高等师范专科学校教材

数学分析

•上册•

SHUXUE

FENXI

华东师范大学数学系

郑英元 毛羽辉 宋国栋 编

高等师范专科学校教材

数学分析

上册

华东师范大学数学系 郑英元 毛羽辉 宋国栋 编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书系根据国家教委师范司1988年审定的二年制高等师范专科学校《数学分析教学大纲》，在华东师范大学数学系编《数学分析》(在1987年国家教育委员会举办的全国优秀教材评选中获全国优秀奖)的基础上修改而成，保持了原书的科学性、严谨性、逻辑性、师范性、可读性等特点.

本书分上、下两册出版.

上册内容：函数、极限、连续、导数、微分、中值定理与导数应用、极与限连续性(续)、不定积分、定积分及其应用. 此外，附有微积分发展简史、实数理论、积分表，书末有习题答案等.

本书可作为高等师范专科学校数学专业教材.

高等师范专科学校教材

数 学 分 析

上 册

华东师范大学数学系 郑英元 毛羽辉 宋国栋 编

高等教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

商务印书馆上海印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 12.25 字数 292,000

1990年3月第1版 1990年3月第1次印刷

印数 00,001—3,910

ISBN 7-04-002759-3/O·876

定价 3.65元

前　言

“数学分析”是高等院校数学专业、应用数学专业的一门重要基础课．它是进一步学习各有关后继课程的阶梯．对师范院校的学生来说，它又是深入理解中学数学的必要基础．

本书根据国家教委师范司1988年审定的高等师范专科学校二年制数学专业《数学分析教学大纲》，以我校数学系编的《数学分析》上、下册(第一版)(该书于1987年国家教育委员会举办的全国优秀教材评选中获全国优秀教材奖)为基础改写而成．它适用于讲授学时数为215左右(不包括习题课)的“数学分析”课程作为教材使用．

本书在体系结构的合理性、理论的严谨性、文字的可读性以及注意师范性等方面，继续保持我系编的《数学分析》一书的特点．它在极限论和一元函数微积分部分仍然保持应有的科学水准．在级数论与多元函数微积分部分，虽然受到学时数的限制，内容有所缩减，但在基本概念、计算与应用能力的培养方面仍给予足够的重视．

在某些具体内容上，本书与我系编的《数学分析》(第一版)相比有了一些变动．例如，极限论改用以“确界原理”作为出发点．根据几年来的教学实践，我们认为它同样易于为学生所理解，但在以它为工具证明其他命题时，却较为简捷、明瞭．因此，我们在第一章就提出“确界概念”．在第二章用它证明“单调有界定理”．在第四章用它证明实指数幂的性质．在第七章完成对实数完备性的论述，相应地，在附录II中改用戴德金分划定义实数，并证明了“确界原理”．这样修改使整个分析基础显得严格、完整、简炼，而又便于

教学.出于同样目的,我们在微分学中突出可微性概念,充实了凸函数知识,改进了极值充分条件的证明方法,等等.此外我们也删去了一些次要内容.

在附录部分,我们增加了张奠宙撰写的"微积分发展简史",目的在于期望读者对微积分的来龙去脉有所了解,这对于每一个数学教育工作者来说,尤其是必要和有益的.

本书中的部分内容用小号字排印,读者可酌情选用.为醒目起见,我们用记号 □ 表示命题证明或例题求解的结束.书内各节都附有习题,它们分为基本题与选做题两类,中间用一横线隔开.横线后的习题与各章的总练习题,读者可在教师指导下有选择地进行练习.上、下册书末均附有各章节计算题的答案.

程其襄教授始终关心本书的编写工作,他撰写了附录II"实数理论",并对全书提出了指导性的意见.郑英元负责全书的统一整理工作.我系数学分析教学组老师和许多兄弟院校老师都对本书的编写给予极大的支持与关心.对此,我们表示深切的感谢!

由于我们水平有限,书中缺点和不足之处在所难免,我们恳切希望读者对本书给予批评指正.

编　　者

1989.3.

JYI/51/07

目　录

第一章　函　数

第二章　数 列 极 限

第三章　函 数 极 限

第四章　函数的连续性

第五章　导数与微分

第六章　中值定理与导数应用

第七章　极限与连续性(续)

第八章　不 定 积 分

第九章　定　积　分

第十章　定积分的应用

第一章 函 数

§1 实 数

"函数"是数学分析中最基本的研究对象．本课程是在实数范围内研究函数．下面简要叙述实数的基本性质以及有关概念．

一 实数及其性质

我们在中学数学课程中知道，实数由有理数与无理数两大类组成，每一个有理数都可用分数形式 p/q(p, q 为整数，$q\neq 0$)表示，也可用有限十进小数或无限十进循环小数表示，而无限十进不循环小数则表示一个无理数．

实数有如下一些主要特性：

1．实数对加、减、乘、除(除数不为 0)四则运算是封闭的，即对任意两个实数施行加、减、乘、除(除数不为 0)运算后仍得实数．

2．实数是有序的，即任意两个实数 a 与 b 必满足下述三个关系式之一：$a<b$, $a=b$, $a>b$.

3．实数具有阿基米德(Archimedes)性，即对任意两个实数 a 与 b, $b>a>0$，必存在正整数 N，使得 $Na>b$.

4．实数全体具有稠密性，即任意两个不相等的实数之间必有另一个实数．

5．如果在一直线(通常画成水平直线)上确定一点 O 作为原点，指定一个方向为正向(通常把指向右方的方向规定为正向)，并规定一个单位长度，则称此直线为数轴．任一实数都对应数轴上唯一的一点，反之，数轴上每一点也都唯一地代表一个实数．正由

于全体实数与整个数轴上的点有着一一对应关系，故在以后的叙述中，常把“实数 a”与“数轴上的点 a”两种说法看作有相同的含义，而不加以区别.

为方便起见，通常将全体实数构成的集合记为 $\boldsymbol{R}$，即

$$\boldsymbol{R}=\{x \mid x\text{ 为实数}\}.$$

关于实数的定义与性质的详细论述可参阅本书附录II.

二　绝对值与不等式

实数 a 的绝对值定义为

$$|a|=\begin{cases} a, & a\geqslant 0, \\ -a, & a<0. \end{cases}$$

从数轴上来看，实数 a 的绝对值 $|a|$ 是点 a 到原点的距离.

关于绝对值有如下一些性质：

1. $|a|=|-a|\geqslant 0$；当且仅当 $a=0$ 时有 $|a|=0$.
2. $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$.
3. 关系式 $|a|<h$ 和 $|a|\leqslant h$ 分别等价于不等式 $-h<a<h$ 和 $-h\leqslant a\leqslant h\,(h>0)$.
4. 对于任何实数 a 和 b 有如下的三角形不等式

$$|a|-|b|\leqslant |a\pm b|\leqslant |a|+|b|.$$

5. $|ab|=|a|\,|b|$.
6. $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$.

下面只证明性质 4，其余性质由读者自行证明.

由性质 2 有

$$-|a|\leqslant a\leqslant |a|,\quad -|b|\leqslant b\leqslant |b|.$$

两式相加后得到

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant (|a|+|b|).$$

根据性质 3，上式等价于

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|. \tag{1}$$

将上述 b 改为 $-b$ 后,(1)式仍然成立. 这就证明了性质 4 的右半部分. 又由 $|a|=|a-b+b|$,根据(1)式有

$$|a|=|a-b+b|\leqslant|a-b|+|b|.$$

于是

$$|a|-|b|\leqslant|a-b|. \tag{2}$$

当(2)中 b 改为 $-b$ 时,(2)式仍然成立. □

最后列出两个以后要用到的不等式:

伯努利(Bernoulli)不等式 设 $h>-1$, n 为自然数,则有

$$(1+h)^n\geqslant 1+nh.$$

读者可运用数学归纳法证明这个不等式对一切自然数 n 成立.

平均值不等式 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 n 个正实数,则有

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n),$$

即几何平均值不超过算术平均值. 在中学数学课本中已经证明了 $n=2$ 和 $n=3$ 的情形, 其一般证明将留作第六章总练习题 12 由读者完成.

习　　题

1. 设 a 为有理数, x 为无理数,试证明:

(1) $a+x$ 是无理数;　　(2) 当 $a\neq 0$ 时, ax 是无理数.

2. 试在数轴上表示出下列不等式的解:

(1) $|x|<3$;　　(2) $|x-2|\geqslant 1$;

(3) $x(x^2-1)>0$;　　(4) $|x-1|<|x-3|$;

(5) $\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}\geqslant\sqrt{3x-2}$.

3. 设 $x\neq 0$, 证明: $\left|x+\frac{1}{x}\right|\geqslant 2$, 并说明等号何时成立.

4. 证明: 对任何 $x\in\boldsymbol{R}$ 有

(1) $|x-1|+|x-2|\geqslant 1$;　　(2) $|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant 2$.

5. 设 a, b, c 为三个正实数,证明

$$|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}|\leqslant|b-c|.$$

你能说明此不等式的几何意义吗?

6．试用数学归纳法证明伯努利不等式.

7．设 p 为自然数．证明:若 p 不是完全平方数,则 $\sqrt{p}$ 是无理数.

8．设 a 与 b 为给定的实数．试用不等式符号(不用绝对值符号)表示下列不等式的解:

(1) $|x-a|<|x-b|$; (2) $|x-a|<x-b$;

(3) $|x^2-a|<b$.

9．设 $x>0$, $b>0$ 且 $a\neq b$．试证明 $\frac{a+x}{b+x}$ 介于 1 与 $\frac{a}{b}$ 之间.

10．利用平均值不等式证明:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},\quad n=1,\ 2,\ \cdots.$$

§2 数集·确界原理

本节将首先定义 $\boldsymbol{R}$ 中两类重要的数集——区间与邻域,然后讨论有界集,给出上、下确界概念和在本书中作为极限理论出发点的确界原理.

一 区间与邻域

设 $a, b\in\boldsymbol{R}$, 且 $a<b$, 则称数集 $\{x|a<x<b\}$ 为**开区间**,记作 (a, b); 数集 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**, 记作 $[a, b]$; 数集 $\{x|a\leqslant x<b\}$ 和 $\{x|a<x\leqslant b\}$ 称为**半开半闭区间**,分别记作 $[a,b)$ 和 $(a,b]$. 以上这几类区间统称为**有限区间**.

根据实数集与数轴上点的一一对应关系,开区间 (a,b) 表示数轴上 a、b 两点之间的所有点的全体(不包括 a, b 两点), 闭区间 $[a, b]$ 比开区间 (a, b) 多两个端点 a 和 b.

满足关系式 $x\geqslant a$ 的全体实数,可用区间 $[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$ 来表示,其中符号 ∞ 读作“无穷大”, $+\infty$ 读作“正无穷大”. 同样

定义$(a, +\infty)=\{x|x>a\}$，$(-\infty, a]=\{x|x\leqslant a\}$和$(-\infty, a)=\{x|x<a\}$，其中 $-\infty$ 读作“负无穷大”. 全体实数 $\boldsymbol{R}$ 的区间表示形式是$(-\infty, +\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$. 以上这几种区间都称为**无限区间**. 有限区间和无限区间统称为**区间**.

满足绝对值不等式$|x-a|<\delta$的全体实数称为**点 a 的 δ 邻域**，记作

$$U(a, \delta)=\{x|\,|x-a|<\delta\},$$

或简记为$U(a)$. 满足不等式$0<|x-a|<\delta$的全体实数称为**点 a 的空心 δ 邻域**，记作

$$U^{\circ}(a, \delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\},$$

或简记为$U^{\circ}(a)$.

注意 点 a 的空心邻域与点 a 的邻域之间的差别在于点 a 的空心邻域不包含点 a.

以后我们还常用到下面一些记号. 设 δ 为正数，记

$$U_{+}(a, \delta)=\{x|0\leqslant x-a<\delta\},$$
$$U_{-}(a, \delta)=\{x|-\delta<x-a\leqslant 0\},$$

分别称为**点 a 的 δ 右邻域**和**点 a 的 δ 左邻域**，或简记为 $U_{+}(a)$和$U_{-}(a)$. 另外，对于充分大的正数 M，记

$$U(\infty)=\{x|\,|x|<M\},\ U(+\infty)=\{x|x>M\},$$
$$U(-\infty)=\{x|x<-M\},$$

分别称它们为 **∞ 邻域、$+\infty$ 邻域**和 **$-\infty$ 邻域**.

二 有界集·确界原理

设 $S=\{x\}$ 为 $\boldsymbol{R}$ 中的一个数集. 若存在数 $M(L)$，使得对一切 $x\in S$，都有 $x\leqslant M(x\geqslant L)$，则称 S 为**有上(下)界的数集**，数 $M(L)$称为 S 的一个**上(下)界**. 若数集 S 既有上界又有下界，则称S 为**有界集**. 若 S 不是有界集，则称它为**无界集**.

例如，自然数全体构成的数集 N，是一个有下界的数集，任何不大于 1 的实数都可作为 N 的下界．但 N 没有上界，因而它是无界集．任何有限区间都是有界集，由有限个数组成的数集也是有界集．任何无限区间都是无界集．

若一个数集 $\{x\}$ 有上界，则它就有无限多个上界；在这些上界中最小的一个常具有重要的作用，称它为数集 $\{x\}$ 的上确界．同样，有下界的数集 $\{x\}$ 的最大下界称为 $\{x\}$ 的下确界．下面给出上、下确界的精确定义．

定义 1　对于给定的数集 $S=\{x\}$，若数 η 满足条件：

(i) η 是 S 的上界，即对一切 $x\in S$，有 $x\leqslant\eta$；

(ii) 对任何小于 η 的数 α，必存在 $x_0\in S$，使得 $x_0>\alpha$．

则称数 η 为数集 S 的**上确界**，记作

$$\eta=\sup S \quad 或 \quad \eta=\sup_{x\in S} x\text{①}.$$

读者可以看到，定义 1 中的条件 (i) 说明数 η 是 S 的一个上界，而条件 (ii) 表明比 η 小的数不再是 S 的上界，即 η 是 S 的最小上界．所以 S 的上确界正是 S 的最小上界．

定义 2　对于给定的数集 $S=\{x\}$，若数 ξ 满足条件：

(i) ξ 是 S 的下界，即对一切 $x\in S$，有 $x\geqslant\xi$；

(ii) 对任何大于 ξ 的数 β，必存在 $x_0\in S$，使得 $x_0<\beta$．

则称数 ξ 为数集 S 的**下确界**，记作

$$\xi=\inf S \quad 或 \quad \xi=\inf_{x\in S} x.$$

同样，定义 2 中的两个条件表明：S 的下确界正是 S 的最大下界．

例 1　求开区间 $(0,1)$ 的上、下确界．

---

① sup 是拉丁文 supremum（上确界）一词的简写；下面的 inf 是拉丁文 infimum（下确界）一词的简写．

解 容易看出，数集$(0, 1)$最小的上界是1，最大的下界是0；但严格地讲，我们还须分别按定义1和定义2中的两个条件来验证．事实上，(i) 1显然是$(0, 1)$的上界；(ii) 对任何实数$\alpha<1$，取$x_0=\max\left(\frac{1+\alpha}{2}, \frac{1}{2}\right)$①，则$x_0\in(0, 1)$，且$x_0>\alpha$．按定义1，数1是$(0, 1)$的上确界．类似地可验证0是$(0, 1)$的下确界．□

读者同样可证明：闭区间$[0, 1]$与开区间$(0, 1)$有相同的上、下确界．

注意 1) 从上面的例子可见，若数集S有上确界η，则η可能属于S，也可能不属于S．容易证明：$\eta\in S$的充要条件是η为S中的最大值．下确界与最小值也有类似的关系．

2) 若数集S的上(下)确界存在，则一定是唯一的．

例2 求数集$E=\left\{\frac{(-1)^n}{n}\,\middle|\, n=1, 2, \cdots\right\}$的上、下确界．

解 将数集E中的数依次列出：

$$-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots,$$

可见其最大值为$\frac{1}{2}$，最小值为-1．故按前面的说明，上确界

$$\sup E=\frac{1}{2},$$

下确界$\inf E=-1$．□

对于无界集来说，上、下确界中至少有一个不存在．例如，自然数集$\boldsymbol{N}$只有下确界$\inf \boldsymbol{N}=1$，而不存在上确界．

关于数集确界的存在性问题，本书给出如下公理：

确界原理 非空有上(下)界的数集，必有上(下)确界．

这个原理指出：凡有上界的非空数集，一定有上确界，有下界

① "max"是"最大"(maximum)一词的简写，记号$\max\{x\}$表示数集$\{x\}$中的最大数．