微积分之谜新探索

师教民 著

献给未来的科学家

河北科学技术出版社

微积分之谜新探索

师教民　　著

河北科学技术出版社

微积分之谜新探索

师教民　　著

河北科学技术出版社出版（石家庄市北马路45号）

河北新华印刷一厂印刷　河北省新华书店发行

850×1168毫米 1/32　14印张　343,000字　1989年5月第8版

1989年8月第1次印刷　印数：1—2300　定价：5.40　元

ISBN 7-5375-0203-x /O·1

内 容 提 要

本书研究了300年来科学家们一直想解决但又没有解决的微积分本质和理论基础问题，建立了一套新的理论体系，揭开了微积分之谜。

本书将数学和哲学结合起来，不仅为哲学的研究开辟了新领域，而且知道了无穷小究竟小到多少，微分到底微到什么程度，瞬时真正包含多少时间。从而揭示出微积分的本质，使人们从矛盾中解脱出来，更能使初学者易于接受。

本书把无穷小应用到了微积分里去，为微积分的运算开辟了捷径，使应用微积分的学科能发生根本性的简化，从而使人们从繁琐中解放出来，更能使初学者易于掌握。

本书可供初中以上文化程度的人学习微积分之用，特别适合于大专院校师生，中学、中专教师以及理科、工科、哲学等有关科研人员、工程技术人员、自学人员阅读与参考。

序　言

我的朋友师教民同志多年从事教学工作。他发现在数学分析的教学中，微分的定义和概念对初学者来说是一道难关。一个变量的微分既等于零又不等于零的辩证关系从形式逻辑的角度来看是难于接受的，而微分的形式定义又与它的实质不尽一致。因此，在形式化的数学推导中很容易出现使初学者感到困惑的矛盾。

为了解决这个问题，师教民同志提出了一套新的概念和逻辑体系。根据他的经验，这套体系可以避免上述困难，使初学数学分析的人易于接受。

众所周知，微积分学的辩证性质和它的严密基础一直是数学家研究的对象。虽然波尔查诺（B.Bolzano）、柯西（A.Cauchy）和外尔斯特拉斯（K.Weierstrass）等大数学家的工作为数学分析建立了严密的体系，但是，这种严密化并不等于数学分析的基础研究已经终结，更不意味着数学分析教学中的问题已彻底解决。所以，在这方面的努力仍然是很有意义的。

我认为师教民同志在这方面的工作是一个新的尝试。本书是他多年来工作的总结。师教民同志积极追求真理的精神是十分可贵的。这本书的出版不但可以使他的研究成果公诸于世，也能对从事数学分析教学的老师们有一定的参考价值。

何善堉

1987年12月于北京

前 言

社会生产的发展，推动了自然科学的发展．从而使数学从研究常数发展到研究变数；从研究有限量发展到研究无限量．于是，微积分就应运而生了．

最早出现的微积分是牛顿、莱布尼茨分别在17世纪60年代和70年代，以“无穷小量”为基点创立的．因此，人们便把以“无穷小量”为基点研究微积分的方法叫做无穷小量分析法．

由于这种方法的优越性，使得它在科学的论坛上统治了将近100年．尽管它在实践中无所不能，但终因理论上的神秘而被淘汰．

接着，达兰贝尔等人创立并发展了极限学说．到19世纪初，柯西等人以“极限过程”为基点修改了微积分．因为这种以“极限过程”为基点研究微积分的方法建立在因具有连续性而成为标准数的实数域上，所以把它叫做标准分析法．

由于这种方法回避了无穷小量分析法所显示的神秘，掩盖了无穷小量分析法所暴露的矛盾，并将微积分的运算发展的比较成熟．因此，它被公认为微积分的经典理论．

但是，由于它采取了回避矛盾、掩盖矛盾的做法，从而没有揭示矛盾、解决矛盾．所以，它并未将微积分隐匿在实践中的原型彻底挖掘出来；并未将微积分蕴含在客观中的本质真正揭示清楚；并未将微积分包藏在大自然中的本来面貌完全暴露无遗．总之一句话，并未全面地揭开微积分之谜！

正因为如此，才使得人们对微积分的概念产生了多种不同的理解；微积分的本质和理论基础仍然是科学家们研究的对象．

例如：在我向专家们请教时，就收到了“$dx=\Delta x$”、“$dx=\Delta x\to 0$”、“$dx=0$”（dx、Δx 分别为函数自变量的微分和增量）等多种“截然相反”的解答。还有不少专家来信说，“关于微积分的理论，至今未得统一解决”。

又如：德国经济学家、哲学家马克思在19世纪80年代写成了与经典理论观点不同的《数学手稿》，对微积分进行了突破性的研究，形成了马克思数学观点。虽然马克思数学观点没有建立起完整的理论体系，成为一种独立的分析方法，但它对揭示微分本质做出了卓越的贡献。美国逻辑学家、数学家鲁滨逊也争脱经典理论的束缚，改弦更张，另立炉灶，于20世纪60年代创立了非标准分析法。虽然可以说它带有为早已埋葬的无穷小量分析法扬幡招魂的色彩，但它也不愧是对微积分理论研究的一种新尝试。虽然它还由于理论脱离实际和方法本身的复杂而不能被更多的人理解和公认，但它完全有资格作为一个派别与统治久远的标准分析法分庭抗礼！

另外，鲁滨逊还谈到许多科学家对此也进行了“种种尝试”。（参见文献[1]第339页、文献[16]第322页）

在国内外仍有“不同认识”和“种种尝试”的情况下，我经过24年的思考与比较，11年的写作与修改，8年的请教与答辩，在一些数学界、哲学界和物理学界的老前辈们的关怀、帮助和指导下，写成了本书。本书共分两篇，第一篇从正面探索了微积分之谜；第二篇从反面衬托出探索方法的简便与巧妙。

本书的中心是“辩证分析法”。该方法保留了标准分析法的长处，吸取了无穷小量分析法的精华，采纳了非标准分析法开辟新数域的做法，接受了马克思数学观点的哲学思想，以“无穷小数”为基点，用辩证的思想方法，改造了微积分。因此，把它叫做辩证分析法。

本书认为，微积分的本质之所以历经名家而未能彻底揭示清楚，微积分的理论基础之所以历时300年而没有真正建立起来，

一是因为思想方法的拘泥；二是因为数域的限制；三是因为违反了理论来源于实践的原则。

17、18世纪的一些数学家陷入了形而上学的泥坑。他们认为世界上的万物都是非此即彼的，没有认识到对立统一规律是宇宙间的基本规律，没有搞清量变与质变之间的相互转化过程。这种研究的问题和认识的境界之间的矛盾是微积分之谜无法揭开的思想根源。

微积分研究的中心问题是变量和无限量的计算问题。但却建立在常数的基础上。这种研究的问题和涉及的数域之间的矛盾是微积分之谜无法揭开的物质根源。

理论是来源于实践的，是实践的高度概括和总结。但标准分析法在解决无穷小量分析法逻辑困难的过程中，放弃了原有的实践原型，凭空想象地用增量代替了微分，从而出现了弧长等于相应弦长的错误（见图0.0.1），形成了历史的倒退。因此，理论脱离实际是微积分之谜无法揭开的基本根源。

而辩证分析法则不同，它将哲学与数学结合起来，不仅为哲学的研究开辟了新领域，使哲学理论又在数学中得到了证实，而且使人们对变数的认识从常数的框框中解放出来，为微积分本质的揭示和理论基础的建立提供了思想基础。

辩证分析法又以辩证的思想方法，按着数的产生与发展的规律定义了变化趋势和变数，从而使人们对变量和无限量的运算从常量和有限量的束缚中解脱出来，为微积分本质的揭示和理论基础的建立提供了物质基础。

辩证分析法还是从实践原型中直接抽出理论的。所以能反映客观实践的本来面貌，符合客观事物的发展规律。因而能使人们方便地联系实践原型和体会物理意义，从而把人们从抽象、玄妙、费解和矛盾中解救出来，为人们对微积分本质的认识和理论的理解指明了方向。

总之，辩证分析法知道了无穷小究竟小到多少，微分到底微

到什么程度，瞬时真正包含多少时间，从而揭示出微积分的本质，奠定了微积分的理论基础。辩证分析法还遵照集合论最高权威之一 A.H.Fraenkel 的意见，把无穷小应用到了微积分里去，开拓了一条通往微积分的捷径。从而解决了经典理论所不能阐明的问题，淘汰了标准分析法繁琐的推导与计算，使应用微积分的学科能发生根本性的简化。因而能使人们把注意力集中到关键的问题上，有利于发现新的结果，纠正旧的错误，解决尚未解决的难题，进而将人们对微积分的认识统一起来。

当然，它不可能是完美的，一定还会有许多缺点、弊病和错误，甚至完全是荒谬的。所以，我不幻想它，能够成为通往微积分之舟的指路灯，指引人们达到理想的彼岸；也不幻想它，能够成为打开微积分之锁的金钥匙，为了人类撬开神秘的大门。但是，我倒希望它，成为一块毛草的顽石，投入水中能激起无数美妙的涟漪；我还希望它，成为一块粗糙的青砖，抛到工地会招来许多闪光的宝玉。我更希望它，真正起到投石荡波、抛砖引玉的效果，使微积分的本质在这无数美妙涟漪的荡涤下清晰地揭示出来；使微积分的理论基础在那许多闪光宝玉的荟萃下胜利地建立起来。

最后还须声明，本书的出版，曾受到何善堉、孙念曾、苏步青、秦曾复、邹仁鋆、何文杰、吴振德、冯麟保、王元夔、李恩忠、王蕴清、白正林等诸位先生的关怀、指导和帮助。为此，我表示衷心感谢。并欢迎所有的人提出质疑、批评和指教。

师教民

1987 年 10 月于石家庄

?!

牛顿、莱布尼茨创立的无穷小量分析法在求 $y=x^2$ 的导 数y' 时为：令 x 变化增量 $dx\neq 0$，则 y 随之变化增量 dy，于是得：

$$y+dy=(x+dx)^2=x^2+2x\cdot dx+(dx)^2$$

$$\therefore\quad dy=2x\cdot dx+(dx)^2$$

$$\because\quad dx\neq 0$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=2x+dx$$

$\because$ dx 很小，$\therefore$ 可认为 $dx=0$

$$\therefore\quad y'=\frac{dy}{dx}=2x+0=2x$$

该求法虽然也凑出了正确的导数值，但终 因 $dx\neq 0$ 和 $dx=0$ 的矛盾而被淘汰。

柯西等人建立的标准分析法把函数自变量的微分 dx 定 义 为函数自变量的任意有限增量 Δx，但在导数定义中，又使定 义 为 dx 的 Δx 必须无限趋于0。这一矛盾使得质点沿图0.0.1中单位圆运动时出了问题。如：转角 φ 随弧长 s 和位矢 $\boldsymbol{r}$ 变化，故 φ 是 s 和 $\boldsymbol{r}$ 的函数。据标准分析法的导数定义有：

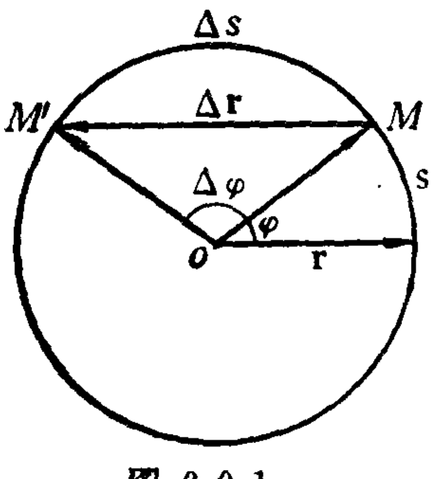

图 0.0.1

$$\frac{d\varphi}{ds}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{|\boldsymbol{r}|\Delta\varphi}$$

$$=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{1\cdot\Delta\varphi}=\lim_{\Delta s\to 0}1=1$$

$\therefore \quad d\varphi = ds$ ……………………………………………………①

$$\frac{d\varphi}{|d\boldsymbol{r}|} = \lim_{|\Delta r|\to 0} \frac{\Delta\varphi}{|\Delta \boldsymbol{r}|}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{|\Delta r|\to 0} \dfrac{2\arcsin\dfrac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{2}}{|\Delta \boldsymbol{r}|} = \lim\limits_{|\Delta r|\to 0} \dfrac{\arcsin\dfrac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{2}}{\dfrac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{2}} = 1 \\ \lim\limits_{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\to 0} \dfrac{\Delta\varphi}{2\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}} \dfrac{\text{当 } 2\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}\to 0}{\text{时有}\dfrac{\Delta\varphi}{2}\to 0} \lim\limits_{\frac{\Delta\varphi}{2}\to} \dfrac{\dfrac{\Delta\varphi}{2}}{\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}} = 1 \end{cases}$$

$\therefore \quad d\varphi = |d\boldsymbol{r}|$ ……………………………………………………②

比较①、②式得：

$ds = |d\boldsymbol{r}|$ ……………………………………………………③

但据标准分析法关于函数自变量的微分 $dx = \Delta x$（有限增量）的定义知：函数 φ 的自变量 s 和 $\boldsymbol{r}$ 的微分值分别为：

$ds = \Delta s$（Δs 为有限增量）…………………………④

$|d\boldsymbol{r}| = |\Delta \boldsymbol{r}|$（$|\Delta \boldsymbol{r}|$为有限增量）…………………………⑤

比较③、④、⑤式得：

$\Delta s = |\Delta \boldsymbol{r}|$（即有限弧长等于相应的有限弦长）。

因此，标准分析法中的 $dx = \Delta x$（有限增量），$dx = \Delta x \to 0$，由 $dx = \Delta x$ 和 $dx = \Delta x \to 0$ 的矛盾推出的有限弧长 Δs 等于相应的有限弦长$|\Delta \boldsymbol{r}|$的错误分别相似于无穷小量分析法中的 $dx \neq 0$，$dx = 0$，由 $dx \neq 0$ 和 $dx = 0$ 的矛盾引起的导数无法计算。也就是说，标准分析法的逻辑困难与无穷小量分析法被淘汰的原因是相同的。而无穷小量分析法因此被淘汰，难道标准分析法就不应因此被淘汰吗?!

?!

求函数 $y=x^2$ 的导数：

无穷小量分析法求法为：

$$y+dy=(x+dx)^2$$
$$=x^2+2x\cdot dx+(dx)^2$$

$\because\quad y=x^2$

$\therefore\quad dy=2x\cdot dx+(dx)^2$

$\because\quad dx\neq 0$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=2x+dx$$

令 $dx=0$，则 $dy=0$

于是得：

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$$
$$=2x+0=2x$$

标准分析法求法为：

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^2$$
$$=x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$$

$\because\quad y=x^2$

$\therefore\quad \Delta y=2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2$

$\because\quad \Delta x\neq 0$

$$\therefore\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=2x+\Delta x$$

两边取极限，

则得：

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$$

以上两种求导方法看上去好象很不一样，但本质上是相同的。如：第一，上述二法中的 dx 和 Δx 开始变化时都是不为0的有限增量，故 dx 和 Δx 本质上相同。第二，从极限求法中我们知道，标准分析法最后的结果 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$ 中的 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$ 是因为令 $\Delta x=0$ 并将 $\Delta x=0$ 代入 $2x+\Delta x$ 后算出的。即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x+0=2x$。又由于

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)$，所以当该式右边已令 $\Delta x=0$ 后，该式左边也必然有 $\Delta x=0$，从而有 $\Delta y=0$，所以有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{0}{0}$。这样，标准分析法最后的结果

$$\begin{array}{lcccc} y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} & = & \lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x) & = & 2x \text{ 就变为：} \\ \quad\quad\Vert & & \Vert & & \\ y'=\quad\dfrac{0}{0} & = & 2x+0 & = & 2x \end{array}$$

从而变得与无穷小量分析法的求导结果完全一样了。只不过是标准分析法将无穷小量分析法中直接令 $dx=0$ 和由此得到 $\dfrac{0}{0}$ 的过程留在心里而用极限符号 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)$ 和 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 代替它们写出来而已。

这样，标准分析法的逻辑困难与无穷小量分析法被淘汰的原因就因为都是“先令 $\Delta x(dx)\neq 0$ 而进行除法运算，然后再令 $\Delta x(dx)=0$ 求出导数值”而完全一样了。那么，无穷小量分析法因此被淘汰，为什么标准分析法就不能因此被淘汰呢?!

目　　录

第一篇　辩证分析法

第二篇 微积分发展的历史过程