数学分析选论

《数学分析选论》编写组

江苏教育出版社

内 容 提 要

本书是以二年制专科毕业为起点，参照部颁本科"数学分析"教学大纲而编写的。主要内容有：实数理论、极限与连续性续论、黎曼可积条件、数项级数与广义积分判别法的补充、函数列与函数项级数、富里哀级数收敛定理、隐函数理论、含参量积分、重积分的一般变换以及曲线积分与曲面积分等。本书的叙述深入浅出，通俗易懂；章前有已备知识的复习，章中对基本概念和定理的证法有较详尽的分析，章后还有小结，便于自学。

本书可作为数学专业本科函授教材，理工科其它专业的选修课教材，也可作为本科数学系学生的参考书和报考研究生的复习资料，可供中等~~学校从事微积分~~课教学的老师及其他自学者参考。

数学分析选论

《数学分析选论》编写组

出版：江苏教育出版社

发行：江苏省新华书店

印刷：丹阳人民印刷厂

开本 787×1092毫米 1/32 印张 17.375 字数 387,000

1988年8月第1版 1988年8月第1次印刷

印数 1—5,500 册

ISBN 7—5343—0467—9

G 418 定价：3.95 元

责任编辑 王建军

序

教材是课程之本。教材建设是高等学校的三项基本建设之一。

近年来，由于新科技革命浪潮的冲击，社会生活的变革，各级各类高等教育的发展，教学改革的不断深入，新兴和边缘学科的大量涌现，高等学校的教材建设面临着许多新的课题。

我们华东地区七所省(市)属师范大学，即(以笔划为序)山东师范大学、上海师范大学、江西师范大学、安徽师范大学、南京师范大学、浙江师范大学、福建师范大学，自1986年签约建立协作关系以来，将联合编写教材列为一项重要内容。我们相信，七校协作构成的编写合力必将形成一定的优势和特色。我们珍惜并注意充分发挥这些优势和特色，决定编撰这套"华东地区省(市)属师范大学协编教材"，以期提高高师教材的质量，为尽快形成具有中国特色的、适应我国社会主义现代化建设和高等教育事业发展的、反映现代文化科学技术先进水平的教材体系，贡献我们的力量。

我们努力以辩证唯物主义和历史唯物主义为指导，遵循理论与实际相结合的原则，贯彻国家教育领导部门关于教材要"观点正确稳妥，材料充实可靠，文字简明生动，观点与材料统一，理论与实际结合"，以及"打好基础，精选内容，逐步更新，利于教学"的要求，努力提高所编教材的科学性、先进性、启发性和适用性。我们在编写中力争博采众长，熔于一炉，锻铸个性，

显示风格。在编写中我们对教材的师范性尤为重视，力求使所编教材利于培养中等学校师资应有的思想业务素质和知识能力结构。这将是本套教材的显著特色之一。

由于我们水平有限，缺陷在所难免，恳望得到专家、同行的批评、指教。

编 者 的 话

本书是数学专业本科函授教材之一。

“数学分析”这门课，在专科阶段已经学过，但按本科部颁大纲的要求尚有一定的差距。我们开设“数学分析选论”的目的，就是要补足这段差距，让学生能完整地、牢固地掌握数学分析的内容和方法，为学习后继课程和加深理解初等数学打下坚实的基础。

本课的起点究竟放在何处？究竟应选哪些内容？这是一个颇费思索的问题。根据“以两年制专科毕业为起点，以部颁大纲为目标”的编写原则，并考虑到学生原有水平参差不齐，我们决定从较低的水准出发，略微多选一些内容，好让基础较差的学生能顺利地自学而无需另补读物，也好让各校教师有一个选择的余地。

凡部颁大纲中规定的而专科阶段没有学过或学得肤浅的内容，本教材均予详细论述，其中很多是理论性较强、比较难学的。望读者不畏困难，循序渐进，坚持学习到底，就能化难为易，也只有这样，才能真正提高数学素养。凡是部颁大纲中打“*”号的节目，本教材也打“*”号，作为选学内容。此外，在本教材中有七章还设置了第0节，扼要地罗列了学生已经具备的知识。对于第0节的内容，读者要认真学习，并能独立完成节后的习题，才算达到要求。

为了体现函授教学以自学为主的特点，本教材在写法上力求条理清晰、通俗易懂，对一些不易理解的概念（如一致连续、

一致收敛等），在引入时尽量说得详细点。对某些定理的证法或证前作点分析，或证后作点说明。在各有关概念之间的联系与区别上，也重笔予以描述。并且，各节除配有习题外，各章末还有小结和复习题，书后附习题提示与答案。

本课程可用一年教学时间来安排，面授总时数为110左右，各校可根据实际情况进行取舍。

本书由南京师大主编，江西师大、浙江师大、福建师大协编。其中第一、二章由姜进明执笔，第三、四章由赵霖执笔，第五、六章及附录Ⅱ由邬振安执笔，第七、八章由陈金林执笔，第九、十章由吴鸿儒执笔，第十一章及附录Ⅰ由邓声南执笔。全书由姜进明、赵霖统稿和定稿。

本书由陈怀惠教授主审，参加审稿工作的还有余祥明教授、胡光惠副教授。

由于编写时间仓促和水平有限，恳切希望读者对本书的缺点和错误提出宝贵意见。

《数学分析选论》编写组

1987年6月

目　录

第一章　数列极限(续)

第二章　函数极限与连续性(续)

第三章 黎曼可积条件

第四章 数项级数与广义积分(续)

第五章 函数列与函数项级数

第六章 富里哀级数

第七章 多元函数的极限与连续

第八章 多元函数微分法 隐函数定理

第九章 含参量积分

第十章 重积分的一般变换、广义重积分

第十一章 曲线积分、曲面积分、场论初步

第一章 数列极限(续)

数学分析研究的对象是实变量的函数，因此，实数理论是它的基础。

关于实数的定义和初等性质，读者已经熟知。但是，反映实数系有别于有理数系的一些更深刻的性质，大家却未必清楚，而这些性质对数学分析的理论起着奠基的作用。

本章，在回顾实数和数列极限的一些简单性质的基础上，证明实数系的六个基本定理，并说明它们的等价性。然后介绍数列的上极限和下极限的概念。

§1.0 已备知识

一、实数及其简单性质

定义1 每个无限十进小数称为一个实数，其中无限循环小数称**有理数**，无限不循环小数称**无理数**。

实数集记为$\boldsymbol{R}$，有理数集记为$\boldsymbol{Q}$，正整数集记为$\boldsymbol{N}$。

要注意以0为循环节与以9为循环节的无限小数。如$0.35\dot{0}$与$0.34\dot{9}$表示同一个有理数，即所谓有限小数0.35。

每个有理数都可表为分数形式$\frac{p}{q}$(p,q都是整数)。如果假定p与q既约，且q仅取正整数，则这种表示是唯一的。

性质1 实数集与有理数集一样是有序的。

性质2 实数集与有理数集一样对四则运算是封闭的。

性质 3 实数集与有理数集一样是稠密的.

事实上，任何两个实数之间既有有理数，也有无理数.

性质 4 实数集与有理数集一样，具有阿基米德（Archimedes）性. 即对任何两个正实数 a、b，必存在正整数 n，使得 $na>b$.

性质 5 实数与数轴上的点有一一对应关系. 因此，可把"数 a"和与之对应的"点 a"等同起来.

二、数列极限及其简单性质

定义 2 设$\{x_n\}$为一实数数列（简称数列 x_n），A 为一个实数，若对任给的 $\varepsilon>0$，总存在相应的正整数 N，使得当 $n>N$ 时，有$|x_n-A|<\varepsilon$，则称**数列 x_n 收敛于A**，或称**A为数列x_n 的极限**. 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \quad 或 \quad x_n\to A(n\to\infty).$$

对定义 2 进行否定，就可得到 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq A$ 的定义：

若存在某个 $\varepsilon_0>0$，对任意正整数 N，总有相应的正整数 $n_0>N$，使 $|x_{n_0}-A|\geq\varepsilon_0$，则称数列 x_n 不收敛于 A.

不收敛于任何数的数列，称为发散数列.

定义 3 若对任给的 $M>0$，总存在相应的正整数 N，使当 $n>N$ 时，有$|x_n|>M$，则称**数列 x_n 趋向于无穷大，或称数列 x_n 的极限为无穷大**. 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad 或 \quad x_n\to\infty(n\to\infty).$$

定义 4 若对任给的 $M>0$，总存在相应的正整数 N，使当 $n>N$ 时，有 $x_n>M$ （$x_n<-M$），则称**数列 x_n 趋向于正（负）无穷大，或称 x_n 的极限为正（负）无穷大**. 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \ (\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty).$$

必须指出，在通常意义下，所谓数列收敛是指它有有限的极限．趋向于无穷大的数列是发散数列。

性质 1（唯一性） 收敛数列的极限是唯一的。

性质 2（有界性） 收敛数列必有界。

性质 3（保号性） 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A>0(<0)$，则对任意的 $\alpha\in(0,A)(\alpha\in(A,0))$，必存在正整数 N，使当 $n>N$ 时，

$$x_n>\alpha \quad (x_n<\alpha)。$$

性质 4（单调性） 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，且当 $n\geqslant n_0$ 时，$x_n\leqslant y_n$， 则 $A\leqslant B$。

性质 5（迫敛性） 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$，且当 $n\geqslant n_0$ 时，$x_n\leqslant z_n\leqslant y_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$。

性质 6（四则运算法则） 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n) = A\pm B$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n) = A\cdot B$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n/y_n = A/B$ （若 $B\neq 0$）。

这也就是说，在数列 x_n 和 y_n 都收敛的前提下，有

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n\cdot\lim_{n\to\infty} y_n;$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n/y_n = \lim_{n\to\infty} x_n/\lim_{n\to\infty} y_n \quad (\text{若} \lim_{n\to\infty} y_n\neq 0)。$$

习　题 1.0

1．证明：1）有理数与无理数之和为无理数；

2）非零有理数与无理数之积为无理数。

2．设 $a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，利用几何平均≤算术平均，证明调和平均≤

几何平均，即

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

3. 证明：设 A、B 为两个定数，

1）若对任意的 $\varepsilon>0$，都有 $A\leqslant B+\varepsilon$，则 $A\leqslant B$。

2）若对任意的 $\varepsilon>0$，都有 $|A-B|\leqslant\varepsilon$，则 $A=B$。

4. 数列极限定义中的"任给的 $\varepsilon>0$"，能否改为"小于 1 的任意正数 ε"？能否改为"任给的正有理数 ε"？"当 $n>N$ 时，有 $|x_n-A|<\varepsilon$"与"第 N 项后面有无穷多项满足 $|x_n-A|<\varepsilon$"这两句话是否等价？

5. 按定义证明：

1）$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}=0$；　　　2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$；

3）数列 $x_n=(-1)^n\frac{n}{1+n}$ 发散。

6. 求下列极限：

1）$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$；

2）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}$　$(a\neq-1)$；

3）$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{a(a+d)}+\frac{1}{(a+d)(a+2d)}+\cdots+\frac{1}{[a+(n-1)d](a+nd)}\right]$；　$(a、d\neq0)$

4）$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right]$；

5）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}$；

6）$\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$　$(|x|<1)$

7. 1）若 $\{x_n+y_n\}$ 收敛，问 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 是否收敛？

2）若 $\{x_n+y_n\}$ 收敛，且 $\{x_n\}$ 收敛，问 $\{y_n\}$ 是否收敛？

3）若 $\{x_n\}$ 收敛，$\{y_n\}$ 发散，问 $\{x_n+y_n\}$ 是否必发散？

4）若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n y_n=0$，问是否必有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$？

8．证明：若 $\{x_n\}$ 有下界，$\{y_n\}$ 无上界，则 $\{x_n+y_n\}$ 无上界．

9．设 a_1，a_2，…，a_m 为 m 个正数，证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}.$$

10．证明：若 $\{a_n\}$ 为正数列，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=q<1$，且 $a_{n+1}\leqslant b_n a_n(n=1,2\cdots)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

11．设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$。

12．设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，证明

1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}=a$；

2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$。

13．设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$。

§1.1 实数系的一些基本定理

一、确界定理

大家知道，如果数集 S 有上界，就有无限多个上界．在 S 的一切上界中，最小的上界常常具有特殊的作用，我们把它叫做 S 的上确界。它的精确定义是

定义 1.1 设 S 为非空数集，若数 ξ 满足

1）对每个 $x\in S$，有 $x\leqslant\xi$（即 ξ 是 S 的上界），

2）对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $x_0\in S$，使得 $x_0>\xi-\varepsilon$（即比 ξ 小