实 分 析

［美］G·克莱鲍尔 著

陈 冠 初 译

沙 钰 汪 浩 校

湖 南 大 学 出 版 社

内 容 简 介

本书用现代数学的观点系统地论述了当代实分析的基本内容，包括R^1上的勒贝格测度、可测函数、勒贝格积分与函数空间、微分法与绝对连续性、抽象测度与积分法、外测度与乘积测度、拓扑空间与度量空间、Daniell 方法、Stone-Daniell 积分、赋范线性空间等十章。各章末尾均附有一定数量、质量较高的题目，大都给出了解法或提示，有的是当代数学中尚未解决的难题。本书可作为大专院校数学专业实分析（实变函数）课程的教学参考书，适合于各高等院校及中等专业学校数学专业师生、研究生，科技工作者，工程技术人员，纯粹与应用数学工作者阅读。

REAL ANALYSIS

G·Klambauer

American Elsevier Publishing Co., Inc., 1973

实 分 析

［美］G·克莱鲍尔 著

陈冠初 译

*

湖南大学出版社出版 湖南师范大学印刷厂印刷

湖南省新华书店发行

*

787×1092 1/32 16.125印张 380千字

1986年4月第一版 1986年4月第一次印刷

印数：0001—4,000

统一书号：13412·3 **定价**：平装3.40元

精装4.10元

中译本序

本书英文版的中译本已经由湖南师范大学陈冠初先生熟练地翻译完毕。冠初先生请我写一个序言，我愉快地接受了这个请求。我想借此机会表达我的喜悦心情，我为在中华人民共和国翻译出版我的第三本数学著作* 而感到高兴，我谨向译者和出版者致谢，感谢他们为本书出版所作出的一切努力。我希望这本书对于中国语系的读者有所裨益。如果这本书能为中国读者完全接受的话，那么，这主要应归功于冠初先生等人的努力。

Gabriel Klambauer

(Gabriel Klambauer)

1985年2月于加拿大渥太华

---

*作者的前两本书的中译本是：《数学分析》(孙本旺译)，湖南人民出版社，1981年第一版；《分析中的问题与命题》(陈冠初译，钟新民校)，湖南师院学报，1984年增刊。——译者

译序

本书著者 G.Klambauer 是加拿大 Ottawa 大学数学系教授，美国数学博士。这本书是紧接着他著的《数学分析》（中译本1981年出版）而写的。两书配合呼应，组成一个完整的体系。

学习一门数学，多半是先跟着一本或几本书走，走得熟了就知道“为什么”这样走，然后才会自己走，其中弄清“为什么”至关重要。Klambauer 的著作在这一点上都煞费苦心，所以他写的书对指导研究十分有力。那本《数学分析》译为中文之后，早已脍炙人口。普通分析课本都有的知识，它多半只轻淡地阐述一遍，而于历史上或应用上典型可赏的成果，则注意搜罗，也尽可能地用微积分解决一些浅近的实变函数问题。更突出的是，它有很多精致的习题，其中不少是为了阅读正文不能不攻克的关节。这种格调无疑地能开阔读者的眼界，加强研究的底气。

这本《实分析》的风格与《数学分析》一样，也是侧重在使读者知道“为什么”。它用现代观点系统地论述了当代实分

析的基本内容，讲得相当全面，由浅而深，由具体而抽象，概念的定义与定理结合得密切，习题与正文结合得密切，各章之间、各单元之间，联系得也很好。称之为名著，当之无愧。读了著者的《数学分析》再读这本书自然很好，先读 Rudin 的《数学分析原理》再读它也好。书中涉及 van der Waerden的《近世代数学》之处不多，可以先读一下。

本书是实变函数或实分析的优良教材，也可以用于研究生，尤其它的习题值得珍视，对于报考研究生或接受综合考试的人，都可以从这里取得帮助。

湖南师范大学陈冠初先生最先读到这本优美的原著，深愿我国的数学爱好者同沾其惠，便将它译成中文，献给读者。常说："有名师才得有高徒"，我想名著的作用和名师不相上下，陈君学有专长，用他流利的彩笔，写成了忠于原作的华章，对我国函数论的研究，一定有很大的积极意义。在这译本即将出版之际，用我的浅薄之见表达我的欣慰之情。

一九八五年一月，赵慈庚述于北京师大数学系

序　言

本书探讨当代实分析的基本问题，并非常适当地集中讨论积分理论。就其范围和内容来说，本书主要用来满足数学专业刚入学的研究生的需要，并力求帮助那些想参加综合考试的人复习这一课程。阅读本书的人不必具有很高的水平，大学数学专业本科毕业班的高材生都可以容易地读懂。同时，它对那些热爱现代分析的应用科学的研究生也会有所裨益。

关于阅读本书的必要条件，有几点值得一提。我们假定学生读者已经熟悉实数系和Riemann积分，并且对于为实函数的连续和收敛概念而安排的度量空间有些认识；W.Rudin所著的《*Prinoiples of Mathematical Analysis*》（McGraw-Hill Book Co.，Inc.，New York，1964）① 第二版前六、七章对这方面提供了极好的基础知识。而B.L.van der Waerden所著《*Modern Algebra*》（Frederick Ungar Publications,Inc.，New York，1953）② 第I卷则是一本由有理数来讲实数的Cantor构造法的很好的参考书，与本书有关的内容在第九章。我们还假定读者具有一般大学数学课程中碰到过的近世代数一些知识。

本书的叙述方式是简明的，处理方法则是从具体情况出发

---

① 中译本：《数学分析原理》，赵慈庚、蒋铎译，人民教育出版社出版，1979年11月第一版。——译者

② 中译本：《代数学》，丁石孙、曾肯成、郝钢新译，万哲先校，科学出版社出版，1963年7月第一版。——译者

逐渐过渡到较抽象的理论。学生们总是希望迅速而有效地学习；如果抽象地乱说一顿，又转入专门结果中抽象地说教，那只会挫伤学习者的热情。

从既定的目的来说，本书是相当全面的。前四章探讨实函数的Lebesgue 测度与积分理论，这在某种意义上构成了学习微积分的关键环节。第五、六章论述抽象测度与积分理论。第七章是关于拓扑空间与度量空间，着重研究那些同分析最有关联的课题。具体说来，第七章为其后各章提供了基础。第八、九章介绍了 Stone 对 Daniell 积分的阐述；第八章比较简短，其重点是 Riesz 表示定理，第九章则作出了相当详尽的叙述。第十章是关于赋范线性空间；我们的论述到本章结束，并为下一研究领域（即泛函分析）提供了一个线索。

本书各章的末尾都附有一定数量的习题，这当然是本书的组成部分；为了启发读者，我们对某些习题的证明作了简略的描述。这些习题中有一道题确实是很棘手的（见第三章习题40）；它同著名的 Riomann 假设有关（函数 f_α（$0<\alpha\leq 1$）之集的线性包（*linear hull*）在 $L^2(0,1)$ 中稠密当且仅当 Riemann 假设为真！）

我们认为，第九章非常适合用于讨论式教学，学生们欢迎这种范围广泛并能引起兴趣的教学。对于本课程学习优秀的学生来说，第九章也可用作指定的阅读材料。但在推荐第九章作这样的特殊处理时，我们觉得还缺少一个简单的导论，特在此补上。

Stone—Daniell 积分理论开头用公设给“初等函数”类定义“初等积分”，然后用初等积分给所有(广义的)实值函数定义“范数”或上积分。在范数有限的一切函数所成的类中引进了“伪度量”（它满足度量的所有条件，除了 $\rho(x,y)=0$ 不一

定蕴含$x=y$之外）；经过适当的等同，得到的函数空间显然是完备的。在给可积函数与积分下了定义之后，就知道这些概念具有许多它们通常的性质，尤其当它们涉及到单调有界收敛性与可积函数中某些（Baire）函数的可积性时，更是这样。这些理论中值得注意的是可测性的定义。函数f叫做可测当且仅当g与h可积时 $\mathrm{med}(f,g,h)$可积，这里 $\mathrm{med}(a,b,c)$表示a,b,c三数的中间数。显然，可测函数类大都具有通常的封闭性质。但一般说来，常值函数 1 可测不一定为真。在 1 可测这一特殊情况下，这个理论同探讨积分法的古典测度论本质上是一样的。在 Stone 的理论中，测度论的任务就是要求得一个尽可能类似于 Egorov 定理的定理。在 Stone 的理论中，我们讨论了连续函数空间（由在局部紧 Hausdorff 空间的无穷大邻域内为零的连续函数所组成）上正线性泛函的表示以及L^p空间的作用。紧接着公设，我们考虑了一个假定——按测度论的语言就是σ-有限性的假定，一个类似于 Lebesgue 分解定理的定理，以及 Stone 对 Radon—Nikodym定理的阐述。从后一定理导出了换元公式。我们还考虑了累次积分，并论述了 Stone 对 Fubini 定理的解说。为了论述的完备，第九章是从连续函数一致逼近论中一些切当事实开始的。总之，第九章是关于积分法的相当完善的教材。

（下为致谢部分，译略）

Gabriel Klambauer

目　录

预备知识

我们先简要地复习一下某些基本概念和事实，这是学习本书的必备的条件之一，这一点已在序言中作了说明。

设 x，y 是任何对象。那末，**序偶**（x,y）定义为集合 $\{\{x\},\{x,y\}\}$. 容易验证序偶的基本性质：

$$(x,y)=(u,v) \text{ 当且仅当 } x=u,\ y=v.$$

一般，可用类似的方法定义 n 元序组（$x_1,\cdots,x_n$），它具有性质：$(x_1,\cdots,x_n)=(y_1,\cdots,y_n)$ 当且仅当 $x_1=y_1,\cdots,x_n=y_n$.

所谓**关系**定义为序偶的集合。

设X，Y是给定的集。那末

$$X\times Y=\{(x,y): x\in X, y\in Y\}$$

称为X与Y的**笛卡儿**（Cartesian）**乘积**。

设X是给定的集。如果关系～是

（i）**自反的**，即对一切 $x\in X, x\sim x$,

（ii）**对称的**，即 $x\sim y$ 蕴含 $y\sim x$,

（iii）**传递的**，即 $x\sim y$，$y\sim z$，蕴含 $x\sim z$[1],

则称它为X上的**等价关系**。

关系的**定义域**是它的一切元素之第一坐标集；**值域**是它的一切元素之第二坐标集。若～是 X 上的等价关系，则定义 $E_x=\{y\in X: y\sim x\}$，并称 E_x 为**包含元素 x 的等价类**。

所谓**函数** f 是指这样的一个关系，它满足：若$(x,y)\in f$,

1）照例，$x\sim y$意味着$(x,y)\in\sim$。

$(x,z)\in f$，则 $y=z$。若 f 是一个函数，且 $(x,y)\in f$，则记为 $y=f(x)$；称 y 是 f 在 x 处的值，或 y 是 x 在 f 下的象。

记号 $f:X\to Y$ 表示"f 是从集 X 到集 Y 中的函数"；集 X 是 f 的定义域，f 的值域是 Y 的子集，不一定是整个的 Y。

设 $f:X\to Y$。如果对任意 $x_1,x_2\in X$，$f(x_1)=f(x_2)$ 蕴含 $x_1=x_2$，则称 f 是**一一**的。若 f 的值域是整个的 Y，则称 f 是**映上**的。如果一个函数既是一一的，又是映上的，就说它是**一一对应**的。

术语"单射"、"满射"和"双射"有时分别用来代表"一一"、"映上"和"一一对应"。

设 $f:X\to Y$ 是一一对应的。因为 f 是映上的，所以，若 $y\in Y$，则存在 $x\in X$，使 $y=f(x)$。又因 f 是一一的，故此 x 又是唯一的。于是存在一个反函数 $g:Y\to X$，使得对一切 $x\in X$，有 $g(f(x))=x$，对一切 $y\in Y$，有 $f(g(y))=y$。通常写作 $g=f^{-1}$。

设 $f:X\to Y$，$A\subset X$，$B\subset Y$。我们把 $f(A)=\{f(x):x\in A\}$ 定义为在函数 f 下集 A 的**象**。B 的**逆象**定义为 $f^{-1}(B)=\{x:x\in X$ 且 $f(x)\in B\}$。注意 $f^{-1}(B)$ 是 X 的子集；利用记号 $f^{-1}(B)$ 时，不要求 f 是一一对应的。

现在把象与逆象的基本性质列出如下：

设 $f:X\to Y$，$\{A_t\}$ 是 X 的子集类，$\{B_t\}$ 是 Y 的子集类。那末，

(i) $A_t\subset A_s$ 蕴含 $f(A_t)\subset f(A_s)$；

(ii) $B_t\subset B_s$ 蕴含 $f^{-1}(B_t)\subset f^{-1}(B_s)$；

(iii) $f(\bigcup A_t)=\bigcup f(A_t)$；

(iv) $f(\bigcap A_t)\subset\bigcap f(A_t)$；

(v) $f^{-1}(\bigcup B_t)=\bigcup f^{-1}(B_t)$；

(vi) $f^{-1}(\bigcap B_t)=\bigcap f^{-1}(B_t)$；

(vii) $A_t \subset f^{-1}(f(A_t))$;

(viii) $f(f^{-1}(B_t)) \subset B_t$.

设 $f: X \to Y$，$g: Y \to Z$，其中 f，g 是任意的函数，X, Y, Z 是任意的集。那末，复合函数 $g \circ f: X \to Z$ 定义为：对每个 $x \in X$，$(g \circ f)(x) = g(f(x))$。

设X是集合，ρ是由$X \times X$映入实数集 R^1 中的函数，满足：对一切 $x, y, z \in X$，有

(i) $\rho(x, y) \geqq 0$；

(ii) $\rho(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$；

(iii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$；

(iv) $\rho(x, z) \leqq \rho(x, y) + \rho(y, z)$［三角不等式］。

这时称ρ为X的**度量**（或**距离函数**）；$\rho(x, y)$叫做**从x到y的距离**，偶对(X, ρ)叫做**度量空间**。

所谓ρ为**伪度量**是指：除 $\rho(x, y) = 0$ 不一定蕴含 $x = y$ 之外，ρ满足度量的一切条件。如果ρ是X的伪度量，则偶对(X, ρ)称为**伪度量空间**。

有一个规格化的方法可以把伪度量空间变为度量空间，下面叙述这个方法。

设 (X, ρ) 是伪度量空间，并规定 $x \sim y$表示 $\rho(x, y) = 0$。这时$\sim$是X上的一个等价关系，如果 E_x 是包含x的等价类，记 $E = \{E_x: x \in X\}$，那末

$$d(E_x, E_y) = \rho(x, y)$$

在$E \times E$上定义是合理的，并且(E, d)是度量空间。

虽然上述步骤从一个伪度量空间构造成一个度量空间，但是要注意这个度量空间的元素是等价类，比原来空间的元素稍微复杂一些。

在度量空间(X, ρ)中，序列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$称为**收敛**（于x），

是指存在 $x\in X$，当 $n\to\infty$ 时，有 $\rho(x_n,x)\to 0$。于是我们记

$$x=\lim_{n\to\infty}x_n$$

或当 $n\to\infty$ 时 $x_n\to x$，并称 x 为**序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 的极限**。

在度量空间 (X,ρ) 中，序列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$（其中对每个 n，$x_n\in X$）称为 **Cauchy 列**是指：对每个 $\varepsilon>0$，总存在 $k=k(\varepsilon)$，当 $n,m>k$ 时，有

$$\rho(x_n,x_m)<\varepsilon.$$

在度量空间中收敛的序列有唯一的极限。在度量空间中的每个收敛序列都是 Cauchy 列，但反之一般不成立。如果度量空间中的 Cauchy 列有一个收敛的子列，则整个序列是收敛的。

度量空间 (X,ρ) 称为**完备的**，是指每个 Cauchy 列收敛（于 X 的一点）。

设 (X,ρ) 是度量空间，$x\in X$。对 $r>0$，称 $S(x,r)=\{y\in X:\rho(x,y)<r\}$ 是点 x 的一个以 x 为中心、r 为半径的**邻域**（或**开球**）。

设 (X,ρ) 是度量空间，A,B 是 X 的非空子集。定义

$$\rho(x,A)=\inf\{\rho(x,a):a\in A\},$$
$$\rho(A,B)=\inf\{\rho(a,b):a\in A,b\in B\},$$
$$\rho(A)=\sup\{\rho(a,a'):a,a'\in A\}.$$

称 $\rho(x,A)$ 为**点 $x\in X$ 与集 A 之间的距离**，$\rho(A,B)$ 为**集 A 与 B 之间的距离**，$\rho(A)$ 为**集 A 的直径**。

如果在度量空间中，集 A 有有限的直径，就称 A 是**有界集**；否则，称 A 是**无界集**。

设 (X,ρ) 是度量空间，$G\subset X$。若对每个点 $x\in G$，存在一个开球 $S(x,r)$ $(r>0)$，使 $S(x,r)\subset G$，则称 G 是**开集**。

注意，$S(x,r)$（其中 $x\in X$，$r>0$）是开集。在度量空间 (X,ρ)

中，空集$\varnothing$与X是开集；任何一族开集的并集是开集，有限个开集的交集也是开集。

设A是度量空间(X,ρ)中的点集，x是X中的一点，不一定属于A。如果在以x为中心、$r>0$为半径的任何一个开球中，总含有集A中不同于x的点，那末称x为点集A的**极限点**（或**聚点**）。

如果（X,ρ）中的点集之余集是开集，则称这个点集是**闭集**。(X,ρ)中的点集是闭集当且仅当它包含它的所有极限点。

在(X,ρ)中，所谓A的**内部**（核）是指含于A的所有开集的并集，而所谓A的**闭包**是指包含A的所有闭集的交集。我们用$\mathring{A}$表示A的内部，用$\overline{A}$表示A的闭包。

设A是度量空间(X,ρ)的子集，如果$\overline{A}=X$，则称A在X中**稠密**；如果一个度量空间包含可数的稠密子集，则称它是**可分的**。

设(X,d)与(Y,ρ)是度量空间且$f:X\to Y$。又设$b\in Y$。我们称f在$x_0\in X$处**具有极限**b是指：对所有的$\varepsilon>0$，总存在$\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得当$0<d(x,x_0)<\delta$时总有$\rho(f(x),b)<\varepsilon$。我们称$f$**在$x_0$处连续**是指：对所有的$\varepsilon>0$，总存在$\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0$，使得当$d(x,x_0)<\delta$时总有$\rho(f(x),f(x_0))<\varepsilon$。可以看出，$f:X\to Y$在$X$的每个点连续当且仅当$Y$中每个开集之逆象都是$X$中的开集。

设(X,d)与(Y,ρ)是度量空间，$f:X\to Y$。如果对所有的$\varepsilon>0$，总存在$\delta=\delta(\varepsilon)>0$（$\delta$只依赖于$\varepsilon$），使得当$d(x,x')<\delta$时总有$\rho(f(x),f(x'))<\varepsilon$（其中$x,x'\in X$），则称$f$**在$X$上一致连续**。

设$\mathscr{S}$是集A的类。如果$X\subset\bigcup\{A:A\in\mathscr{S}\}$，就说类$\mathscr{S}$是集$X$

的**覆盖**。如果$\mathscr{S}$的某个子类覆盖了X，就说这个子类是$\mathscr{S}$的子覆盖。每个成员都是开集的覆盖叫做**开覆盖**。

设(X,ρ)是度量空间。X的子集A称作**紧**的是指A的每个开覆盖都有有限的子覆盖。

在度量空间中，紧集A的连续映象是紧的。在紧集上的连续实值函数是有界的，并且达到它的界。

在度量空间中，紧集是闭且有界的，反之一般不成立。如果度量空间(X,ρ)是紧的，那末它是完备的，反之一般不成立。

所谓K（这里K表示实数域R^1或复数域C^1）上的**线性空间**是指具有下述性质的非空集X：有一个由$X\times X$映入X的函数$+$，以及一个由$K\times X$映入X的函数$\cdot$，使得对于所有的$\alpha,\beta\in K$及所有的元素$x,y,z\in X$，有：

（i）$x+y=y+x$，

（ii）$(x+y)+z=x+(y+z)$，

（iii）存在$\theta\in X$，使$x+\theta=x$，

（iv）存在$-x\in X$，使$x+(-x)=\theta$，

（v）$1\cdot x=x$，

（vi）$\alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot x+\alpha\cdot y$，

（vii）$(\alpha+\beta)\cdot x=\alpha\cdot x+\beta\cdot x$，

（viii）$\alpha\cdot(\beta\cdot x)=(\alpha\beta)\cdot x$.

下面，我们把$\alpha\cdot x$简记为αx。当$K=R^1$时，称这线性空间为**实线性空间**，当$K=C^1$时，则称它为**复线性空间**。

设$\{x_1,\cdots,x_n\}$是线性空间X的有限子集。如果形如$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=\theta$的关系蕴含$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$，则称$\{x_1,\cdots,x_n\}$为**线性无关集**。形如$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n$的表达式称为**元素$x_1,x_2,\cdots,x_n$的线性组合**。

习　题

1. 设$x>0$，定义

$$x_1=x,\ x_n=x^{x_{n-1}}\quad (n\geqq 2).$$

证明序列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$收敛当且仅当$(1/e)^e\leqq x\leqq(e)^{1/e}$.

2. 设在空间内有$2n$个点。证明至少可画出连结这些点的不构成三角形的n^2个线段。(只把给定的点看作三角形的顶点。)

3. 设a_1,a_2,a_3，…是各项都大于1的正整数列。证明任一实数α都可唯一地表示成形式：

$$\alpha=c_0+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_j}{a_1a_2\cdots a_j},$$

整数c_j满足不等式$0\leqq c_j\leqq a_j-1(j\geqq1)$，且对无穷多个$j$，$c_j<a_j-1$. 如果每个素数都能除尽$a_j$的无穷多个，而无穷多个$c_j$是正数，那末$\alpha$是无理数吗？

4. 证明：对任意两个实数a与b,有$|a+b|\leqq|a|+|b|$.(解：显然，$-|a|\leqq a\leqq|a|$, $-|b|\leqq b\leqq|b|$,所以，$-(|a|+|b|)\leqq a+b\leqq|a|+|b|$.而两个不等式$-B\leqq A\leqq B$与$|A|\leqq B$是等价的。)