李炯生 黄国勋 戴牧民 丁有炳 编译

中外数学竞赛

100个重要定理和竞赛题精解

上海科学技术出版社

中 外 数 学 竞 赛

——100个重要定理和竞赛题精解

李炯生　黄国勋　戴牧民　丁有炳　编译

上海科学技术出版社

（沪）新登字1(

责任编辑 宗大路

中外数学竞赛
——100个重要定理和竞赛题精解
李炯生 黄国勋 戴牧民 丁有炳 编译
上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
新华书店上海发行所发行 江苏扬中印刷厂印刷
开本：787×1092 1/16 印张：18 字数：421,000
1992年3月第1版 1992年3第1次印刷
印数：1—11,000
ISBN 7-5323-2457-5/G·390
定价：6.70元

序　言

自从 1889 年罗马尼亚首次举行中学毕业生数学竞赛以来，已经整整一百年。这期间，许多国家，如匈牙利(1894)、苏联(1935)、波兰(1949)、保加利亚(1950)、南斯拉夫(1950)、捷克斯洛伐克(1951)、美国(1955)、中国(1956)、民主德国(1956)、加拿大(1958)、印度(1958)、瑞典(1961)、越南(1962)、古巴(1962)、荷兰(1962)、意大利(1962)、卢森堡(1963)、西班牙(1964)、英国(1965)、阿根廷(1965)、比利时(1965)、奥地利(1970)、联邦德国(1970)、澳大利亚(1976)等，都先后举行了数学竞赛。1959 年，在罗马尼亚倡议下，首届国际数学奥林匹克(IMO)同年在布加勒斯特举行，以后每年由各国轮流举办，迄今已进行了 31 届，其规模不断扩大，由开始几个国家参加，发展到现在每年有四、五十个国家参加。近年来，还出现许多地区性数学竞赛，如奥地利-波兰数学竞赛(1982)，由希腊、罗马尼亚、保加利亚参加的巴尔干地区数学竞赛(1984)，由丹麦、冰岛、挪威、芬兰、瑞典共同举办的斯堪德那维亚地区数学竞赛(1986)，以及由埃及、利比亚、突尼斯、阿尔及利亚、摩洛哥参加的马格里布地区数学竞赛(1986)。

数学竞赛受到各国如此的重视，这是因为数学竞赛是普及数学教育、发现人材和培养人材的一种特殊而有效的形式。在以往数学竞赛的优胜者中，已经涌现许多著名的世界一流数学家。例如在特别重视数学竞赛的匈牙利，1897年的数学竞赛金牌得主 Leopolt Fejér 在 Fourier 级数的可加性理论方面做出了许多杰出工作。1903 年的金牌得主 Alfred Haar 提出了 Haar 测度，为测度论的发展做出了杰出贡献。1904 年的金牌得主 Marcel Riesz 在泛函分析中提出了 Riesz 凸性定理。1912 年的金牌得主 Gabor Szegö 在逼近论方面的贡献引人注目，他和著名数学家 George Polýa 合著的《分析中的定理和问题》已成为经典性著作。

在我国已故著名数学家华罗庚的倡导和支持下，北京、上海、天津、营口都在 1956 年举办了数学竞赛。此后，武汉、南京、成都、西安等城市都相继举办过。已故著名数学家华罗庚、陈建功、闵嗣鹤以及著名数学家江泽涵、苏步青、段学复、吴文俊都亲自出马，给中学生作过数学竞赛辅导报告。他们的精彩报告后来都陆续整理出版，成为数学竞赛辅导工作的典范。1978 年，华罗庚亲自主持全国八省市数万名高中学生参加的数学竞赛。从 1981 年起，全国各省、市、自治区高中数学竞赛每年在 10 月举行。1985 年开始举办每年一届的全国初中数学竞赛。1986 年在高年级小学生和初中一、二年级学生中又举办了华罗庚金杯赛。

1985 年，我国首次选派两名选手参加 IMO。首战失利，成绩欠佳。为改变这种局面，1986 年起，每年都举办全国高中数学冬令营。经过集中强化训练，参加 IMO 的六名选手的

成绩大为改观，团体总分从27届(1986)IMO的第四名，到29届(1988)IMO的第二名，30届(1989)IMO的第一名，直到今年31届IMO的第一名，他们为祖国赢得了荣誉。

如何保持和发扬我国所取得的成就，如何保持我国连续两次在IMO中获得的团体总分第一的地位，这一重大课题已经摆在我们面前。我国在IMO中所以能取得优异成绩，原因是多方面的。除参赛选手的素质和刻苦钻研外，教练员在系统辅导和强化训练所做的工作也极其重要。在数学竞赛辅导方面，我国已经做了许多很好的工作，积累了丰富经验。但是，在数学竞赛辅导工作的系统化、科学化、规范化上仍有许多课题值得进一步探讨。例如，数学竞赛究竟涉及到那些数学分支？如何掌握每个分支在内容上的广度和深度？等等，都是应当认真研究的问题。

积极参与IMO活动而且成绩一贯优异的苏联在这方面做了大量细致的工作。他们的经验很值得借鉴。1987年，苏联科学出版社推出了谢尔盖耶娃主编的《外国数学竞赛》一书(И. Н. СЕРГЕЕВА, ЗАРУБЕЖНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ, НАУКА, МОСКВА, 1987)。书中把数学竞赛涉及到的数学分支归纳为代数、几何、数论、初等微积分、初等概率论、组合数学和图论，并且把上述各分支经常在数学竞赛中应用的最为重要的事实归纳为50个定义和100个定理，然后应用它们来解50年代以来选自20多个国家和地区、国际数学奥林匹克的试题，以及国际数学奥林匹克的各届评审委员会中20多个成员国提供的备选题共约500道题，显示了这100个定理的威力。谢尔盖耶娃等人实际上是提出了一种设想，或者说是给出了一个边界，使得数学竞赛辅导工作能够摆脱那种在数学内容的广度上无限制扩展、在深度上无限制延伸的局面，这在数学竞赛辅导工作中还是首次。诚然，100个定理是否足够，这100个定理是否选得都合宜，其中的定理是否都不可替代，等等，都是可以讨论的。基于这个原因，我们将该书编译出版，以期引起重视，促使数学竞赛辅导工作的系统化、科学化、规范化向更高层次发展。

正如原著书名所表明的那样，原著没有收入苏联的数学竞赛试题。我国的试题收入的也很少。为弥补这方面的欠缺，我们增补了适量的苏联和我国的试题。希望本书在内容上尽可能包含国内外数学竞赛中各种类型的题目，在方法上能够穷尽国内外数学竞赛中各种典型的解题技巧，以适应有志于数学竞赛的中学生自学的需要，也便于中学数学教师和数学奥林匹克教练作为辅导教材之用。读者倘能悉心钻研，熟练掌握有关的数学知识，体会解题方法之精妙，不论对亲自参加数学竞赛，或者进行竞赛辅导，都是有益的。

数学竞赛活动将在我国继续深入的开展下去。我们谨把此书奉献给全国广大中学数学教师和中学生，愿它能伴随读者在数学竞赛中取得更好成绩。

编译者

1990年仲夏

目　录

第一部分　概念和定理

国内外数学竞赛试题涉及许多数学分支，如代数、几何、数论、初等微积分、初等概率论、组合数学和图论等．这一部分辑录了求解各类数学竞赛试题所必需的取自上述各分支的最重要的概念和定理．数学名词以及某些定理的名称沿用现行中学数学教科书，即参考文献[3]～[9]，或引用参考文献[1]与[2]．这一部分包含了100个定理，大部分都注明出处，从中可查到定理的证明．至于比较简单的定理，则不再指明参考文献．当然，如果能自行给出定理的证明，则不论对有关数学知识的理解与掌握，或者提高求解数学竞赛题的能力，都会有所裨益的．

关于集合的概念见[1]，[2]，[3]．

定义 1　如果集合A的每个元素都属于集合B，则集合A称为集合B的子集，记作$A\subset B$．

定义 2　集合A和B的并集$A\cup B$是由所有至少属于集合A和B中一个集合的元素组成的集合．集合A和B的交集$A\cap B$是由所有既属于A又属于B的元素组成的集合．

同样可以定义若干个集合的并集及交集．

定义 3　集合A和B的差集$A\backslash B$是集合A的子集，它由所有属于A但不属于B的元素组成．如果$B\subset A$，则差集$A\backslash B$称为集合B在集合A中的补集．

元素组由一些元素组成．如果元素组中的元素相同而只是元素的排列次序不同，不认为是不同的元素组(比如$\{1, 2, 3\}=\{2, 3, 1\}$)，则称为无序组；如果元素组中的元素排列次序不同，得到的元素组认为是不同的，则称为有序组．

定义 4　集合A和B的笛卡儿积$A\times B$是所有有序元素对(x, y)，$x\in A$，$y\in B$组成的集合．

同样可以定义若干个集合的笛卡儿积．

定理 1　(狄利克雷原理)([11]，[17])如果把n元集合表成它的k个子集的并集，则有某个子集至少含$\frac{n}{k}$个元素．

上述定理也称抽屉原理、鸽笼原理．

定理 2　(数学归纳法原理)([1]，[2]，[4]，[17])设对某个依赖于参数n的命题$U(n)$，有

(1)　命题$U(1)$成立；

(2) 如果对某个 $n\in N$，命题 $U(1), U(2), \cdots, U(n)$ 成立，则命题 $U(n+1)$ 也成立，

则命题 $U(n)$ 对每个 $n\in N$ 都成立。

关于函数的概念见[1]，[2]，[3]，[9]，[10]。用 $f: A\to B$ 表示定义域为 A 而值域为 B 的函数。

定义 5 给定函数 $f:A\to B$。如果函数 $g:B\to A$ 满足

$$g(f(x))=x,\ f(g(y))=y,\ x\in A,\ y\in B,$$

则函数 g 称为函数 f 的反函数，记作 $g=f^{-1}$。

定理 3 函数 $f:A\to B$ 具有反函数的必要且充分条件是，对任意的 $y\in B$，存在 $x\in A$，使得 $f(x)=y$，并且对任意两个不同的 $x_1, x_2\in A$，$f(x_1)\neq f(x_2)$。

定义 6 两个函数 $f:A\to B$ 和 $g:B\to C$ 的复合函数是函数 $h:A\to C$，其定义如下：

$$h(x)\equiv g(f(x)),\ x\in A.$$

若干个函数

$$f_1:A_1\to A_2,\ f_2:A_2\to A_2,\ \cdots,\ f_n:A_n\to A_{n+1}$$

的复合函数类似地定义。

函数 $f:A\to A$ 的 n 次复合函数记作 f^n。当给定函数 $f:R\to R$ 时，函数 f 的 n 次复合函数 $f^n(x)=\underbrace{f(f(f(\cdots f}_{n\text{个}}(x)\cdots)))$ 与反函数 $f^{-1}(x)$ 分别和 $(f(x))^n$ 与 $(f(x))^{-1}$ 不相同。只有对数函数和三角函数例外。例如，$\sin^2 x$ 表示 $\sin x\cdot\sin x$，而不表示 $\sin(\sin x)$。

定义 7 函数 $f:A\to R$ 称为

上有界的，如果存在某个 $M\in R$，使得对所有的 $x\in A$，都有 $f(x)<M$；

下有界的，如果存在某个 $m\in R$，使得对所有的 $x\in A$，都有 $f(x)>m$。

既上有界又下有界的函数 $f:A\to R$ 称为有界函数。

定义 8 设 $A\subset R$，函数 $f:A\to R$ 称为

递增的，如果 $f(x_1)<f(x_2)$；

递减的，如果 $f(x_1)>f(x_2)$；

不增的，如果 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$；

不减的，如果 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，

其中每个条件都对所有满足不等式 $x_1<x_2$ 的数 x_1、$x_2\in A$ 成立。具有上述 4 个性质之一的函数 $f:A\to R$ 称为单调的。递增或者递减的函数称为严格单调的。

数列是函数 $f:A\to R$ 的特例，它的定义域是集合 R 的子集，或是映射 $\alpha:N\to R$，或是映射 $\alpha:Z^+\to R$，它的值记作 a_n。和定义 7、8 相对应，可以定义上有界、下有界、有界、递增、递减、不增、不减、单调和严格单调数列。([4])

定理 4 对任意 a、$b\in R$ 和 $n\in N$，有

$$a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)(a^n+a^{n-1}b+\cdots+ab^{n-1}+b^n),$$

$$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+\cdots-ab^{2n-1}+b^{2n}),$$

$$a^{2n}-b^{2n}=(a+b)(a^{2n-1}-a^{2n-2}b+\cdots+ab^{2n-2}-b^{2n-1}),$$

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b})}\pm\sqrt{\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b})},$$

最后一个等式中设 $b>0$ 且 $a\geqslant\sqrt{b}$。

定理 5 (贝努利不等式)([14])对所有满足条件 $a>-1$, $a\neq 0$, $b\neq 0$, $b\neq 1$ 的 a、$b\in R$, 有

$$(1+a)^b<1+ab,\quad \text{当 } 0<b<1 \text{ 时},$$
$$(1+a)^b>1+ab,\quad \text{当 } b\notin[0,1] \text{ 时}.$$

关于平均数的概念见[1],[2],[14]。

定义 9 数 $a_1, a_2, \cdots, a_n\in R$ 的算术平均数是

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

非负实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的几何平均数是

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},$$

正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的调和平均数是

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}},$$

数 $a_1, a_2, \cdots, a_n\in R$ 的二次平均数是

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}.$$

定理 6 (关于平均数的定理)([14])对任意的正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 有

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\leqslant\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}},$$

而且,如果这 4 个平均数不全相等时,则所有不等式都是严格的。

最常用的是几何平均数与算术平均数之间的不等式,它对非负实数也成立。

定理 7 ([9],[10])数列$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n\in N$ 是递增的,并且有极限,其极限记作 e, 则对每一个 $n\in N$, 都有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e.$$

以 e 为底的对数称为自然对数,记作 ln, 即 $\log_e x=\ln x$, $x>0$。([1], [9], [10])

定义 10 符号函数定义为

$$\operatorname{sign}(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x>0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 时},\\ -1, & \text{当 } x<0 \text{ 时}.\end{cases}$$

定义 11 数 $x\in R$ 的整数部分$[x]$是不超过 x 的最大整数。数$\{x\}=x-[x]$称为数 $x\in R$ 的分数部分。

定理 8 整数部分$[x]$是不减函数,分数部分$\{x\}$是周期函数,其周期为 1。

关于整除性的概念见[1],[2],[11],[12]。

定义 12 给定数 $a, b\in Z$, $b\neq 0$。如果 $q\in Z$, $r\in\{0, 1, \cdots, |b|-1\}$满足

$$a=qb+r,$$

则 q 和 r 分别称为 a 除以 b 的商和余数。如果 $r=0$, 则说 a 被 b 整除,记作 $b|a$, 或者说 a 是 b 的倍数,而 b 是 a 的因数。

定义 13 非零的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n\in Z$ 的最小公倍数是能被其中每一个整数 $a_i(1\leqslant i\leqslant$

n)所整除的最小自然数，记作$[a_1, a_2, \cdots, a_n]$。

定义 14 设$a_1, a_2, \cdots, a_n \in Z$中至少有一个数不等于零，这$n$个数的最大公因数是能够整除其中每一个整数的最大自然数，记作$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$。

定理 9 ([11],[12])对任意$a, b \in N$，有

$$(a, b) \cdot [a, b] = ab.$$

定义 15 如果$a, b \in Z$且满足$(a, b)=1$，则称a和b是互素的，也称为互质的。

定义 16 给定$a, b, c \in Z$，且$c \neq 0$。如果$c \mid (a-b)$，则称a和b模c同余，记作$a \equiv b \pmod c$，否则称a和b模c不同余，记作$a \not\equiv b \pmod c$。

定理 10 ([11]、[12])给定$a, b, c, d, m, k \in Z$，且$m \neq 0$，$k \neq 0$，则有

(1) 如果$a \equiv b \pmod m$且$b \equiv c \pmod m$，则$a \equiv c \pmod m$；

(2) 如果$a \equiv b \pmod m$且$c \equiv d \pmod m$，则$a+c \equiv b+d \pmod m$且$ac \equiv bd \pmod m$；

(3) 如果$a \equiv b \pmod m$，则对任意的$n \in N$，有$a^n \equiv b^n \pmod m$；

(4) 如果$a \equiv b \pmod m$，则$ak \equiv bk \pmod{mk}$；

(5) 如果$a \equiv b \pmod m$，且$k \mid a$，$k \mid b$，$k \mid m$，则

$$\frac{a}{k} \equiv \frac{b}{k} \left(\mathrm{mod}\ \frac{m}{k}\right).$$

定理 11 对任意$a, b \in Z$和$n \in N$，有

(1) 如果$a \neq b$，则$(a-b) \mid (a^n - b^n)$；

(2) 如果$a \neq -b$，则$(a+b) \mid (a^{2n-1} + b^{2n-1})$；

(3) 如果$a \neq -b$，则$(a+b) \mid (a^{2n} - b^{2n})$。

这个定理由定理 4 或定理 10(3)即得。

定理 12 整数的n次幂 $(2 \leqslant n \leqslant 5)$ 除以整数 $m (3 \leqslant m \leqslant 10)$，所能得到的余数如下表：

m	n			
	2	3	4	5
3	0, 1	0, 1, 2	0, 1	0, 1, 2
4	0, 1	0, 1, 3	0, 1	0, 1, 3
5	0, 1, 4	0, 1, 2, 3, 4	0, 1	0, 1, 2, 3, 4
6	0, 1, 3, 4	0, 1, 2, 3, 4, 5	0, 1, 3, 4	0, 1, 2, 3, 4, 5
7	0, 1, 2, 4	0, 1, 6	0, 1, 2, 4	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
8	0, 1, 4	0, 1, 3, 5, 7	0, 1	0, 1, 3, 5, 7
9	0, 1, 4, 7	0, 1, 8	0, 1, 4, 7	0, 1, 2, 4, 5, 7, 8
10	0, 1, 4, 5, 6, 9	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	0, 1, 5, 6	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

整数的表示，有常用的十进制。用十进制表示的数叫做十进数。另外，还有二进数、八进数等([1], [2])。一般地，可以引进下面的

定义 17 如果$n \in N$可以表为

$$n = a_1 k^{m-1} + a_2 k^{m-2} + \cdots + a_{m-1} k^1 + a_m k^0,$$

其中整数 $k\geqslant 2$, 而 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 是非负整数,并且 $a_i<k(1\leqslant i\leqslant m)$, $a_1>0$, 则称 $\overline{a_1a_2\cdots a_m}$ 是 n 的 k 进制表示,而 $\overline{a_1a_2\cdots a_m}$ 称为 k 进数.

定理 13 给定整数 $k\geqslant 2$. 对任意 $n\in N$, 都有唯一的 k 进制表示.

定理 14 ([11]) 任意一个自然数 n 与它的十进制表示中的所有数字之和模 9 同余.

关于二项式和二项式系数的概念和公式见[1], [2], [5], [17].

定义 18 设 $m, n\in Z$, $n\geqslant m\geqslant 0$. 二项式系数是指下面的数

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!},$$

其中记

$$n!=\begin{cases}1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n, & \text{当 } n\in N \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } n=0 \text{ 时},\end{cases}$$

定理 15 ([5], [17])对任意 $m, n\in Z^+$, 有

(1) $C_n^0=C_n^n=1$;

(2) $C_n^m=C_n^{n-m}$, 其中 $n\geqslant m\geqslant 0$;

(3) $C_n^m=C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1}$, 其中 $n>m>0$.

定理 16 (牛顿二项式定理)([5], [17])对任意 $a, b\in R$ 和 $n\in N$, 有

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ma^{n-m}b^m+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n.$$

当取 $a=b=1$ 或 $a=-b=1$ 时,即得下面定理中的(1)、(2).

定理 17 ([5], [17])所有二项式系数都是自然数,并且有

(1) $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$;

(2) $C_n^0-C_n^1+C_n^2-\cdots+(-1)^nC_n^n=0$.

关于素数的概念和定理见[1], [2], [11], [12].

定义 19 大于 1 并且除 1 及其自身外没有别的整数因子的自然数称为素数或质数. 其他大于 1 的自然数称为合数. 数 1 既不是素数也不是合数.

定理 18 (算术基本定理) ([11], [12]) 每个大于 1 的整数都可分解为一些素数的乘积,而且,如果不计因子的书写顺序,这种分解是唯一的.

定理 19 ([11], [12])素数有无穷多个.

定理 20 (勒让德定理)([11], [12])在整数 $n!$ 的素因子分解式中,素数 p 作为因子出现的次数是

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots.$$

下面三个定理是关于互素的数的性质的.

定理 21 ([11], [12])设 $a, b, c\in Z$, $c\neq 0$. 如果 $c|ab$ 且 $(b, c)=1$, 则有 $c|a$.

定理 22 设 $a, b, c, m\in N$. 如果 $ab=c^m$ 且 $(a, b)=1$, 则 $a=a_1^m$, $b=b_1^m$, 其中 $a_1b_1=c$ 且 $(a_1, b_1)=1$.

定理 23 (中国剩余定理或孙子定理) ([11], [12]) 如果整数 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 都不为零,而且两两互素,则对任意整数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$, 在任意一个长为 $m_1m_2\cdots m_k$ 的左开右闭区间中,都有整数 x, 使得对每个 i, $i=1, 2, \cdots, k$, 有 $x\equiv a_i(\bmod m_i)$.

定理 24 ([11], [12])对任意两个不全为 0 的 $a, b\in Z$, 存在 $p, q\in Z$, 使得 $pa+qb$

$=(a, b)$。

定理 25 (费马小定理)([11], [12])如果素数 p 不能整除 $a\in Z$，则 $p\mid(a^{p-1}-1)$。

由此即得

定理 26 ([11], [12])设 p 是素数，则对任意 $a\in Z$，有

$$a^p\equiv a(\mathrm{mod}\ p).$$

关于连续函数的概念和性质见[1], [2], [9], [10]。

定理 27 (介值定理)([10])设函数 $f:[a, b]\to R$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $A=f(a)<f(b)=B$，则对任意 $C\in(A, B)$，存在 $c\in(a, b)$，使得 $f(c)=C$。

由此即有下面的特例。

定理 28 (零点存在定理)([10])如果函数 $f:[a, b]\to R$ 在 $[a, b]$ 上连续，并且在区间的两个端点处都取非零值，但符号相反，则存在 $c\in(a, b)$，使得 $f(c)=0$。

定理 29 ([10]) 如果函数 $f:[a, b]\to R$ 在 $[a, b]$ 上连续，则存在 $c\in[a, b]$, $d\in[a, b]$，对所有 $x\in[a, b]$，都有 $f(c)\leqslant f(x)\leqslant f(d)$。

由此即得下面的

定理 30 任意一个在有限闭区间上的连续函数，都是有界函数。

关于函数的导数的概念和定理见[9], [10]。

用 I 表示直线 R 上的某个区间。考虑函数 $f:I\to R$，设 f 在每个点 $x\in I$ 处是可导的，即有导数 $f'(x)$。于是，有新的函数 $f':I\to R$，它在点 $x\in I$ 的函数值是 $f'(x)$。$f':I\to R$ 称为函数 f 的一阶导数。如果函数 f' 在每个点 $x\in I$ 处可导，则它的导数称为函数 f 的二阶导数。同样可定义函数 f 的 n 阶导数，并记作 $f^{(n)}$, $n=3, 4, 5, \cdots$。函数 f 的一阶、二阶和三阶导数通常依次记作 f'、f''、f'''。

定义 20 函数 $f:I\to R$ 称为

n 次可导的，如果 $n\in N$，并且函数 f 在区间 I 的每个点处具有 n 阶导数；

n 次连续可导的，如果函数 f 是 n 次可导的，并且函数 $f^{(n)}$ 在区间 I 上连续；

无限可导的，如果对任意 $n\in N$, f 有 n 阶导数。

定理 31 (单调性的判定)([9], [10]) 设函数 $f:I\to R$ 在区间 I 上可导，则函数 f 是不减(或者不增)的必要且充分条件是，对每个 $x\in I$, $f'(x)\geqslant 0$(或者 $f'(x)\leqslant 0$)。如果对每个 $x\in I$，都有 $f'(x)>0$(或者 $f'(x)<0$)，则函数 f 是递增(或者递减)的。

定义 21 如果函数 $f:I\to R$ 满足：对任意 $x, y\in I$，和 $\alpha\in[0, 1]$，有

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\leqslant\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y),$$

则函数 f 称为在区间 I 上是下凸的。如果 $g(x)=-f(x)$ 在区间 I 上是下凸的，则 $f:I\to R$ 称为在区间 I 上是上凸的。

定理 32 (凸性的判定)([9], [10])设函数 $f:I\to R$ 在区间 $[a, b]\subseteq I$ 上二次可导，则函数 f 在该区间上是下凸(或者上凸) 的必要且充分条件是，对每个点 $x\in I$，有 $f''(x)\geqslant 0$(或者 $f''(x)\leqslant 0$)。

定理 33 (拉格朗日中值定理)([9], [10])设函数 $f:[a, b]\to R$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，并且在区间 (a, b) 上可导，则存在点 $c\in(a, b)$，适合

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

下面的定理是拉格朗日中值定理的特例。

定理 34 （罗尔中值定理）（[9]，[10]）设函数 $f:[a, b]\to R$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 上可导，并且 $f(a)=f(b)$，则存在点 $c\in(a, b)$，使得 $f'(c)=0$。

关于复数的概念见[1]，[2]，[4]。

定义 22 复数集合 C 是有序实数对集合，并在其上如下定义加法及乘法运算：

$$(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d),$$
$$(a, b)(c, d)=(ac-bd, ad+bc),$$

其中 $a, b, c, d\in R$。

因为 $(a, 0)+(b, 0)=(a+b, 0)$，$(a, 0)(b, 0)=(ab, 0)$，因此形如 $(a, 0)$ 的复数可以看成与实数 a 是相同的。复数 $(0, 1)$ 称为虚数单位，记作 i。虚数单位 i 满足

$$i^2=-1.$$

对任意复数 (a, b)，有

$$(a, b)=(a, 0)+(b, 0)(0, 1),$$

所以复数 (a, b) 通常写成为 $a+bi$。

定义 23 数 $a\in R$ 称为复数 $z=a+bi$ 的实部，记作 $a=\mathrm{Re}z$，$b\in R$ 称为复数 $z=a+bi$ 的虚部，记作 $b=I_mz$。实部为 0 的复数，即形如 bi 的数称为纯虚数。

复数的加法运算和乘法运算，与实数有相同的运算规则，即满足加法、乘法的交换律、结合律，以及乘法对加法的分配律。

复数可以用坐标平面上的点表示：以复数的实部作为横坐标，虚部作为纵坐标。

定义 24 数 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ 称为复数 $z=a+bi$ 的模。

定理 35 对任意复数 $z\in C$，恒有 $|z|\geqslant 0$，并且当且仅当 $z=0$ 时 $|z|=0$。对任意 $z, w\in C$，有

$$|zw|=|z|\cdot|w|.$$

定理 36 （三角形不等式）对任意 $z, w\in C$，有

$$|z+w|\leqslant|z|+|w|,$$

并且等式当且仅当 $z=0$ 或者 $w=kz$，$k\geqslant 0$ 时成立。

定义 25 设 $z=a+bi$ 是非零复数。满足

$$\cos\varphi=\frac{a}{r}, \sin\varphi=\frac{b}{r}$$

的角 φ 称为复数 z 的辐角（或幅角），其中 $r=|z|$。设 φ 是复数 z 的辐角，而且 $\varphi\in(-\pi, \pi]$，则称 φ 为辐角的主值，记作 $\varphi=\arg z$。

显然，辐角的主值是唯一确定的。

复数的模和辐角可以在坐标平面上表示出来，如图1.1所示。

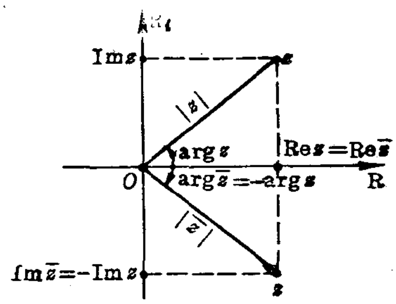

图 1.1

定理 37 （复数的三角形式）（[4]）任意非零复数 $z\in C$，都可以表为

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

其中 $r=|z|$，$\varphi=\arg z$。

定义 26 复数 $\bar{z}=a-bi$ 称为复数 $z=a+bi$ 的共轭，而 z 和 $\bar{z}$ 称为共轭复数。

定理 38 对任意复数 $z\in C$，有

$$\mathrm{Re}\bar{z}=\mathrm{Re}z,\ \mathrm{Im}\bar{z}=-\mathrm{Im}z,\ \overline{(\bar{z})}=z.$$

而 z 为

(1) 实数当且仅当 $\bar{z}=z$ 时；

(2) 纯虚数当且仅当 $\bar{z}=-z$ 时。

在坐标平面上，复数 z 与它的共轭 $\bar{z}$ 关于实轴对称。

定理 39 ([4])对任意复数 $z,\ w\in C$，有

$$|\bar{z}|=|z|,\ z\bar{z}=|z|^2,$$
$$\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w},\ \overline{zw}=\bar{z}\bar{w},$$

而且当 $z\neq 0$ 时，$\arg\bar{z}=-\arg z$；当 $z<0$ 时，$\arg\bar{z}=\arg z=\pi$。

复数的减法及除法分别作为加法及乘法的逆运算定义的。

定理 40 ([4])如果 $z=a+bi,\ w=c+di$ 是任意两个复数，则方程 $z+x=w$ 有唯一的复数解

$$x=(c-a)+(d-b)i,$$

它称为复数 w 和 z 的差。

定理 41 ([4])如果 $z=a+bi,\ w=c+di$ 是任意两个复数，且 $z\neq 0$，则方程 $zx=w$ 有唯一的复数解

$$x=\frac{w\cdot\bar{z}}{|z|^2}=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}+\frac{ad-bc}{a^2+b^2}i,$$

x 称为复数 w 除以复数 z 的商。

定理 42 ([4])对用三角形式表示的复数，有

$$(r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1))(r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2))$$
$$=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)),$$
$$\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)).$$

由此可以得到下面两个定理。

定理 43 (棣莫佛定理)([4])对复数的 n 次幂，$n\in N$，有

$$(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

定理 44 ([4])对任意非零的复数 $z\in C$ 和任意的 $n\in N$，方程 $x^n=z$ 恰有 n 个复数解，它们称为复数 z 的 n 次方根。数 1 的 n 次方根叫做 n 次单位根，它们是

$$x_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k\in\{0,\ 1,\ \cdots,\ n-1\}.$$

定义 27 如果实变数或复变数 x 的数值函数 f 在其定义域上满足 $f(-x)=f(x)$ (或者 $f(-x)=-f(x)$)，则函数 f 称为偶函数(或者奇函数)。

关于多项式的概念和定理见[1]，[2]，[5]，[15]，[16]。

定义 28 一元多项式是一个实变数或者复变数 x 的函数，它具有如下的形式

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

其中 $n\in Z^+$，$a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n\in C$，并且当 $n\geqslant 1$ 时，$a_n\neq 0$。

定理 45 两个多项式

$$P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0,$$

$$Q(x)=b_m x^m+\cdots+b_1x+b_0$$

当且仅当 $n=m$ 并且 $a_0=b_0$, $a_1=b_1$, $\cdots$, $a_n=b_n$ 时相等(即作为函数是相重合的)。

定义 29 数 a_0, a_1, $\cdots$, a_n 称为多项式

$$P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$$

的系数。a_0 称为常数项，a_n 称为首项系数或最高次项系数。如果 $n\geqslant 1$，则 n 称为多项式 $P(x)$ 的次数；如果多项式 $P(x)=a_0$，则当 $a_0\neq 0$ 时，$P(x)$ 的次数为 0，而当 $a_0=0$ 时，$P(x)$ 的次数为 -1。多项式 $P(x)$ 的次数记作 $\deg P$。

定理 46 ([15], [16])设 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 是任意的多项式，则

(1) 函数 $T(x)=P(x)+Q(x)$ 仍是多项式，并且

$$\deg T\leqslant \max(\deg P,\ \deg Q),$$

当 $\deg P\neq\deg Q$ 时，

$$\deg T=\max(\deg P,\ \deg Q).$$

(2) 函数 $W(z)=P(x)\cdot Q(x)$ 仍是多项式，如果 $P(x)\neq 0$, $Q(x)\neq 0$，则 $w(x)\neq 0$，而且

$$\deg W=\deg P+\deg Q.$$

定义 30 方程 $P(x)=0$ 的解，称为多项式 $P(x)$ 的根。

多项式和整数一样可以进行带余除法，并由此可以引出下面的定义和定理。

定理 47 ([15], [16])任意给定两个多项式 $P(x)$ 和 $Q(x)$，并且 $Q(x)\neq 0$，则存在唯一的一对多项式 $S(x)$ 和 $R(x)$，适合

(1) $P(x)=S(x)Q(x)+R(x)$;

(2) $\deg R<\deg Q$。

定义 31 在定理 47 中，多项式 $R(x)$ 称为多项式 $P(x)$ 除以多项式 $Q(x)$ 的余式。如果 $R(x)\equiv 0$，则称多项式 $P(x)$ 被多项式 $Q(x)$ 整除。

定理 48 在定理 47 中，如果多项式 P 和 Q 的系数都是实数，则多项式 S 和 R 的系数同样都是实数；如果 P 和 Q 的系数都是有理数，则 S 和 R 的系数同样都是有理数；如果 P 和 Q 的系数都是整数，而且多项式 Q 的首项系数等于 1 或者 -1，则 S 和 R 的系数同样都是整数。

定理 49 (裴蜀定理)([16])多项式 $P(x)$ 除以多项式 $x-x_0$ 的余式等于 $P(x_0)$。

裴蜀定理也称为余式定理。

由裴蜀定理可得下面的

定理 50 (因式定理)([15]) 多项式 $P(x)$ 被多项式 $x-x_0$ 整除的必要且充分条件是：数 x_0 是 $P(x)$ 的根。

定义 32 如果多项式 $P(x)$ 被多项式 $(x-x_0)^k$ 整除，但多项式 $(x-x_0)^{k+1}$ 不能整除 $P(x)$，$k\in N$，则 x_0 称为 $P(x)$ 的 k 重根。

如果多项式 $P(x)$ 的每个根都在数组(x_1, x_2, $\cdots$, x_n)中出现，而且重根按重数计算，而不出现在这个数组中的任意一个数都不是 $P(x)$ 的根，则称多项式 $P(x)$ 具有根 x_1, x_2, $\cdots$, x_n。

定理 51 (代数基本定理)([5], [15], [16]) 任意一个次数为 $n\geqslant 1$ 的多项式恰有 n 个复数根。

由此得到下面的特例，即定理 52、53、54。