典型群及其在物理学上的应用

〔新西兰〕B. G. 怀邦 著

科学出版社

典型群及其在物理学上的应用

〔新西兰〕B. G. 怀邦 著

冯承天 金元望
张民生 栾德怀 译

科学出版社

1982

内 容 簡 介

群论已成为近代物理学中的重要数学工具，对了解物理现象起着重要作用．本书介绍连续群理论及其应用的一些主要问题．从群的定义开始，深入讨论了李群、李代数、邓金图、克罗内克乘积等方面的数学方法，并着重论述了在物理学中的应用． 最后讨论了三个研究专题：谐振子、氢原子、费米子和壳层结构．本书概念清楚、论述严密、重点突出，可作为研究生的教材，也可供大、专院校有关师生，及有关科技研究人员参考．

B. G. Wybourne
CLASSICAL GROUPS FOR PHYSICISTS
John Wiley 1974

典型群及其在物理学
上的应用
〔新西兰〕B. G. 怀 邦 著
冯承天 金元望
张民生 栾德怀 译
责任编辑 陈咸亨
科学出版社出版
北京朝阳门内大街137号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1982年12月第一版 开本：787×1092 1/32
1982年12月第一次印刷 印张：13 7/8
印数：0001—6,800 字数：312,000
统一书号：13031·2040
本社书号：2787·13—3
定价： 2.15 元

原　序

对物理学家来说，学会李群和李代数是很有用的，这一点现在几乎是没有异议的了．在近代物理的大多数分支中都要用到它们．本书介绍连续群理论及其应用的一些主要问题．我假定读者学过大学程度的数学和量子力学课程，也假定读者对有限群中的一些基本概念有所了解．

我们采用了传统的方法，即嘉当和外尔的方法，同时也注意到邓金引入的修改和引伸；并且强调通过例子和习题来进行论述．我们不要求读者掌握很多的数学工具，因而对某些定理只是简单地证明一下，或者不予证明．书中列出足够多的参考文献，以便有兴趣的读者可以进一步钻研这些课题．

通过多年来对各类学生以及有关的物理工作者、化学工作者讲授群论，我发现，许多人对这一课题的丰富内容和变化多端的形式感到手足无措．因此，在充分利用各种数学工具深入钻研这一理论的应用之前，有必要指导他们作一些准备．我决意选取某些课题来讨论，并且我也完全知道，有许多重要课题或者根本没有接触到，或者只作了简略讨论．在最后三章，我较详尽讨论三个典型研究课题，来说明群论在物理问题中的应用，以便把前面各章发展的各种工具结合在一起．

我自 1964 年起，在阿贡国家实验室，为一些对群论有迫切要求的化学工作者讲授群论多年．这教程就是在这个基础上形成的．（下略）

B. G. 怀邦

1973 年 7 月

目 录

者为中译本写的序言 …… i
原序 …… ii
第一章 引言 …… 1
第二章 对称性和量子数 …… 3
2.1 对称性和原子的量子数 …… 3
2.2 对称性的等级关系 …… 5
第三章 由正则矩阵构成的群 …… 7
3.1 群的公设 …… 7
3.2 正则矩阵群 …… 8
3.3 一些特殊矩阵的性质 …… 10
3.4 连续矩阵群 …… 10
3.5 矩阵的指数函数 …… 14
第四章 李群的局部性质 …… 17
4.1 群元素的参数化 …… 17
4.2 连通性 …… 17
4.3 李群的定义 …… 18
4.4 无穷小群生成元 …… 19
4.5 二维转动群 $SO(2)$ …… 21
4.6 无穷小转动 …… 23
4.7 一般变换 …… 23
4.8 李群的无穷小算子 …… 25
4.9 无穷小算子的一些实例 …… 27
4.10 李群的构造常数 …… 30
4.11 有限群元的生成 …… 33

4.12 有限变换 …… 37
第五章 李群和李代数 …… 40
5.1 李代数 …… 40
5.2 基底的变换 …… 41
5.3 同态和同构 …… 42
5.4 自同构和自同态 …… 4
5.5 李代数和子代数 …… 43
5.6 理想和真理想 …… 44
5.7 李代数的伴随表示 …… 45
5.8 实李代数的复扩充 …… 45
5.9 单纯李代数和半单纯李代数 …… 46
5.10 基林形式和半单纯李代数的嘉当判别准则 …… 46
5.11 实例：$SO(4)$ …… 48
5.12 实例：E_2 …… 50
5.13 李代数的导出代数 …… 50
5.14 可解李代数 …… 51
5.15 幂零李代数 …… 52
5.16 直和与半直和 …… 52
5.17 反对称张量 …… 53
5.18 卡塞米尔算子 …… 54
5.19 卡塞米尔算子的推广 …… 55
5.20 紧李代数和非紧李代数 …… 55
5.21 李群和李代数 …… 56
第六章 根向量和典型李代数 …… 58
6.1 引言 …… 58
6.2 半单纯李代数的标准形式 …… 58
6.3 根的一些性质 …… 59
6.4 根的对称性质 …… 60
6.5 求得标准形式 …… 6
6.6 关于根的另一些定理 …… 62

6.7　嘉当-外尔规范化 …………………………………… 65
6.8　根向量的图形表示 …………………………………… 66
6.9　2 秩李代数 …………………………………… 68
6.10　秩 $l>2$ 的李代数 …………………………………… 70
6.11　例外李代数 …………………………………… 72
第七章　单纯根和邓金图 …………………………………… 74
7.1　单纯根 …………………………………… 74
7.2　实例：　B_2 和 B_3 …………………………………… 76
7.3　邓金图 …………………………………… 77
7.4　嘉当矩阵 …………………………………… 78
7.5　嘉当矩阵的一些例子 …………………………………… 78
7.6　嘉当矩阵　列举各根 …………………………………… 81
7.7　应用：G_2 代数 …………………………………… 81
7.8　若干单纯李代数的构成 …………………………………… 85
第八章　舍瓦累基底 …………………………………… 88
8.1　互补权和舍瓦累基底 …………………………………… 88
8.2　舍瓦累基底中的位相 …………………………………… 89
8.3　$su(3)$ 代数中的舍瓦累基底 …………………………………… 91
第九章　李群和李代数的表示 …………………………………… 93
9.1　群的表示 …………………………………… 93
9.2　实表示和复表示 …………………………………… 94
9.3　逆步表示 …………………………………… 95
9.4　伴随表示 …………………………………… 95
9.5　酉表示和非酉表示 …………………………………… 96
第十章　权和既约表示的标记 …………………………………… 98
10.1　权和权空间 …………………………………… 98
10.2　关于权的一些定理 …………………………………… 100
10.3　外尔反射群 …………………………………… 101
10.4　权和既约表示的分类 …………………………………… 102
10.5　计算权的完全集合 …………………………………… 103

10.6 计算权的一些实例 ………………………………………… 107
第十一章 克罗内克乘积………………………………………… 110
11.1 定义 ………………………………………………………… 110
11.2 表示的克罗内克乘积 ………………………………… 111
11.3 克罗内克乘积的权空间 ……………………………… 111
11.4 克罗内克乘积的约化 ………………………………… 112
第十二章 表示,权,标记方法…………………………………… 114
12.1 基本表示 …………………………………………………… 114
12.2 克罗内克乘幂 …………………………………………… 115
12.3 初等表示 …………………………………………………… 117
12.4 初等表示的权 …………………………………………… 119
12.5 群 B_n 和 D_n 的旋量表示…………………………… 122
12.6 既约表示的标记 ………………………………………… 124
12.7 记号问题 …………………………………………………… 127
第十三章 例外群…………………………………………………… 129
13.1 例外群的基本表示 ……………………………………… 129
13.2 例外群表示的标记 ……………………………………… 131
第十四章 既约表示的维数……………………………………… 135
14.1 基本权的标积 …………………………………………… 135
14.2 既约表示的维数 ………………………………………… 137
第十五章 卡塞米尔不变算子…………………………………… 142
15.1 二次卡塞米尔算子的本征值 ………………………… 142
15.2 广义卡塞米尔不变算子 ……………………………… 143
15.3 非半单纯李群的不变算子 …………………………… 144
15.4 $SO(3)$ 和 $SO(2,1)$ 的卡塞米尔算子 ………………… 146
第十六章 李群的一些整体性质………………………………… 154
16.1 拓扑邻域 …………………………………………………… 154
16.2 拓扑空间 …………………………………………………… 155
16.3 拓扑空间的例子 ………………………………………… 156
16.4 同胚映射 …………………………………………………… 157

16.5 拓扑空间的直积 …… 157
16.6 豪斯道夫空间 …… 158
16.7 度量空间 …… 159
16.8 连通空间 …… 160
16.9 紧空间 …… 161
16.10 同伦道路 …… 162
16.11 单连通和多连通空间 …… 164
16.12 基本群 …… 165
16.13 通用覆盖群 …… 166
16.14 拓扑群 …… 167
16.15 拓扑群的直积 …… 169
16.16 拓扑群的同构 …… 169
16.17 拓扑子群 …… 170
16.18 不变拓扑子群 …… 170
16.19 陪集空间及商群 …… 171
16.20 齐性空间 …… 173
16.21 流形与李群 …… 173
16.22 实单纯李群和李代数 …… 174
16.23 李群和李代数的同构 …… 179
16.24 通用覆盖群 …… 181

第十七章 一些三参数李群的表示 …… 184

17.1 三参数李群 …… 184
17.2 标准形式 …… 184
17.3 卡塞米尔算子 …… 186
17.4 初等表示 …… 186
17.5 旋量表示的基底 …… 188
17.6 用玻色子算子来实现表示 …… 188
17.7 其它表示的构成 …… 190
17.8 酉表示 …… 194
17.9 L_{12} 和 $L_{\pm}$ 的矩阵元 …… 196

17.10 有限变换 ······ 198
17.11 非紧生成元的对角化 ······ 203
17.12 耦合系数 ······ 203
17.13 特例 $SO(3)$ ······ 207
17.14 $SO(2, 1)$ 的耦合系数 ······ 209
17.15 耦合系数和解析延拓 ······ 212
第十八章 $su(1, 1)$ 型谱生成代数 ······ 216
18.1 引言 ······ 216
18.2 $su(1, 1)$ 的一个实现 ······ 216
18.3 离散的本征值谱 ······ 218
18.4 连续本征值谱 ······ 220
18.5 三维各向同性谐振子 ······ 220
18.6 推广的开普勒问题 ······ 221
18.7 二维开普勒问题 ······ 223
18.8 莫斯势 ······ 225
18.9 $su(1, 1)$ 的局限性 ······ 226
第十九章 维格纳-爱卡尔脱定理和张量算子 ······ 228
19.1 引言 ······ 228
19.2 一些符号 ······ 229
19.3 张量算子 ······ 230
19.4 $SO(3)$ 的张量算子 ······ 231
19.5 半单纯李群的张量算子 ······ 231
19.6 耦合系数 ······ 232
19.7 耦合构成的恒等表示 ······ 233
19.8 维格纳-爱卡尔脱定理 ······ 236
19.9 选择定则 ······ 238
19.10 对 $SO(3)$ 的应用 ······ 238
19.11 广义重新耦合系数 ······ 240
19.12 $SO(3)$ 的重新耦合系数 ······ 243
19.13 $SO(4)$ 的重新耦合系数 ······ 247

19.14　拉卡因子分解引理 …………………………………… 252
19.15　同位标量因子 …………………………………………… 254
19.16　伴随张量算子 …………………………………………… 255
19.17　耦合系数的对称性质 …………………………………… 257
19.18　互反性和同位标量因子 ………………………………… 260
19.19　相规约 ……………………………………………………… 261
19.20　简单的同位标量因子 …………………………………… 262
19.21　逐步计算原理 …………………………………………… 263
19.22　同位标量因子的另一种计算方法 ……………………… 274
19.23　耦合张量算子 …………………………………………… 277
19.24　$SO(3)$ 的耦合张量算子 ………………………………… 279

第二十章　研究专题 I：各向同性谐振子 ………………… 282

20.1　引言 ………………………………………………………… 282
20.2　二次量子化和谐振子 …………………………………… 282
20.3　群 $U(3)$ 和 $SU(3)$ ………………………………………… 284
20.4　转动对称性 ……………………………………………… 285
20.5　$SU(3)$ 的一些张量算子 ………………………………… 286
20.6　约化矩阵元 ……………………………………………… 289
20.7　二次卡塞米尔算子 ……………………………………… 292
20.8　$SU(3)$ 中的阶梯算子 …………………………………… 293
20.9　$SU(3)$ 的另外一些张量算子 …………………………… 293
20.10　交换关系 ………………………………………………… 295
20.11　谐振子的一个更大的群 ……………………………… 297
20.12　$Sp(6, R)$ 的子群 ……………………………………… 298
20.13　谐振子的另一个群 ……………………………………… 300
20.14　谐振子的动力学群 ……………………………………… 301
20.15　群约缩和动力学群 ……………………………………… 303
20.16　N 维各向同性谐振子 …………………………………… 305
20.17　子群 $SO(2, 1)\times SO(3)$ 的张量算子 ………………… 305
20.18　多极算子的矩阵元 ……………………………………… 307

第二十一章　研究专题 II：氢原子 ······ 313
21.1　引言 ······ 313
21.2　$SO(4)$ 和氢原子的能级 ······ 316
21.3　球面张量与 $SO(4)$ ······ 318
21.4　**A** 的约化矩阵元 ······ 319
21.5　$SO(4)$ 中的阶梯算子 ······ 320
21.6　玻色子算子和 $SO(4)$ ······ 322
21.7　氢原子的动力学群 ······ 324
21.8　卡塞米尔算子 ······ 328
21.9　子群 $SO(4, 1)$ ······ 329
21.10　$SO(4, 2)$ 的另一些子群 ······ 329
21.11　$SO(4, 2)$ 的基底和氢原子 ······ 331
21.12　$SO(4, 2)$ 的坐标实现 ······ 336
21.13　$SO(4, 2)$ 的物理实现 ······ 337
21.14　氢原子的倾斜态 ······ 338
21.15　用膨胀算子实现 $SO^1(2, 1)\times SO^2(2, 1)$ ······ 340
21.16　电偶极子算子 ······ 342
21.17　伽利略速度变换 ······ 347
21.18　洛仑兹速度变换 ······ 349
21.19　无限分量的波动方程 ······ 350
21.20　例子：氢原子 ······ 355
21.21　$SO(4, 2)$ 的有限维实现 ······ 358
21.22　狄拉克电子理论的重新表述 ······ 362
21.23　有自旋的氢原子 ······ 363
21.24　共形群和 $SO(4, 2)$ ······ 364
21.25　结束语 ······ 366

第二十二章　研究专题 III：费米子和壳层结构 ······ 368
22.1　引言 ······ 368
22.2　费米子壳层状态 ······ 369
22.3　超群 ······ 370

22.4 两个重要的子群 …… 372
22.5 一个酉子群 …… 374
22.6 张量算子及湮灭和产生算子 …… 375
22.7 耦合张量算子 …… 375
22.8 另一些子群 …… 376
22.9 $j=7/2$ 壳层的分类 …… 377
22.10 高位数 …… 380
22.11 准旋形式 …… 380
22.12 状态的准旋分类 …… 382
22.13 湮灭算子和产生算子的准旋 …… 384
22.14 算子的对称性分类 …… 385
22.15 有心力场中粒子的相互作用 …… 388
附录 休尔函数和杨氏图形 …… 395
A.1 引言 …… 395
A.2 S 函数 …… 395
A.3 S 函数的外积 …… 398
A.4 S 函数的除法 …… 400
A.5 S 函数的内积 …… 401
A.6 作为 S 函数的群的特征标 …… 402
A.7 S 函数的部分数的缩减 …… 402
A.8 分歧律 …… 403
A.9 连续群的克罗内克乘积 …… 404
A.10 S 函数的外相增 …… 406
A.11 S 函数的内相增 …… 408
A.12 用计算机来计算 S 函数的性质 …… 410
参考文献 …… 411

第一章 引　言

在过去二十年中，理论物理的发展，出现了大量应用李代数和李群的趋向[1,2]. 山内恭彦[3]、外尔[4]、维格纳[5,6]、范特瓦登[7]和拉卡[8]等人较早地认识到，对称性变换在描述物理现象中十分重要，从而促进了这一学科的发展. 李代数和李群早期的主要应用是原子的壳层结构[8,9]，其后又应用于原子核的壳层结构[10—13]，尤其是近年来，在基本粒子领域里有着广泛的应用[14,15]. 然而，它们的应用决不只局限于基础物理学. 例如，特殊函数的许多经典理论现在都用李群方法来处理[16—19]；霍夫曼[20,21]应用李群讨论了视觉问题；而诺努[22,23]则用李群描述超弹性材料的储能函数.

知道一点李群和李代数，对于当前的物理工作者来说是有帮助的. 这一点现在已经没有任何异议了. 然而，由于它们内容庞大，并且处理问题的方法又多种多样，使最初接触这一课题的学生感到棘手. 因此，讲解这一课题就必须在两种作法中作出选择，或者以严格的数学观点阐述它们，或者力图阐述其主要概念、而把问题的严格性留给专门的数学家去考虑. 在本书中我们选用了后一种方式，即尽力给出一些主要概念，并通过例子和习题来说明它们.

我们假定读者学过一般大学的量子力学课程，并对有限群[5,24]的基本性质也略知一二.

李群理论有着这样的特点： 它有若干种不同的表述方法. 对学生来说，每一种方法都有其优点，也有其缺点. 休尔[25]所表述的方法，应用了不变矩阵的性质. 列特尔乌德[26]、

谬纳加恩[27]和鲁宾逊[28]应用佛罗比纳斯[29]和杨[30]的早期成果，使这个方法有了广泛的发展. 这个方法在原子光谱中的应用，别处已有详细论述[31,32]，本书只给予简单的讨论. 一般说来，物理工作者倾向于嘉当的传统方法. 在这个方法中，嘉当[33]大量应用了与所论李代数有关的根. 此后，外尔[34]、范特瓦登[7]和拉卡[8]在这一方向又做了不少工作. 以邓金[35–37]为首的苏联学派对嘉当-外尔方法作了巨大发展，他们非常强调单纯根的各种性质.

在本书中，我们将逐步深入讨论由邓金[35–37]和舍瓦累[38]修改过的嘉当-外尔方法. 对于理论的展开，我们并不试图给出严格的证明，但提供了充分的参考文献. 我们的目的是用一些例子说明各种关键之点，为读者学习这一课题提供某些指导. 显然，在一本书的篇幅中，不能希望把有关这一课题的所有内容作出详尽无遗的论述. 我们的处理方法，即令没有偏见，也很自然地反映出个人的爱好. 这样，我希望读者不会在无边的林海中茫茫不知所措，以致只见树木而不见森林.

第二章　对称性和量子数

2.1　对称性和原子的量子数

用量子力学处理复杂原子时，通常首先考虑有心力场的方程[39]

$$\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_i^2+U(r_i)\right]\phi=E\phi \qquad (2.1)$$

作为第一步近似计算．本征值 E 是高度简并的，但对于每一个电子组态只有一个本征值．因此，我们面临这样的问题：对于与每一个简并的本征值相应的那些本征函数，我们要找出一个适当的量子数的集合来表征它们．如果表示它们的算子与有心力场的哈密顿函数 $\mathscr{H}_{\mathrm{CF}}$ 可交换，那么这些量子数将是一些“好的”量子数．$\mathbf{S}^2$ 和 $\mathbf{L}^2$ 就是这样两个算子．从这两个算子，我们能得到熟知的自旋和轨道量子数 S 和 L．而且，$\mathscr{H}_{\mathrm{CF}}$ 也与 $\mathbf{J}^2=\mathbf{L}^2+\mathbf{S}^2$ 和 $J_z=L_z+S_z$ 可换．这样，我们就能用量子数 $SLJM$ 来标明有心力场中的一些基本状态．

一旦我们定义了基本状态的一个适当集合，我们就能用它们来计算微扰相互作用的矩阵元．当然，可能会出现这种情况：微扰项的矩阵元把具有不同量子数集合的一些基本状态耦合起来．此时，这些量子数就不再是好的量子数了．

对于有心力场中 p 壳层的本征函数来说，量子数 $SLJM$ 构成了标记它们的一个完全集合．但是在 $l\geqslant 2$ 时，对于有三个或三个以上等价电子（或空穴）的组态来说，这些量子数就不足以用来区分所有的本征函数了．把重合的项任意地分离开来，我们就能够构造状态的一个正交归一集合．这一种

处理方法，虽然是完全行得通的，但要进行微扰矩阵元的计算时，却不能导致简化. 换一种方法来考虑，我们扩大与零阶哈密顿函数可换的算子集合，直到重新得到一组“量子数”，使其足以标记所有的、或近乎所有的简并本征函数. 后面就会明白，可换算子的本征值不仅标记了本征函数，同样也标定了特定对称性群的特定既约表示. 因此，就可以这样说，一组简并的本征函数，在一个群的对称运算下，按该群的一个特定表示而变换. 乍看起来，这种做法似乎仅仅是学究式的. 但是，当我们计算微扰相互作用的矩阵元时，此方法的在实用上的优越性就会显示出来. 可以将微扰项分解为一些对称化的部分. 这些部分，在用以标记本征函数的那个群的对称运算下，具有定义得很好的变换性质. 这样的话，就可以使用强有力的维格纳-爱卡尔脱定理（参看 19.8 节），来预言哪些矩阵元必然为零（即得到选择定则），并且求得不同矩阵元之间的关系.

习　　题

2.1　应用确定状态的方法证明：d^3 电子组态含有两个 ${}^2D$ 项[39].

2.2　证明对于 $M_S=\frac{1}{2}, M_L=2$，下列关系表示了 d^3 的两个 ${}^2D$ 项的一种可能的分离：

$$
\begin{aligned}
|{}^2_aD M_S=\tfrac{1}{2} M_L=2\rangle
&=-\frac{1}{2}\left[\{\overset{+-}{22}\,-\overset{+}{2}\}+\{\overset{++}{21}\,-\overset{-}{1}\}-\{\overset{+-}{21}\,-\overset{+}{1}\}-\{\overset{++-}{200}\}\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|{}^2_bD M_S=\tfrac{1}{2} M_L=2\rangle
&=\frac{-1}{\sqrt{84}}\left[5\{\overset{+-}{22}\,-\overset{+}{2}\}-3\{\overset{++}{21}\,-\overset{-}{1}\}-\{\overset{+-}{21}\,-\overset{+}{1}\}\right.\\
&\quad\left.+4\{\overset{-+}{21}\,-\overset{+}{1}\}+3\{\overset{++-}{200}\}+2\sqrt{6}\{\overset{+-+}{110}\}\right].
\end{aligned}
$$

2.3　证明：在 g^3 的电子组态中有两个 ${}^4F$ 项[40].

2.4　研究一下：在 g^3 的两个 ${}^4F$ 项中找到一个对角化的分类算子