi$$

$$\|g\|=\sqrt{\pi}$$

7. 求常數函數 1 在 $[-\pi,\pi]$ 的模長。

解：設 $f(x)=1$，$<f, f>=\int_{-\pi}^{\pi} dx=2\pi$

$\|f\|=\sqrt{2\pi}$

8. 求常數函數 1 在〔-1，1〕的模長。

解：設 $f(x)=1$

$<f, f>=\int_{-1}^{1} dx=2$

$\|f\|=\sqrt{2}$

9. 設 A_1，A_2，……，A_r 不爲零向量，且兩兩互相垂直，換句話說，當 $i \neq j$ 時，$A_i \cdot A_j=0$，設 c_1，c_2，……，c_r 爲 r 個數，使 $c_1A_1+\cdots\cdots+c_rA_r=0$，證明所有的 $c_i=0$。

解：$(c_1A_1+\cdots\cdots+c_rA_r)\cdot A_i=0$，$1 \leq i \leq r$

$\Rightarrow c_i\|A_i\|^2=0 \quad \Rightarrow c_i=0$

10. 設 A，B 爲 n 維空間中不爲零向量之兩向量，θ 爲 A 與 B 之夾角，若 $\cos\theta=1$，證明 A，B 爲同方向，如 $\cos\theta=-1$，證明 A，B 爲反方向〔提示：如 c 爲 A 沿 B 之分量，證明 $(A-cB)^2=0$〕。

解：設 cB 爲 A 在 B 上之投影

$\cos\theta=\pm 1$ 時，$\|A\|\|B\|=\pm A\cdot B$，$c=\dfrac{A\cdot B}{B\cdot B}=\dfrac{\pm\|A\|\|B\|}{\|B\|\|B\|}$

$(A-cB)\cdot(A-cB)$

$=A\cdot A-2cA\cdot B+c^2B\cdot B$

$=A\cdot A-2\dfrac{(A\cdot B)^2}{B\cdot B}+\dfrac{\|A\|^2\|B\|^2}{B\cdot B}$

$=\|A\|^2-\|A\|^2=0$，故 $A=cB$，$\cos\theta=1$ 時，$A\cdot B>0$，同向，

$\cos\theta=-1$ 時，$A\cdot B<0$，反向

11. A，B 爲 n 維空間之二向量，$d(A, B)$ 表 A，B 之距離，即 $d(A, B)=\|B-A\|$，證明 $d(A, B)=d(B, A)$，而對任意三向量 A，B，C 則有 $d(A, B)\leq d(A, C)+d(B, C)$。

解：$d(A, B)=\|B-A\|=\sqrt{(B-A)\cdot(B-A)}$

$=\sqrt{\|B\|^2+\|A\|^2-2A\cdot B}$

$d(B, A)=\|A-B\|=\sqrt{(A-B)\cdot(A-B)}=d(A, B)$

由三角不等式

$\|\mathbf{B}-\mathbf{A}\| \leqq \|\mathbf{B}-\mathbf{C}\| + \|\mathbf{C}-\mathbf{A}\|$

$\Rightarrow d(\mathbf{A},\mathbf{B}) \leqq d(\mathbf{A},\mathbf{C}) + d(\mathbf{B},\mathbf{C})$

12. 對 n 維空間之任意兩向量 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，證明下列之關係

(a) $\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\|^2 + \|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|^2 = 2\|\mathbf{A}\|^2 + 2\|\mathbf{B}\|^2$

(b) $\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\|^2 = \|\mathbf{A}\|^2 + \|\mathbf{B}\|^2 + 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$

(c) $\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\|^2 - \|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|^2 = 4\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$

其中(a)稱爲平行四邊形定理（parallelogram law）。

解：(a) $\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\|^2 + \|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|^2$

$= \|\mathbf{A}\|^2 + 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \|\mathbf{B}\|^2 + \|\mathbf{A}\|^2 - 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \|\mathbf{B}\|^2$

$= 2\|\mathbf{A}\|^2 + 2\|\mathbf{B}\|^2$

(b) $\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\|^2$

$= (\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})$

$= \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}$

$= \|\mathbf{A}\|^2 + \|\mathbf{B}\|^2 + 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$

(c) $\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\|^2 - \|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|^2$

$= (\|\mathbf{A}\|^2 + 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \|\mathbf{B}\|^2) - (\|\mathbf{A}\|^2 - 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \|\mathbf{B}\|^2)$

$= 4\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$

13. 計算各所給三頂點構成的三角形中各角的餘弦值。

(a) $(2,-1,1)$，$(1,-3,-5)$，$(3,-4,-4)$

(b) $(3,1,1)$，$(-1,2,1)$，$(2,-2,5)$

解：(a) $A:(2,-1,1)$，$B:(1,-3,-5)$，$C:(3,-4,-\ )$

$\angle CAB \quad \cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AC}\|\|\overrightarrow{AB}\|} = \dfrac{35}{\sqrt{35\cdot 41}}$

$\angle ABC \quad \cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\|\|\overrightarrow{BC}\|} = \dfrac{6}{\sqrt{41\cdot 6}}$

$\angle BCA \quad \cos\theta = 0$

(b) $A:(3,1,1)$，$B:(-1,2,1)$，$C:(2,-2,5)$

$\overrightarrow{AC} = (-1,-3,4)$，$\overrightarrow{AB} = (-4,1,0)$

$\overrightarrow{BC} = (3,-4,4)$

$\angle CAB \quad \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{26\cdot 17}}$

$\angle ABC \quad \cos\theta = \dfrac{16}{\sqrt{17\cdot 41}}$

$\angle BCA \quad \cos\theta = \dfrac{25}{\sqrt{41\cdot 26}}$

14. 設θ爲A，B之夾角，證明$\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|^2=\|\mathbf{A}\|^2+\|\mathbf{B}\|^2-2\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|\cos\theta$

解：$\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|^2=(\mathbf{A}-\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B})$

$=\|\mathbf{A}\|^2+\|\mathbf{B}\|^2-2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$

$=\|\mathbf{A}\|^2+\|\mathbf{B}\|^2-2\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|\cos\theta$

15. 設A，B，C是不爲零之三向量，如$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$，試舉例說明，並不一定要$\mathbf{B}=\mathbf{C}$。

解：$\mathbf{A}=(2,1)$，$\mathbf{B}=(1,2)$，$\mathbf{C}=(2,0)$

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=4=\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$　　只要$\mathbf{B}-\mathbf{C}\perp\mathbf{A}$皆滿足要求

16. 設A，B爲互相垂直且不爲零的向量，對任意數c，證明$\|\mathbf{A}+c\mathbf{B}\|\geq\|\mathbf{A}\|$

解：$\|\mathbf{A}+c\mathbf{B}\|^2=(\mathbf{A}+c\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}+c\mathbf{B})$

$=\|\mathbf{A}\|^2+c^2\|\mathbf{B}\|^2\geq\|\mathbf{A}\|^2$

$\|\mathbf{A}+c\mathbf{B}\|\geq\|\mathbf{A}\|$

17. 假設向量A，B不爲零向量，若對所有的數c，恒有$\|\mathbf{A}+c\mathbf{B}\|\geq\|\mathbf{A}\|$，試證明A，B爲垂直〔提示：取$c$爲非常大之正數或負數〕。

解：若A不垂直於B，$c_1\mathbf{B}$爲A在B上之投影，$c_1\neq 0$

則$(\mathbf{A}-c_1\mathbf{B})\cdot\mathbf{B}=0$

$\|\mathbf{A}\|=\|\mathbf{A}-c_1\mathbf{B}+c_1\mathbf{B}\|$

$\|\mathbf{A}\|^2=\|\mathbf{A}-c_1\mathbf{B}\|^2+\|c_1\mathbf{B}\|^2$

$\|\mathbf{A}\|>\|\mathbf{A}-c_1\mathbf{B}\|$和已知矛盾

故$\mathbf{A}\perp\mathbf{B}$

18. 設$\mathbf{B}_1$，$\mathbf{B}_2$，……，$\mathbf{B}_m$爲n維空間中長度爲1的向量，且兩兩垂直即$\mathbf{B}_i\cdot\mathbf{B}_j=0$，當$i\neq j$，A爲$n$維空間之一向量$c_i$爲A沿$\mathbf{B}_i$之分量，$x_1$，$x_2$，………，$x_m$爲任意數，證明：

$\|\mathbf{A}-(c_1\mathbf{B}_1+\cdots\cdots+c_m\mathbf{B}_m)\|\leq\|\mathbf{A}-(x_1\mathbf{B}_1+\cdots\cdots+x_m\mathbf{B}_m)\|$

解：令$\mathbf{A}=\mathbf{A}_m+\sum\limits_{k=1}^{m}c_k\mathbf{B}_k$

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}_i = c_i$, $1 \le i \le m \Rightarrow \mathbf{A}_m\cdot\mathbf{B}_i + c_i = c_i$ $\quad \mathbf{A}_m \perp \mathbf{B}_i$

$\|\mathbf{A} - (c_1\mathbf{B}_1 + \cdots\cdots + c_m\mathbf{B}_m)\|^2 = \|\mathbf{A}_m\|^2$

$\|\mathbf{A} - (x_1\mathbf{B}_1 + \cdots\cdots + x_m\mathbf{B}_m)\|^2$

$= [\mathbf{A}_m + \sum_{i=1}^{m}(c_i - x_i)\mathbf{B}_m]\cdot[\mathbf{A}_m + \sum_{i=1}^{m}(c_i - x_i)\mathbf{B}_m]$

$= \|\mathbf{A}_m\|^2 + \sum_{i=1}^{m}(c_i - x_i)^2$

$\|\mathbf{A} - (c_1\mathbf{B}_1 + \cdots\cdots + c_m\mathbf{B}_m)\| \le \|\mathbf{A} - (x_1\mathbf{B}_1 + \cdots\cdots + x_m\mathbf{B}_m)\|$

1.5 線與面

求過下列各點的直線參數方程式。

1. (1, 1, −1), (−2, 1, 3)

解：取 $\mathbf{A} = (-2, 1, 3) - (1, 1, -1) = (-3, 0, 4)$

$\mathbf{X} = (1, 1, -1) + t(-3, 0, 4)$

2. (−1, 5, 2), (3, −4, 1)

解：取 $\mathbf{A} = (3, -4, 1) - (-1, 5, 2) = (4, -9, -1)$

$\mathbf{X} = (-1, 5, 2) + t(4, -9, -1)$

求過 P 而垂直於 $\mathbf{A}$ 之二維空間之直線方程式

3. $\mathbf{A} = (1, -1)$ $\quad P = (-5, 3)$

解：$(\mathbf{X} - \mathbf{P})\cdot\mathbf{A} = 0$

$\Rightarrow x - y + 8 = 0$

4. $\mathbf{A} = (-5, 4)$ $\quad P = (3, 2)$

解：$(\mathbf{X} - \mathbf{P})\cdot\mathbf{A} = 0$

$\Rightarrow 4y - 5x + 7 = 0$

5. 證明下列兩直線不互相垂直

$3x - 5y = 1$, $2x + 3y = 5$

解：$(3, -5)\cdot(2, 3) = -9 \ne 0$ 不垂直

6. 下列各對直線是否互相垂直？

(a) $3x - 5y = 1$ 和 $2x + y = 2$