

数学分析选论

《数学分析选论》编写组

江苏教育出版社

内 容 提 要

本书是以二年制专科毕业为起点，参照部颁本科“数学分析”教学大纲而编写的。主要内容有：实数理论、极限与连续性理论、黎曼可积条件、数项级数与广义积分判别法的补充、函数列与函数项级数、富里哀级数收敛定理、隐函数理论、含参量积分、重积分的一般变换以及曲线积分与曲面积分等。本书的叙述深入浅出，通俗易懂；章前有已备知识的复习，章中对基本概念和定理的证法有较详尽的分析，章后还有小结，便于自学。

本书可作为数学专业本科函授教材，理工科其它专业的选修课教材，也可作为本科数学系学生的参考书和报考研究生的复习资料，可供中等学校从事微积分课教学的老师及其他自学者参考。

数学分析选论

《数学分析选论》编写组

出版：江苏教育出版社

发行：江苏省新华书店

印刷：丹阳人民印刷厂

开本 787×1092毫米 1/32 印张 17.375 字数 387,000

1988年8月第1版 1988年8月第1次印刷

印数 1—5,500册

ISBN 7—5343—0467—9

G·418

定价：3.95元

责任编辑 王建军

2011/5/11/序

教材是课程之本。教材建设是高等学校的三项基本建设之

近年来，由于新科技革命浪潮的冲击，社会生活的变革，各级各类高等教育的发展，教学改革的不深入，新兴和边缘学科的大量涌现，高等学校的教材建设面临着许多新的课题。

我们华东地区七所省(市)属师范大学，即(以笔划为序)山东师范大学、上海师范大学、江西师范大学、安徽师范大学、南京师范大学、浙江师范大学、福建师范大学，自1986年签约建立协作关系以来，将联合编写教材列为一项重要内容。我们相信，七校协作构成的编写合力必将形成一定的优势和特色。我们珍惜并注意充分发挥这些优势和特色，决定编撰这套“华东地区省(市)属师范大学协编教材”，以期提高高师教材的质量，为尽快形成具有中国特色的、适应我国社会主义现代化建设和高等教育事业发展的、反映现代文化科学技术先进水平的教材体系，贡献我们的力量。

我们努力以辩证唯物主义和历史唯物主义为指导，遵循理论与实践相结合的原则，贯彻国家教育领导部门关于教材要“观点正确稳妥，材料充实可靠，文字简明生动，观点与材料统一，理论与实践结合”，以及“打好基础，精选内容，逐步更新，利于教学”的要求，努力提高所编教材的科学性、先进性、启发性和适用性。我们在编写中力争博采众长，熔于一炉，锻铸个性，

显示风格。在编写中我们对教材的师范性尤为重视，力求使所编教材利于培养中等学校师资应有的思想业务素质 and 知识能力结构。这将是本套教材的显著特色之一。

由于我们水平有限，缺陷在所难免，愿望得到专家、同行的批评、指教。

编 者 的 话

本书是数学专业本科函授教材之一。

“数学分析”这门课，在专科阶段已经学过，但按本科部颁大纲的要求尚有一定的差距。我们开设“数学分析选论”的目的，就是要补足这段差距，让学生能完整地、牢固地掌握数学分析的内容和方法，为学习后继课程和加深理解初等数学打下坚实的基础。

本课的起点究竟放在何处？究竟应选哪些内容？这是一个颇费思索的问题。根据“以两年制专科毕业为起点，以部颁大纲为目标”的编写原则，并考虑到学生原有水平参差不齐，我们决定从较低的水准出发，略微多选一些内容，好让基础较差的学生能顺利地自学而无需另补读物，也好让各校教师有一个选择的余地。

凡部颁大纲中规定的而专科阶段没有学过或学得最浅的内容，本教材均予以详细论述，其中很多是理论性较强、比较难学的。望读者不畏困难，循序渐进，坚持学习到底，就能化难为易，也只有这样，才能真正提高数学素养。凡是部颁大纲中打“*”号的节目，本教材也打“*”号，作为选学内容。此外，在本教材中有七章还设置了第0节，扼要地罗列了学生已经具备的知识。对于第0节的内容，读者要认真学习，并能独立完成节后习题，才算达到要求。

为了体现函授教学以自学为主的特点，本教材在写法上力求条理清晰、通俗易懂，对一些不易理解的概念（如一致连续、

一致收敛等), 在引入时尽量说得详细点。对某些定理的证法或证前作点分析, 或证后作点说明。在各有关概念之间的联系与区别上, 也重笔予以描述。并且, 各节除配有习题外, 各章末还有小结和复习题, 书后附习题提示与答案。

本课程可用一年教学时间来安排, 面授总时数为110左右, 各校可根据实际情况进行取舍。

本书由南京师大主编, 江西师大、浙江师大、福建师大协编。其中第一、二章由姜进明执笔, 第三、四章由赵霖执笔, 第五、六章及附录Ⅱ由邱振安执笔, 第七、八章由陈金林执笔, 第九、十章由吴鸿儒执笔, 第十一章及附录Ⅰ由邓声南执笔。全书由姜进明、赵霖统稿和定稿。

本书由陈怀惠教授主审, 参加审稿工作的还有余祥明教授、胡光惠副教授。

由于编写时间仓促和水平有限, 恳切希望读者对本书的缺点和错误提出宝贵意见。

《数学分析选论》编写组

1987年6月

目 录

第一章 数列极限(续)

§ 1.0 已备知识	1	七、实数系基本定理的等价性	33
一、实数及其简单性质	1	* § 1.2 上极限与下极限	38
二、数列极限及其简单性质	2	一、数列的极限点	28
§ 1.1 实数系的一些基本定理	5	二、有界数列的上、下极限	29
一、确界定理	5	三、无界数列的上、下极限	32
二、单调有界定理	9	本章小结	36
三、区间套定理	12	复习题一	38
四、有限覆盖定理	13		
五、聚点定理	16		
六、柯西收敛准则	20		

第二章 函数极限与连续性(续)

§ 2.0 已备知识	40	一、归结原理(海涅定理)	47
一、函数极限的定义	40	二、柯西准则	51
二、函数极限的性质	41	三、函数极限的单调有界定理	53
三、有界量、无穷小量与 无穷大量	42	四、复合函数的极限	54
四、函数连续性的定义和 性质	44	§ 2.2 闭区间上连续函数的性质	58
§ 2.1 函数极限的存在条件	47	一、有界性定理	58
		二、最大(小)值定理	58

三、介值性定理.....60	二、实指数 a^x 的性质.....75
四、一致连续性定理.....62	三、指数函数连续性的证明.....76
§2.3 实指数幂及指数函数的 连续性.....72	本章小结78
一、实指数 a^x 的定义.....72	复习题二81

第三章 黎曼可积条件

§3.1 黎曼积分概念84	一、几类可积函数103
§3.2 可积条件88	二、定积分与不定积分的区别 与联系107
一、可积的必要条件.....89	§3.4 推广的定积分计算公式
二、达布上和与下和.....91	本章小结115
三、可积的充要条件.....98	复习题三117
§3.3 可积函数类.....103	

第四章 数项级数与广义积分(续)

§4.0 已备知识118	* §4.1 数项级数敛散性判别法 补充132
一、级数的敛散性及基本性质118	一、正项级数的敛散性判别法132
二、正项级数敛散性的一些基 本判别法.....120	二、一般项级数收敛性判别法139
三、一般项级数绝对收敛条 件收敛和莱布尼兹判别法125	§4.2 绝对收敛和条件收敛 级数的性质146
四、无穷级数广义积分及敛散性 的比较判别法和柯西判别法126	一、级数的正部与负部146
五、级数收敛及敛散性的比较判 别法和柯西判别法.....128	二、级数的重排148
	三、级数的乘法156
	* §4.3 广义积分收敛性判别

法补充	162
一、无穷限广义积分收敛性判 别法	162
二、取积分收敛性判别法	172

三、无穷限广义积分与瑕积分、 无穷级数的联系	175
本章小结	180
复习题四	183

第五章 函数列与函数项级数

§5.1 函数列及其一致收敛性	185
一、函数列的概念	185
二、函数列的一致收敛性	190
§5.2 函数项级数及其一致 收敛性	198
一、函数项级数的概念	198
二、函数项级数的一致收敛性	200
三、函数项级数一致收敛的 判别法	202
四、幂级数的收敛半径、收敛	

域以及一致收敛区间	207
§5.3 一致收敛函数列(函数项 级数)的极限函数(和函 数)的性质	213
一、函数列的极限函数的性质	213
二、函数项级数的和函数的 性质	219
三、幂级数的和函数的性质	223
本章小结	229
复习题五	231

第六章 富里哀级数

§6.0 已备知识	234
一、三角函数系的正交性	234
二、三角级数的性质	235
三、富里哀系数与富里哀级数	236
四、奇函数与偶函数的富里哀	

级数	238
五、以 2π 为周期的函数的富里 哀级数	239
§6.1 富里哀数的收敛定理	241
一、按段连续和按段光滑函数	

.....	241
二、富里哀系数的性质	245
三、富里哀级数部分和的积分 表示式	251
四、富里哀级数的收敛定理	255

§6.2 富里哀级数逐项求积、 逐项求导定理	267
§6.3 维尔斯特拉斯一致逼 近定理	279
本章小结	279
复习题六	280

第七章 多元函数的极限与连续

§7.1 平面点集的一些基本概念	282
一、平面点集	283
二、平面点列的极限	286
§7.2 平面点集的一些基本定理	
§7.3 二元函数的极限	289
一、二元函数	292
二、二元函数的极限	294
三、二次极限	298

§7.4 二元函数的连续性	304
一、二元连续函数	304
二、闭区域上连续函数的性质	307
* §7.5 n 维点集和 n 元函数概述	313
本章小结	316
复习题七	317

第八章 多元函数微分法 隐函数定理

§8.0 已各知识	319
一、多元函数的偏导数与全微分	319
二、高阶偏导数	324
三、复合函数微分法	326
§8.1 隐函数及其微分法	329
一、隐函数的概念	329
二、隐函数存在定理	332
§8.2 隐函数组及其微分法	

.....	340
一、隐函数组存在定理	340
二、反函数组与坐标变换	347
三、函数行列式的一些简单性质	352
本章小结	356
复习题八	358

第九章 含参量积分

§ 9.1 含参量常义积分	360	383
§ 9.2 含参量广义积分	370	390
一、含参量广义积分的概念及一致收敛性	370	391
二、含参量广义积分一致收敛的判别法	376	394
三、含参量广义积分的性质		397
§ 9.3 欧拉积分		399
一、 Γ 函数及其性质		401
二、 B 函数及其性质		
三、 Γ 函数与 B 函数的关系		
本章小结		
复习题九		

第十章 重积分的一般变换、广义重积分

§ 10.0 已备知识	403	420
一、重积分的概念	403	
二、可积条件	404	
三、可积函数类	405	
四、重积分的性质	407	
五、重积分的计算	408	
§ 10.1 重积分的坐标变换	412	433
一、二重积分的坐标变换	412	435
二、三重积分的坐标变换		437
§ 10.2 广义重积分	424	
一、无界区域上的二重积分		
二、无界函数的二重积分		
本章小结		
复习题十		

第十一章 曲线积分、曲面积分、场论初步

§ 11.0 已备知识	439	449
一、两类曲线积分的定义、计算法及联系	439	
二、两类曲面积分的定义、计算法及联系	443	449
§ 11.1 曲线积分、曲面积分和重积分的关系		
一、平面曲线积分与二重积分的关系		

二、曲面积分与三重积分的关系	454	§ 11.3 场论初步	473
三、曲线积分与曲面积分的关系	456	一、场的概念	479
四、曲线积分与路径的无关性	460	二、梯度场	480
§ 11.2 向量函数及其微分法	468	三、散度场	485
一、向量函数的极限、连续及微分的概念	468	四、旋度场	488
二、数量的向量函数的几何特性		五、几种特殊的向量场	492
		*六、微分恒等式	494
		本章小结	498
		复习题十一	502
附录 实数理论	505		
附录 三角函数表与对数表的造法	520		
附录 习题提示与答案	524		

第一章 数列极限(续)

数学分析研究的对象是实变量的函数,因此,实数理论是它的基础。

关于实数的定义和初等性质,读者已经熟知。但是,反映实数系有别于有理数系的一些更深刻的性质,大家却未必清楚,而这些性质对数学分析的理论起着奠基的作用。

本章,在回顾实数和数列极限的一些简单性质的基础上,证明实数系的六个基本定理,并说明它们的等价性。然后介绍数列的上极限和下极限的概念。

§ 1.0 已备知识

一、实数及其简单性质

定义1 每个无限十进小数称为一个实数,其中无限循环小数称有理数,无限不循环小数称无理数。

实数集记为 R ,有理数集记为 Q ,正整数集记为 N 。

要注意以0为循环节与以9为循环节的无限小数。如0.350与0.349表示同一个有理数,即所谓有限小数0.35。

每个有理数都可表为分数形式 $\frac{p}{q}$ (p, q 都是整数)。如果假

定 p 与 q 既约,且 q 仅取正整数,则这种表示是唯一的。

性质1 实数集与有理数集一样是有序的。

性质2 实数集与有理数集一样对四则运算是封闭的。

性质 3 实数集与有理数集一样是稠密的.

事实上, 任何两个实数之间既有有理数, 也有无理数.

性质 4 实数集与有理数集一样, 具有阿基米德 (Archimedes) 性. 即对任何两个正实数 a, b , 必存在正整数 n , 使得 $na > b$.

性质 5 实数与数轴上的点有一一对应关系. 因此, 可把“数 a ”和与之对应的“点 a ”等同起来.

二、数列极限及其简单性质

定义 2 设 $\{x_n\}$ 为一实数数列 (简称数列 x_n), A 为一个实数, 若对任给的 $\varepsilon > 0$, 总存在相应的正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - A| < \varepsilon$, 则称数列 x_n 收敛于 A , 或称 A 为数列 x_n 的极限. 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \quad \text{或} \quad x_n \rightarrow A (n \rightarrow \infty).$$

对定义 2 进行否定, 就可得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq A$ 的定义:

若存在某个 $\varepsilon_0 > 0$, 对任意正整数 N , 总有相应的正整数 $n_0 > N$, 使 $|x_{n_0} - A| \geq \varepsilon_0$, 则称数列 x_n 不收敛于 A .

不收敛于任何数的数列, 称为发散数列.

定义 3 若对任给的 $M > 0$, 总存在相应的正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 有 $|x_n| > M$, 则称数列 x_n 趋向于无穷大, 或称数列 x_n 的极限为无穷大. 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \quad \text{或} \quad x_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty).$$

定义 4 若对任给的 $M > 0$, 总存在相应的正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 有 $x_n > M$ ($x_n < -M$), 则称数列 x_n 趋向于正 (负) 无穷大, 或称 x_n 的极限为正 (负) 无穷大. 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty).$$

必须指出,在通常意义下,所谓数列收敛是指它有有限的极限.趋向于无穷大的数列是发散数列.

性质1(唯一性) 收敛数列的极限是唯一的.

性质2(有界性) 收敛数列必有界.

性质3(保号性) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A > 0 (< 0)$, 则对任意的 $\alpha \in (0, A) (\alpha \in (A, 0))$, 必存在正整数 N , 使当 $n > N$ 时,

$$x_n > \alpha \quad (x_n < \alpha).$$

性质4(单调性) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$, 且当 $n \geq n_0$ 时, $x_n \leq y_n$, 则 $A \leq B$.

性质5(迫敛性) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$, 且当 $n \geq n_0$ 时, $x_n \leq z_n \leq y_n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$.

性质6(四则运算法则) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$, 则

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = A \pm B;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = A \cdot B;$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n / y_n = A/B \quad (\text{若 } B \neq 0).$$

这也就是说,在数列 x_n 和 y_n 都收敛的前提下,有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n / y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n / \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \quad (\text{若 } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0).$$

习 题 1.0

- 证明: 1) 有理数与无理数之和为无理数;
 2) 非零有理数与无理数之积为无理数.
- 设 $a_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 利用几何平均 $\leq$ 算术平均, 证明调和平均 $<$

几何平均,即

$$\frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} < \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

3. 证明: 设 A, B 为两个定数,

1) 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 都有 $A < B + \varepsilon$, 则 $A < B$.

2) 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 都有 $|A - B| < \varepsilon$, 则 $A = B$.

4. 数列极限定义中的“任给的 $\varepsilon > 0$ ”, 能否改为“小于 1 的任意正数 ε ”? 能否改为“任给的有理数 ε ”? 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - A| < \varepsilon$ 与“第 N 项后面有无穷多项满足 $|x_n - A| < \varepsilon$ ”这两句话是否等价?

5. 按定义证明:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n} = 0$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

3) 数列 $x_n = (-1)^n \frac{n}{1+n}$ 发散.

6. 求下列极限:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{1+a^n} \quad (a \neq -1)$;

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{a(a+d)} + \frac{1}{(a+d)(a+2d)} + \dots + \frac{1}{[a+(n-1)d](a+nd)} \right]; \quad (a, d \neq 0)$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right];$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)};$

6) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdots (1+x^{2^n}) \quad (|x| < 1)$

7. 1) 若 $\{x_n + y_n\}$ 收敛, 问 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 是否收敛?

2) 若 $\{x_n + y_n\}$ 收敛, 且 $\{x_n\}$ 收敛, 问 $\{y_n\}$ 是否收敛?

3) 若 $\{x_n\}$ 收敛, $\{y_n\}$ 发散, 问 $\{x_n + y_n\}$ 是否必发散?

4) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 问是否必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$?

8. 证明: 若 $\{x_n\}$ 有下界, $\{y_n\}$ 无上界, 则 $\{x_n + y_n\}$ 无上界.

9. 设 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 为 m 个正数, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} = \max\{a_1, a_2, \dots, a_m\}.$$

10. 证明: 若 $\{a_n\}$ 为正数列, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = q < 1$, 且 $a_{n+1} \leq b_n a_n (n=1, 2, \dots)$,

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

11. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a$.

12. 设 $a_n > 0 (n=1, 2, \dots)$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 证明

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} = a;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = a.$$

13. 设 $a_n > 0 (n=1, 2, \dots)$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

§ 1.1 实数系的一些基本定理

一、确界定理

大家知道, 如果数集 S 有上界, 就有无限多个上界. 在 S 的一切上界中, 最小的上界常常具有特殊的作用, 我们把它叫做 S 的上确界. 它的精确定义是

定义 1.1 设 S 为非空数集, 若数 ξ 满足

1) 对每个 $x \in S$, 有 $x \leq \xi$ (即 ξ 是 S 的上界);

2) 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $x_0 \in S$, 使得 $x_0 > \xi - \varepsilon$ (即比 ξ 小