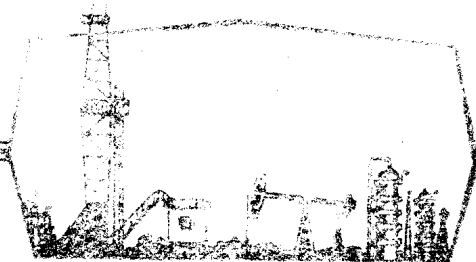


高等学校教学用书

声波测井原理

楚泽涵编著



石油工业出版社

声 波 测 井 原 理

楚 泽 涵 编 著

石 油 工 业 出 版 社

内 容 提 要

本书是石油院校矿场地球物理专业教学用书,是1980年石油工业出版社出版《声波测井原理》一书的重写本。主要内容包括:声波测井方法的岩石弹性力学及声学物理基础;声波测井所用换能器的工作原理及性能;国内外普遍采用的声速、声幅、声波全波列等主要声波测井方法的原理、各种影响因素及解释方法。还介绍了声波测井的其它各种新方法。本书侧重对各种声波测井方法的物理基础进行讨论,并介绍国内外近年来在声波测井理论及实践方面的进展。除供石油院校测井专业学生使用外,本书还可供从事测井工作的工程技术人员、科研人员及石油地质、物探等专业的师生参考。

声 波 测 井 原 理

楚 泽 涵 编著

*

石油工业部教材编译室编辑(北京902信箱)

石油工业出版社出版

(北京安定门外外馆东后街甲36号)

顺义燕华营印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

*

787×1092毫米 16开本 印张 12¹/₂ 308千字 印 1—2000

1987年4月北京第1版 1987年4月北京第1次印刷

书号: 15037·2677 定价: 2.00元

前 言

本书是1980年石油工业出版社出版的《声波测井原理》的重写本。

声波测井方法是矿场地球物理技术中发展最快的分支。近十年来, 声波测井在理论研究、野外工作方法及观测资料的处理和应用等方面都有明显发展。

本书是在近年来讲授“声波测井原理”课程基础上编写的, 有一部分内容反映了编著者所在科研组多年来的科研成果和经验体会。和《声波测井原理》1980年版本相比, 这次篇幅增加近一倍。除了补充岩石弹性力学和岩石声学的基础知识外, 根据国外近年来声波技术的发展, 还增加了“声波全波列测井”及“声波井下电视、体积扫描测井及其它声波测井方法”等两章。此外, 对用声波测井资料估算储集层孔隙度, 解决各类地质问题等方面的内容也做了补充。

书中各物理量的单位, 除个别例外, 一律采用《中华人民共和国法定计量单位》中所规定的单位, 即国际上通用的国际单位制(SI制)。各种物理量的符号, 则主要参考科学出版社1983年出版的《声学手册》(马大猷等编著)。

国外系统阐述声波测井原理, 反映声波测井发展最新成就的资料不多, 本书的编写还只是一种探索和尝试, 缺点和不足在所难免, 敬请批评指正。

本书的编写得到中国科学院科学基金组织的资助。华东石油学院北京研究生部的冯世瑄教授仔细审阅了全稿, 并帮助进行修改和补充。本人在此一并致谢。

楚泽涵

1985年7月于北京

目 录

绪 论	(1)
第一章 岩石弹性力学基础	(5)
第一节 弹性体的应力和应变	(5)
第二节 应变和应力的关系, 广义虎克定律	(10)
第三节 平衡方程	(16)
第四节 波动方程	(19)
第五节 岩石的变形和应力	(31)
第六节 岩石声速和弹性的关系	(36)
第二章 岩石声学基础	(42)
第一节 声场的基本物理量	(42)
第二节 声波在两种介质分界面上的反射和折射	(44)
第三节 声波传播过程中的衰减	(49)
第四节 岩石对声波的吸收	(55)
第三章 换能器——井下声波的产生和接收	(59)
第一节 磁致伸缩效应和压电效应	(59)
第二节 逆压电效应和声波的发射	(63)
第三节 换能器的振动模式和激化方式	(66)
第四节 换能器的参数	(68)
实 验 压电换能器谐振特性的测量	(73)
第四章 声波速度测井	(75)
第一节 声波在井壁上的折射与滑行波	(75)
第二节 滑行波的接收条件	(84)
第三节 时差的记录, 声系	(87)
第四节 声速测井的误差和干扰	(93)
第五节 岩层的声速	(96)
第六节 用声速测井资料估算储集层孔隙度的方法	(100)
第七节 声速测井资料的地质应用	(103)
实验一 观察滑行波	(112)
实验二 岩样纵波速度的实验室测量	(114)
附 录 用蒙特卡罗法根据声速测井资料估算储集层孔隙度	(115)
第五章 声幅测井	(129)
第一节 套管波	(129)
第二节 影响套管波幅度的各种因素	(132)
第三节 声幅测井解释方法	(136)
第四节 声波变密度测井	(140)

第五节 裸眼井声幅测井.....	(144)
第六章 声波全波列测井.....	(147)
第一节 声系及记录方式.....	(147)
第二节 全波列测井资料的解释方法.....	(153)
第三节 井壁波场传播模式研究介绍.....	(161)
第四节 长源距低频管波测井.....	(167)
第五节 声波资料在岩石工程力学方面的应用.....	(171)
第七章 声波井下电视、体积扫描测井及其它声波测井方法.....	(176)
第一节 声波井下电视测井.....	(176)
第二节 体积扫描测井及其它反射波法测井.....	(181)
第三节 环形声波测井.....	(184)
第四节 噪声测井.....	(186)
结束语 声波测井技术发展的回顾和展望.....	(189)
主要参考文献.....	(192)

绪 论

在石油勘探和开发阶段,需要对所钻井眼的垂直剖面进行地球物理测井,划分井剖面的岩性,准确地确定各种不同地质年代的泥岩、砂岩、石灰岩、白云岩的埋藏深度,并进而判断有渗透性的含油(气、水)储集层的位置。然后估算储集层的孔隙度、渗透率、含油气饱和度等参数,为探明含油、气层在井下的形态,计算储量及制定油、气层开采技术措施,提供资料和数据。

为此,在井钻完后要对井剖面的各种物理参数进行测量。例如测量井剖面岩层电阻率变化情况,在某些条件下可以区分含油气层和含水层;测量井剖面上的自然电场分布情况,可以划分渗透性层位;测量井剖面上自然放射性可以确定岩层中的泥质矿物含量,并确定含放射性矿物的层位;测量井剖面上的中子特性,可以确定储集层中氢、氯、氧、碳等元素的含量等。

钻井工程中的一些问题也可以用测井方法来解决,如井筒和井内套管之间环形间隙中水泥封固情况的检查,井眼直径和井斜测量等。油藏开发过程中,为了增产,要对储集层进行酸化或压裂,利用测井方法除了可以判断储集层的岩性外,还可以求得井下储集层的弹性力学性质数据(破裂强度、杨氏弹性模量、泊松比等),为选择压裂参数提供依据。测井方法还可以检查酸化、压裂效果,研究油田开发过程中油层结构的变化,还能预测储集层压力、产能等参数。

测井的野外工作是将井下仪器通过电缆放到井下,对井剖面的物理参数进行测量,并将所测参数转成电信号,经电缆送到地面进行模拟记录或数字记录。所得结果是某一物理参数随深度变化的关系曲线,或是记录在磁带上的某一物理参数在各个深度上的数值。

对所测得的资料配合地质录井资料等进行综合分析,可以了解井剖面岩性和岩层物理性质变化的情况。

声波测井方法是测量记录井剖面上岩层的声学性质——岩石的声速、声波在岩石中的衰减规律等,借此判断岩性和估算储集层孔隙度及岩层的弹性力学性质,了解井壁附近岩层的性质和分布的方法。下面简述国内外现有的几种主要声波测井方法。

一、声波速度测井

声波速度测井(也称声速测井或声波时差测井)是目前声波测井工作量最大、并为国内各油田普遍采用的一种方法。是用来研究井剖面岩性、估算含油(气、水)层孔隙度的一种主要测井方法。

声速测井是测量井剖面声波纵波速度 C_p 的倒数(即声波纵波在一米厚岩层中传播所需的时间,在测井中叫时差,记为 $\Delta t = \frac{1}{C_p}$),并以声速作为区分不同岩性地层的标志。例如华北平原第三系地层,泥岩时差约为550微秒/米,砂岩时差为260~380微秒/米,古生代及震旦系致密石灰岩时差为154微秒/米,白云岩时差为143微秒/米。

通常,将没有孔隙的致密岩石称为岩石骨架,其声波时差(或称时差)用 Δt_{ma} 表示,在有孔隙的岩石中,由于孔隙中充填了声速较低的油、水或气,致使孔隙岩层的声速低于岩石骨

架声速，亦即声波在单位厚度的孔隙岩层中传播所需时间要比在相同岩性的单位厚度致密岩层中声波传播时间长。在岩性纯净的条件下，可以写成

$$\Delta t = \Delta t_{ms} + f(\phi)$$

式中 Δt ——孔隙岩层的声波时差；

ϕ ——岩层的孔隙度。

$f(\phi)$ 是声波时差和孔隙度关系的某个函数，表示由于孔隙的存在，岩层的时差比岩层骨架时差增大的部分。当 $\phi > 0$ 时， $f(\phi) > 0$ ；而当 $\phi = 0$ 时， $f(\phi) = 0$ 。

现用的声速测井仪器是测量声波在一定间距地层中传播所需的时间来求时差的。在图 1 上，F 为声源，每秒发生 20 次频率为 20 千赫的脉冲声波。声波经过井内泥浆（声速为 c_1 ）及地层（声速为 c_2 ）传播，满足临界入射条件 $\sin i = \frac{c_1}{c_2}$ 的入射声波将在界面上产生折射角为 90° ，沿井壁表面传播的侧面波（测井中称为滑行波）。记录滑行波首波到达接收换能器 j_1 和 j_2 的时间差 $\Delta t = t_2 - t_1$ ，由于接收换能器 j_1 和 j_2 间的距离 l (0.5 米) 已知，即可得出井壁岩层的声波时差 $\Delta t = \frac{t_2 - t_1}{l}$ 。

声速测井地面仪器的作用是，将井下接收换能器在不同时间分别接收到的滑行波首波变换成一个宽度等于 $\Delta t = t_2 - t_1$ 的正方波（称为记录波），然后将其积分（或转换成数字量）并送到经过刻度（标定）的记录仪器进行连续记录。

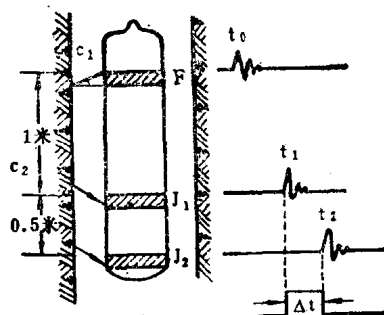


图 1 声速测井示意图

二、声幅测井

声波幅度测井（声幅测井）主要用于检查固井质量。

井钻完井下套管后，需要把套管和井壁之间的环形空间用水泥封固，以防止渗透层之间串通（俗称窜槽）。水泥在注入井内 17~22 小时后即可硬结。水泥和钢质套管胶结得好的井段，套管和套管外水泥的声阻抗差异较小，由井内仪器发出的声波，将有相当多的一部分经套管折射进入水泥环以及水泥环外的地层中。当套管和水泥胶结不好时，仪器发出的声波折射进入套管外的部分极少，绝大部分折回井内。因而在套管外水泥胶结良好时，在井内接收到的沿套管壁传播的声波幅度很小；而在套管外没有水泥胶结或胶结不好的层段，接收到的套管壁上的声波首波幅度很大。特别是在套管外有气层时，由于气侵，套管外有一段可能完全没有水泥，而全部被气体充填，这就使套管外的介质和套管的声阻抗差别急剧增大。此时，沿套管传播的声波在套管外壁和气体的分界面上，几乎全部都反射回套管，声幅测井所记录的声波首波幅度急剧增大，据此，可以判断套管外气层的位置。

三、声波全波列测井

声波全波列测井是声波测井技术发展中的一大突破，它使常规的对滑行纵波首波的记录（到达时间及幅度）扩展到对沿井壁传播的滑行纵波、滑行横波及井壁和井下仪器外壳之间的井内流体中的致导波等整个波列的记录，其中包括各种类型的波的速度、幅度及衰减、频率的改变及波形包络图形等极为丰富的与井壁岩层性质和特征有关的信息。由于对波列的记录采用了数字记录及模拟记录两种形式，有可能实现用计算机对声波全波列测井资料进行处理。

这样,除了可以判断岩性、估算储集层孔隙度以外,配合其它测井资料(如密度测井资料),还可以进一步估算岩层的弹性力学参数。近年来的研究表明,根据长源距声波全波列测井记录,可以判断储集层的孔隙形状以确定储集层的孔隙类型,还可能判断和估计孔隙中所含流体的相态和性质。

在套管井中,声波全波列测井的变种——变密度测井,可以提供水泥和套管、水泥和地层胶结情况的全面信息,从而为判断固井质量、确定窜槽位置提供可靠的依据。

国外试用的超长源距管波测井还可以在裸眼井及已下套管井中,根据井壁介质对井内流体中波的致导作用的强弱,对井壁和井下仪器外壳之间流体中传播的致导波的速度、幅度、频率变化进行记录,并有可能根据这些资料在裸眼井及下套管井中识别渗透层及非渗透层。

近年来,国外还试用环形声波测井探测沿井壁圆周环形传播的声波及井壁附近流体中的致导波。这种测井方法能识别井壁上和井轴方向平行的垂直裂缝,并能准确地确定其深度及在井壁上的方位。

四、声波井下电视和体积扫描测井

和其它测井方法(电法测井及放射性测井)相比,声波测井是唯一可能获得井壁直观图象的测井方法。由于井内流体对可见光是不透明的,因此在井下不采用通常的光学电视系统,而采用声波探测成像技术。

为了得到井壁上岩层孔隙和裂缝分布情况的直观图像,同时为了检查套管射孔后套管上的孔洞分布和是否有裂纹、砂眼等破损,在井下放置绕井轴以固定速率旋转(每秒1~6周)的声波换能器,探头每秒发射1500~3000次宽度为几十微秒(如20微秒)、频率为1或2兆赫的声脉冲,并用同一声波换能器接收从井壁上反射回来的回波。被井壁反射回来的声波信号的幅度大小取决于井壁表面的情况,光滑的表面比粗糙的表面反射条件好,硬介质比软介质反射条件好,与声波换能器表面平行的界面比与声波换能器表面倾斜的界面的反射条件好。总之,井壁表面的任何不规则都将改变反射信号的幅度。在地面上,根据井下传输上来的声波信号的幅度差异,调制电视显像管的辉度并进行照像记录,即可以确定井壁上声学界面的几何位置,并得到井壁上声学界面的完整图像。

在声波井下电视测井方法基础上发展起来的体积扫描测井,不仅可以得到井壁表面的直观图像,还可以探测井壁以外一定径向深度范围内的介质分布情况。其测量结果可以用一种“立体图”显示。其测量方法是,将声波井下电视测井仪记录井壁表面反射波的测量方式,改为不仅记录井壁表面的反射波信号(达到时间及幅度),还记录井壁外各介质界面(如套管外壁、水泥环边界、地层界面)上的反射波信号,并将测量结果进行数字编码录进磁带,用适当的硬件及软件将之转换成立体图像,能清晰地显示井壁周围空间介质的分布情况、裂缝位置等。

近年来,国外还使用一种在井下有八个按螺旋形排列、间隔为45°的声波换能器的井下仪器。八个换能器依次向套管发射声脉冲,然后由同一换能器接收套管及套管外各介质界面上反射的声波,根据这些波的到达时间及幅度,可以判断套管的变形、套管外水泥环的空间分布情况,准确判断窜槽的深度及方位。

五、噪声测井

记录井下自然声场(测井中称为噪声)分布,可以得到由于岩层应力变化引起声场分布的

变化,为地震预报和震情监测提供资料。在油气田的勘探开发过程中,在套管外出水或出气层(尤其是出气量大的层位)可以观测到明显的声扰动,记录井下自然声场分布情况,可以判断井下出水或出气的层位,并可检查水或气在套管外的串漏情况。

虽然在五十年代就发现井下流体的流动能产生可被记录的噪声,但直到七十年代,国外在噪声测井的原理、测量技术和解释方法等方面的研究才有了突破,特别是对井下各种自然声场震源的频谱分析有了进展,噪声测井作为一种成熟的技术开始在石油测井中得到应用:从定性判断出气、出水层位,判断窄槽层位,发展到根据模拟实验建立关系图版,用噪声测井资料定量计算套管外流体的流量、测定注水量、计算通过射孔孔眼的天然气流量等。

和电法测井、放射性测井相比,声波测井问世较晚,但近二十年来发展却是相当快的。其主要优点是不受泥浆性质、矿化度及泥浆侵入的影响。

声波测井所能解决的问题,从初期的判断水泥和套管的胶结质量发展到在裸眼井中判断岩性、估算孔隙度,乃至在下套管井中判断套管外各种声学性质不同的介质的分布,即除了可以判断套管和水泥、水泥和地层的胶结情况外,还可以研究地层中裂缝和孔洞的发育情况及开发过程中地层结构的变化等地质问题。而且,通过声波测井可以定量计算岩层的弹性力学参数。声波测井所探测的声波波场,开始是井壁上滑行纵波的首波到达时间或幅度,以后发展到对在井壁及井壁附近传播的波的整个波列进行探测记录。现在的声波测井,除了测量井壁上沿与井轴平行方向传播的声波外,还能够测量井壁径向上各声学界面的反射波以及沿井壁环形传播的声波;除了研究人工声场外,还可以对井下自然声场进行频谱分析;井下仪器的声系则从短源距的单发单收、单发双收声系发展成长源距、超长源距、可变源距的双发双收、多发多收声系;地面记录方式也从模拟照像记录发展成数字记录,并用计算机控制显示成立体、彩色图像。此外,对井壁孔隙介质中声场传播理论、声波测井资料解释方法等方面都有了明显的进展。声波测井已经和电法测井、放射性测井一样,成为一种重要的井下地球物理探测方法。

目前,我国各油田已经普遍采用国产声波测井仪器进行裸眼井的声波速度测井,并在已下套管的井中用声幅测井检查水泥和套管的胶结质量。某些油田、矿区还试验成功了声波井下电视、声波变密度等测井方法。个别地区开展过井下自然声场变化的测量试验工作。

近年来,国外一些测井公司在我国部分矿区的服务项目中,还有长源距声波全波列测井、噪声测井等最新的技术和方法。在记录上,则实现了数字记录,并用计算机对野外观测结果进行自动化处理。这些都有利于扩大测井资料的地质应用。

现在,声波测井资料已不仅限于解释一口井剖面上的岩性和估算储集层的孔隙度,和地震勘探的观测资料结合起来,在解决地下地质构造,判断岩性,识别压力异常层位,判断储集层中流体的性质等方面都有相当良好的前景。

第一章 岩石弹性力学基础

弹性力学是力学的一个分支。弹性力学或弹性理论研究弹性体由于受外力(或温度改变)等原因而发生的应力、形变和位移,以及形变和位移的传播。弹性力学所研究的弹性体,在外力作用下产生的加速度,不仅表现为物体的宏观运动,而且可表现为物体的变形。

在弹性力学中,所研究的物体被认为是弹性的,即物体在外力作用下发生变形,当外力取消时物体恢复原状,不存在剩余变形。弹性力学对被研究物体有如下的假定:(1)物体是连续的;(2)物体是均匀的;(3)物体是各向同性的;(4)物体受力后的变形和位移都是微小的;(5)物体是完全弹性的,即外力和变形之间存在某种固定的比例关系,亦即表征物体弹性的参数是常数。

弹性力学所研究的物体都是理想弹性体,而实际上岩石类介质并非理想弹性体。首先由于岩石中有孔隙、裂缝,造岩矿物骨架和胶结充填物性质也不同,因此岩石并非均匀介质。其次,岩石中有节理、层理,表现为各向异性。总之,岩石是一种非常复杂的物体。

由于任何物体在外力很小、因而变形很小时都可以当作弹性体处理,因此本章将先建立有关弹性体的应力和应变的概念,讨论应变和应力的关系,讨论弹性形变传播(弹性波)的物理过程,讨论岩石受力变形的各种模式及其特征。

第一节 弹性体的应力和应变

物体在外力作用下将发生变形,即物体受力的效果不是产生宏观运动,而是物体内部各个体积元(或各部分)之间相对位置的改变。在外力不超过一定限度时,只要取消外力物体便恢复原状,或者说物体内部各体积元之间的相对位置恢复到受外力作用前的状况。物体的这种属性称为弹性,受力时所发生的变形称为弹性变形(或形变)。若受力后发生变形,在外力取消后变形不完全消失,即物体内部各体积元之间相对位置不能恢复到原始状态,产生了剩余变形(或永久变形),物体的这种属性叫塑性。在外力及变形都很小时,物体的变形都可以视为弹性变形。具有弹性的物体称为弹性体或弹性介质。

若在外力作用下,弹性体中任意一体积元仅有体积的变化,而边角关系并不发生改变,或几何形状不发生改变,则弹性体的变形称为体形变(图1-1b)。发生体形变时,体积元各边的边长发生了变化,其变化率称为线应变。同理,体积元在发生体形变时,体积的变化率称为体应变。

在外力作用下,若体积元仅有形状的改变,而体积未发生改变,这种形变称为剪切形变(图1-1c)。弹性体发生剪切形变时,外力仅是使体积元各边的角度关系发生改变,这种边角关系变化称为角应变。

现在首先来分析在外力作用下,弹性体的线应变。设体积元在XY平面的投影为ABCD,发生形变后,体积元在XY平面上的投影变动到A'B'C'D'(注意,形状并未发生改变)。

在图1-2上,A点移动到A'点,其位移在X、Y轴上的投影分别为 u 及 v , u 及 v 均为体积元坐标 (x, y, z) 的函数。同样,B点移动到B'点,其位移在x轴的投影为 $u_1 = u(x + dx,$

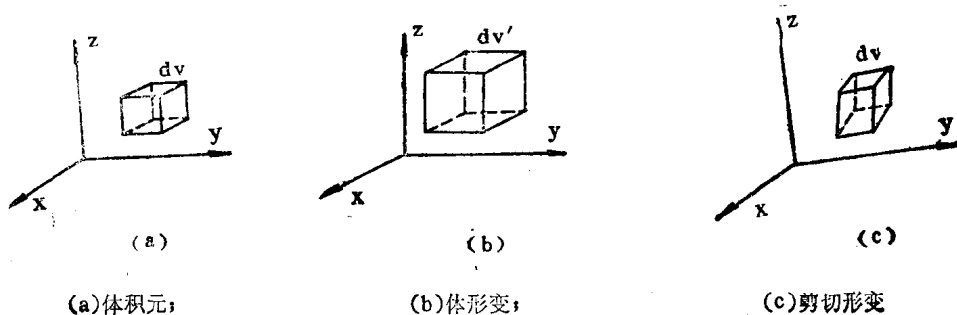


图 1-1 弹性体的体形变和剪切形变

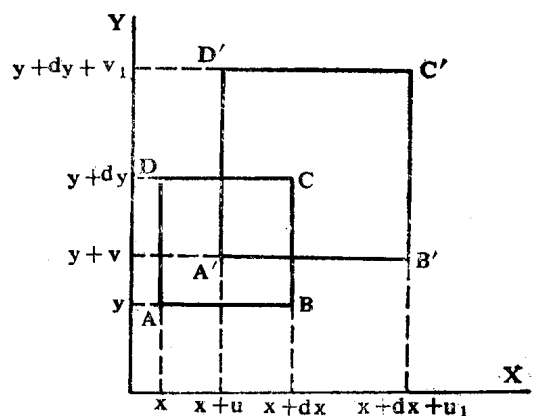


图 1-2 体积元在XY平面上的投影及线应变

y, z); 将 u_1 对 (x, y, z) 点按泰勒级数展开, 有

$$u_1 = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} dx^3 + \dots$$

考虑到位移变化和体积元边长之比 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 很小, 将展开式中二阶以上各项略去, 有

$$u_1 = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

线应变的定义是沿各坐标轴方向的相对伸长, 在X方向的线应变为

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{[(x+dx+u_1) - (x+u)] - [(x+dx) - x]}{(x+dx) - x} \\ &= \frac{u_1 - u}{dx} = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned}$$

即有

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1-1)$$

同理, 若记 v 为 A 移至 A' 处的位移, v_1 为 D 移至 D' 处的位移, 并考虑到 $v_1 = v + \frac{\partial v}{\partial y} dy$, 则在Y轴方向的线应变为

$$\begin{aligned}\varepsilon_{yy} &= \frac{A'D' - AD}{AD} = \frac{[(y+dy+v_1) - (y+v)] - [(y+dy) - y]}{(y+dy) - y} \\ &= \frac{v_1 - v}{dy} = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial y} dy - v}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}$$

即有

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1-2)$$

同理，可记 w 为 Z 方向上的位移，在 Z 轴方向上的线应变为

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1-3)$$

若弹性体的体形变是由线应变引起的，且形变前体积元体积为

$$dv = dx dy dz$$

形变后体积为

$$dv' = (dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx) (dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy) (dz + \frac{\partial w}{\partial z} dz)$$

体应变的定义为体积元体积的相对变化，即

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{dv' - dv}{dv} = \frac{(1 + \frac{\partial u}{\partial x})(1 + \frac{\partial v}{\partial y})(1 + \frac{\partial w}{\partial z}) dx dy dz - dx dy dz}{dx dy dz} \\ &= (1 + \frac{\partial u}{\partial x})(1 + \frac{\partial v}{\partial y})(1 + \frac{\partial w}{\partial z}) - 1 \\ &= 1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \\ &\quad + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} - 1\end{aligned}$$

省略式中二阶以上各项，得到

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1-4)$$

或写成

$$\theta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \quad (1-4')$$

若用矢量表示位移

$$\vec{u} = u \hat{i} + v \hat{j} + w \hat{k}$$

则由散度定义

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

即有

$$\theta = \nabla \cdot \vec{u} \quad (1-4'')$$

即体应变可用位移矢量的散度表示。

体积元受力变形时，除了发生体形变之外，还可能有形状的改变，即体积元在 XY 平面上投影（或在其它平面上的投影）的图形形状的改变。在图 1-3 上， $ABCD$ 为体积元形变前

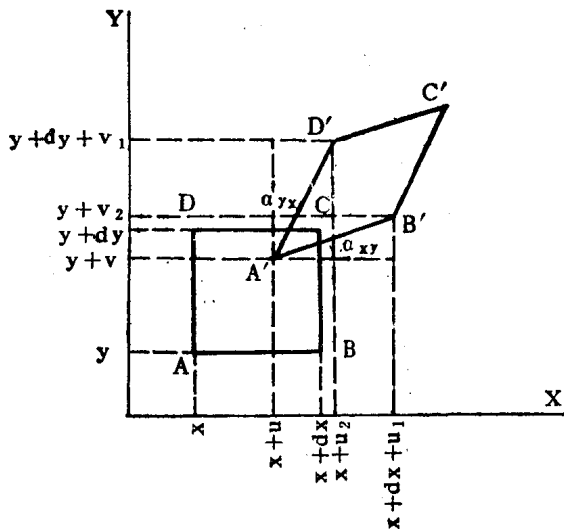


图 1—3 XY平面上的角应变

在XY平面上的投影, $A'B'C'D'$ 为形变后的投影。此时, A点移动到 A' 点, 其位移在X轴上的投影为 u , 在Y轴上的投影为 v ; B点移动到 B' 点, 其位移在X轴及Y轴上的投影分别为 u_1 及 v_2 , 且有

$$u_1 = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad v_2 = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

此时, 原平行于X轴的边AB转向Y轴的偏移角记为 α_{XY} ; 原平行于Y轴的边AD转向X轴的偏移角为 α_{YX} 。形状改变的多少, 可用在XY平面上总的角应变 ϵ_{XY} 来量度, 即

$$\epsilon_{XY} = \alpha_{XY} + \alpha_{YX}$$

由图 1—3, 当 α_{XY} 及 α_{YX} 均很小时, 近似有

$$\begin{aligned} \alpha_{XY} &= \tan \alpha_{XY} = \frac{B'B''}{A'B''} = \frac{(y+v_2) - (y+v)}{(x+dx+u_1) - (x+u)} = \frac{v_2 - v}{u_1 - u + dx} \\ &= \frac{v + \frac{\partial v}{\partial x} dx - v}{u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u + dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{(1 + \frac{\partial u}{\partial x}) dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{(1 + \frac{\partial u}{\partial x})} \end{aligned}$$

由于 $\frac{\partial u}{\partial x} \ll 1$, 有

$$\alpha_{XY} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

同理, 当AD移动到 $A'D'$ 时, D点移到 D' 时, 其位移在X轴及Y轴上的投影为 u_2 及 v_1 , 考虑到

$$u_2 = u + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad v_1 = v + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

原平行于Y轴的边AD偏向X轴的偏移角为

$$\begin{aligned} \alpha_{YX} &= \tan \alpha_{YX} = \frac{D'D''}{A'D''} = \frac{(x+u_2) - (x+u)}{(y+dy+v_1) - (y+v)} = \frac{u_2 - u}{v_1 - v + dy} \\ &= \frac{u + \frac{\partial u}{\partial y} dy - u}{v + \frac{\partial v}{\partial y} dy - v + dy} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{(\frac{\partial v}{\partial y} + 1) dy} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial v}{\partial y} + 1} \end{aligned}$$

由于 $\frac{\partial v}{\partial y} \ll 1$, 有

$$\alpha_{YX} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

在XY平面内的角应变为

$$\epsilon_{XY} = \epsilon_{YX} = \alpha_{XY} + \alpha_{YX} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1-5)$$

与之相仿，在YZ平面内的角应变为

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y = \alpha_{yz} + \alpha_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1-6)$$

在XZ平面内的角应变为

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x = \alpha_{xz} + \alpha_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1-7)$$

当弹性体由于受外力而发生形变的同时，弹性体内有内力产生，这种内力可以认为是发生形变的体积元受相邻体积元的力的作用，以使之恢复形变前的原状，当外力取消时，在这种内力的作用下，弹性体恢复原状。这种内力不是作用在某个点上，而是作用在体积元的全部或某几个侧面上，是一种面力，即沿面积分布的力。规定作用在单位面积上的弹性内力的大小为应力，因此，应力是在某一面积上的力的作用强度。总之，应力是在弹性体内部发生形变的体积元和相邻的体积元之间相互作用的量度，是弹性体反抗使弹性体发生变形的外力而产生的内力。两种“力”的作用效果是相反的，即外胁强使某体积元变形，而内应力的作用则是要使体积元恢复到变形前的原状。两者在量值上相等，而方向相反。考虑到在岩体内部，外胁强和内应力往往是对岩体内不同的部位而言，因而本书以后的各章节中，对两者并未作严格区分。但仍需强调，这两者是不同的。

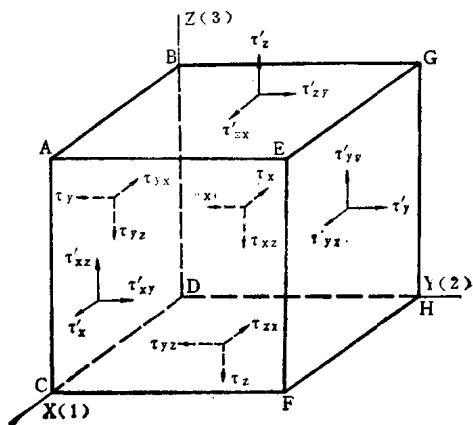


图 1—4 体积元各面上应力的方向

在图 1—4 上，对立方体体积元的每一个面上，应力可以分为垂直于体积元各面的正应力(或称法向应力)及平行于体积元各面的剪切应力(或称剪应力、切应力)。现规定立方体体积元的各边与坐标轴平行，记 τ_{xx} 、 τ_{yy} 、 τ_{zz} 为与X、Y、Z轴垂直的平面上的正应力。记 τ_{xy} 、 τ_{yx} 、 τ_{xz} 、 τ_{zx} 、 τ_{yz} 、 τ_{zy} 为与坐标轴平行的各面的剪切应力。在应力符号中，第一角码表示应力作用平面的法线方向，第二角码表示应力作用方向所沿的坐标轴方向。如图 1—4 所示，立方体体积元的每一个面上都可能有一个正应力和两个剪切应力。根据力矩平衡条件， $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ ， $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ， $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ (证明见第三节)。

为简单起见，规定X、Y、Z方向为 1、2、3 方向，则正应力可记为

$$\tau_{xx} = \tau_x = \tau_{11} = \tau_1$$

$$\tau_{yy} = \tau_y = \tau_{22} = \tau_2$$

$$\tau_{zz} = \tau_z = \tau_{33} = \tau_3$$

剪切应力可记为

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau_{23} = \tau_{32} = \tau_4$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{13} = \tau_{31} = \tau_5$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{12} = \tau_{21} = \tau_6$$

同上，应变也可以这样表示，即对正应变

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_x = \varepsilon_{11} = \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_y = \varepsilon_{22} = \varepsilon_2$$

$$\epsilon_{zz} = \epsilon_z = \epsilon_{33} = \epsilon_3$$

对剪切应变

$$\epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} = \epsilon_{23} = \epsilon_{32} = \epsilon_4$$

$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} = \epsilon_{13} = \epsilon_{31} = \epsilon_5$$

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = \epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \epsilon_6$$

即对弹性介质，独立的应力和应变分量各有六个。

第二节 应变和应力的关系，广义虎克定律

普通物理课程以弹簧伸长为例，说明在弹性限度内，弹性体的形变 ϵ 和外加胁强 f 成正比，即所谓虎克定律

$$f = -E\epsilon$$

考虑到应力和外加胁强量值相等、方向相反，并考虑到形变方向和应力方向一致，上式可以改写成

$$\tau_1 = E\epsilon_1 \quad (1-8)$$

式中， $E = \frac{\tau_1}{\epsilon_1}$ 为弹性体的杨氏弹性模量，其意义为弹性体发生单位线应变时弹性体产生的应力大小， E 的数值大小表示弹性体或弹性材料在外力作用下变形的难易程度。 E 是表示材料弹性力学性质的一个重要参数，其量纲和应力相同。

但这样形式的虎克定律，并不能表示弹性体中应力和应变的全面关系。在图1—5上，弹性杆在外加胁强 f 作用下，除了在 $X(1)$ 方向上发生伸长 $\epsilon_1 = \frac{\Delta l}{l}$ 以外，还要在 $Y(2)$ 、 $Z(3)$ 两个方向上发生缩短(在图1—5上只标出 Y 方向的变形 $\epsilon_2 = \frac{\Delta d}{d}$)，若记

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = -\nu$$

有

$$\epsilon_1 = -\frac{\epsilon_2}{\nu}$$

代入(1—8)式，即可得到表示 τ_1 和 ϵ_2 的关系式

$$\tau_1 = -E \frac{\epsilon_2}{\nu} \quad \text{或} \quad f = E \frac{\epsilon_2}{\nu}$$

这两个关系式表示了在 $X(1)$ 方向产生的应力和 $Y(2)$ 方向上的形变的关系，或在外胁强 f 作用下，在与 f 作用方向垂直的方向上的弹性杆的线应变的大小。

ν 为弹性材料的泊松比，是材料变形时横向缩短和纵向伸长的比值，是表示材料力学性质的又一重要参数。 ν 无量纲，对任何材料 ν 在0和0.5之间。

除了法向胁强外，还可能有切向胁强也会使弹性体发生形变。图1—6为弹性体在剪切胁强作用下发生的剪切形变(同时产生剪切应力)，此时剪切应力和剪切应变(角应变)间的关系为

$$\tau_{32} = \mu \epsilon_{32} \quad \text{或} \quad \tau_4 = \mu \epsilon_4 \quad (1-9)$$

式中， μ 为常数，称为剪切模量或切变模量，其意义是，产生单位角应变时相应的剪切应力

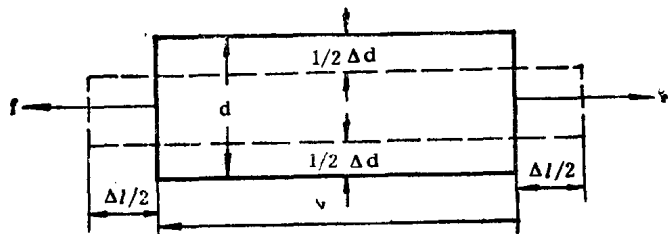


图 1—5 弹性体的拉伸及压缩

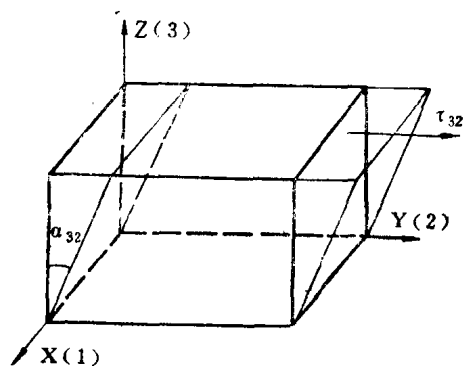


图 1—6 弹性体的剪切应力和剪切应变

的数值， μ 的数值大小表示在剪切胁强作用下，弹性体发生剪切形变的难易程度。 μ 也是材料的重要力学性质之一，其量纲和应力相同。

综上所述，对(1—8)式所表述的虎克定律至少要做两点扩充：第一，要考虑法向应力在与之垂直的各方向上发生的形变的关系。第二，要考虑剪切应力和剪切应变的关系。

广义虎克定律表述应力和应变的全面关系。按广义虎克定律，在X(1)方向的线应变为在六个方向上的应力的线性组合，即

$$\epsilon_1 = S_{11}\tau_1 + S_{12}\tau_2 + S_{13}\tau_3 + S_{14}\tau_4 + S_{15}\tau_5 + S_{16}\tau_6 \quad (1-10)$$

此式表示，在X(1)方向的线应变可能在六个方向都产生应力，或者说，在六个方向上的外加胁强，都可能在X(1)方向上产生线应变。

同理，在Y(2)及Y(3)方向的线应变为

$$\epsilon_2 = S_{21}\tau_1 + S_{22}\tau_2 + S_{23}\tau_3 + S_{24}\tau_4 + S_{25}\tau_5 + S_{26}\tau_6 \quad (1-11)$$

$$\epsilon_3 = S_{31}\tau_1 + S_{32}\tau_2 + S_{33}\tau_3 + S_{34}\tau_4 + S_{35}\tau_5 + S_{36}\tau_6 \quad (1-12)$$

对xZ平面的角应变可以写成

$$\epsilon_4 = S_{41}\tau_1 + S_{42}\tau_2 + S_{43}\tau_3 + S_{44}\tau_4 + S_{45}\tau_5 + S_{46}\tau_6 \quad (1-13)$$

对YZ平面及XY平面内的角应变，可写成

$$\epsilon_5 = S_{51}\tau_1 + S_{52}\tau_2 + S_{53}\tau_3 + S_{54}\tau_4 + S_{55}\tau_5 + S_{56}\tau_6 \quad (1-14)$$

$$\epsilon_6 = S_{61}\tau_1 + S_{62}\tau_2 + S_{63}\tau_3 + S_{64}\tau_4 + S_{65}\tau_5 + S_{66}\tau_6 \quad (1-15)$$

对以上六式，可以简记为

$$\epsilon_i = \sum_{j=1}^6 S_{ij}\tau_j \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad (1-16)$$

此式即为以应力作自变量的广义虎克定律，此式并不要求弹性体各向同性，式中

$$S_{ij} = \frac{\partial \epsilon_i}{\partial \tau_j} \quad (1-17)$$

称为材料的弹性柔顺系数，其意义是j方向的单位应力在i方向引起的应变的大小。

若用应变作为自变量，则弹性体中每个独立的应力都可以表述为六个应变的线性组合，对法向应力，有

$$\tau_1 = C_{11}\epsilon_1 + C_{12}\epsilon_2 + C_{13}\epsilon_3 + C_{14}\epsilon_4 + C_{15}\epsilon_5 + C_{16}\epsilon_6 \quad (1-18)$$

$$\tau_2 = C_{21}\epsilon_1 + C_{22}\epsilon_2 + C_{23}\epsilon_3 + C_{24}\epsilon_4 + C_{25}\epsilon_5 + C_{26}\epsilon_6 \quad (1-19)$$

$$\tau_3 = C_{31}\epsilon_1 + C_{32}\epsilon_2 + C_{33}\epsilon_3 + C_{34}\epsilon_4 + C_{35}\epsilon_5 + C_{36}\epsilon_6 \quad (1-20)$$