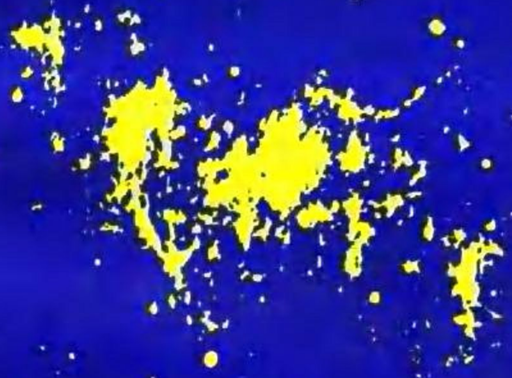
力学



张之珪　　编著

兰州大学出版社

力　　学

张之珪编著

兰州大学出版社

（甘）新登字第 08 号

力　学

张之珪　编著

兰州大学出版社出版
（兰州大学校内）

兰州大学出版社激光照排中心排版
兰州人民印刷厂印刷　甘肃省新华书店发行
开本：850×1168　毫米 1/32　印张:14

1995 年 4 月第 1 版　1995 年 4 月第 1 次印刷
字数:346 千字　印数:1—1200 册

ISBN7－311－00760－7/O·103　定价:8.40 元

前　言

本书是在兰州大学物理系多年使用的普通物理“力学”讲稿和讲义基础上，按照我国现行的高等院校理科教学大纲编写的，可供高校理、工科大学本科各专业，师范院校物理专业使用或参考．由于文字通俗易懂，图文配合，叙述由浅入深，也可供有志自学成才的青年作为物理学入门参考书．

物理学是研究自然界最基本规律的一门科学．力学研究机械运动，是物理学的基础和重要组成部分．作为基础，本书对于基本概念、基本规律方面的叙述力求准确、透彻，重要公式的推导过程完整，关键的细节和应该注意的问题也都有明确的交待．本书的前半部分，以三个守恒定律为重点，后半部分——连续介质力学，则以振动和波动为重点组织教材．由于有意识地加强了有关角动量方面的内容，从而系统地叙述了牛顿力学完整的理论体系．本书将质点运动学和刚体运动学组成一章，称为“运动学”．这在理论体系上是顺理成章的，而且这样做，把刚体力学的两个难点分开，将一个难点提前到开学不久、新生学习积极性最高的时候去克服；又由于加强了角动量定理内容，使得刚体绕定轴转动这个难点也迎刃而解．所以本书理论体系完整，结构合理，突出重点而分散难点，化难为易，便于自学．

本书在加深基本概念和基本规律的基础上，引导学生掌握研究物理学的科学的方法，重视学生分析和解决问题能力的提高．书中融会穿插了一些物理学史资料，适当精选和编写了一些反映近代物理学成就或与后续课程有关，或与生产实践有联系方面的例题和习题．使学生学习前人的科学作风和科学方法，通过例题、习题，巩固已学知识，开拓知识面，提高学习兴趣．

本书的编写出版是在段一士教授、周敦忠副教授等的热情支

持和具体指导下完成的. 本书之前的讲义，余文碧副教授曾连续3年作为教材，在物理系（包括现代物理系核物理专业）使用，从内容到习题余老师都提出过不少宝贵的意见、校内外许多教师为本讲义修改出版成书，提出很多宝贵的意见和建议，有些意见和建议已采纳写入书中. 编书过程中参考了国内外几十种现行的教材，上百篇有关文章，或多或少，都得到了有益的启发和提高，但无法一一列举. 谨在此一并表示衷心的感谢！

由于水平有限，书中缺点和错误在所难免. 恳请读者批评指正.

张之珪

1992年7月20日于兰州大学物理系

目　　录

7

第一章　运动学

本章讲述如何描述物体的运动，以及各运动学量之间的关系.先讲质点运动学，着重讨论描述质点运动的位矢、速度、加速度三个物理量的意义和它们的相互关系. 然后，讲述刚体运动学，主要讨论刚体的平动和刚体绕定轴的转动，以及刚体的平面平行运动.

§1.1　参考系与坐标系

力学研究物体的机械运动. 机械运动是指物体的空间位置随时间的变化. 在经典力学范围内，空间与时间是脱离物质及其运动而独立存在互不相关的，这称为绝对的时空观. 空间是指上、下、左、右、前、后，四面八方，连续的无限均匀延伸的范围，并认为空间的直线永远是直的，称为欧几里德空间. 空间范围可以用米尺来度量. 现在人们认识到的空间范围，从小的方面看，最小约为$\sim 10^{-15}$ m，相当于一个电子的线度；从大的方面看，现在人们认识到的宇宙的范围大约是～90 亿光年（$\sim 10^{26}$ m)，这相当于用射电望远镜能够观察到的最远的星体的距离. 经典力学中时间是指事件发生的先后顺序，从前到后，单方向均匀连续变化，从不逆向. 可以用周而复始的重复事件作为时间的度量单位. 如规定地球公转一周为一年，月球公转一周为一月，地球自转一周为一天，……等. 图示时间，可以画一根时间轴，用轴上等间隔的点表示各个**瞬时**（即**时刻**)，而两个时刻之间的间隔称为**时间**.

经典力学关于空间和时间的概念和人们感觉经验是协调的.人们接受这样的空间和时间概念并不困难. 应该指出在这些概念

中已经包含了人为的假设. 近代物理学相对论表明空间、时间和物质及其运动是紧密联系着的，经典力学的绝对时空观只是实际时空性质的一种近似. 关于时间和空间的量度单位，我们将在§2.3中专门介绍.

因为世界上一切物体都在运动，所以描述物体的运动只能相对地进行. 即只能相对于某个（或某些）物体来描述另外一个物体的运动. 例如一幢房子，它是静止还是运动？与参考标准选择有关. 站在地上的人，以地面作参考标准，说房子是静止的. 坐在开动的汽车中的人，以汽车为参考标准，说房子相对于汽车飞快地向后运动. 我们也只能相对于另外一个参考标准来说某个物体是否运动. 便把这种描述物体的运动选来当“参考标准”的物体（或物体群）称为**参考系**. 那么物体是运动还是静止总是相对于一定的参考系而言的. 同一个物体的运动选不同的参考系描述就会有不同的结果，称为运动描述的相对性. 那么，说一个物体运动，作什么样的运动，必须指出参考系才有意义. 参考系选得合适，描述运动就方便.

运动学中，参考系的选择是任意的. 于是选参考系总可以根据问题的性质，以描述运动方便为原则. 例如描述地球上物体的运动，常选地面为参考系；描述地球的运动，常选太阳为参考系. 当我们说一个物体的运动，而不认真指出参考系时，例如：刮西北风；火车向东行驶等等，参考系是不言而喻的，都是地面.

选定了参考系以后，物体的运动就是：它的位置相对于参考系随时间发生变化. 要定量研究这种位置的变化，先得确定物体在参考系中的位置. 为此还需要在参考系上建立起适当的**坐标系**. 常用的坐标系有**直角坐标系**、**极坐标系**、**柱坐标系**、**球坐标系**以及**自然坐标系**. 本课程根据需要先引入直角坐标系，然后引入自然坐标系和极坐标系. 同样，坐标系选得合适，便于描述运动，可使一些问题计算简单方便.

§1.2 质点及刚体

物体总有一定的大小和形状，它在运动时各部分运动可以不一样. 选定了参考系和坐标系之后，要描述一个物体的运动，即使是描述一个任意扔出去的粉笔头的运动，也仍是很复杂的. 因为粉笔头可能一边翻滚，一边前进，各点运动不相同. 但是如果我们关心的只是粉笔头扔出去多远，考虑到扔出去的距离比粉笔头的大小（线度）要大得多，从而不管它是否翻滚，那么它各点运动的差别可以不予考虑（忽略不计），这实际上是将粉笔头看成没有大小和形状的一个点. 又譬如地球的运动，一方面绕地轴自转，另一方面又绕太阳公转，地球上各点的运动情况也是不同的. 但如果考虑地球的公转，由于地球半径（$R_e \sim 6.37\times10^6$ m）比地球绕太阳公转的平均半径（$R\sim1.5\times10^{11}$ m）小得多，如果将地球半径画成 0.05mm，那么地球公转半径得画成 1.18 m，把地球自转的这种次要运动相对于公转而忽略，地球就被当成一个没有大小和形状的点. 在这里可知，忽略各部分运动的差别与忽略大小和形状这两方面是一致的.

实际上还存在着许多简单得多的物体运动的情况，如活塞在气缸中的运动，抽屉的运动，上面扔出去的粉笔头（或扔手榴弹）若在空中不翻滚，其上任意两点的连线总是平行于自身方向前进，等等. 在这些情况下，物体上每个点都作同样的运动，于是其中任意一点的运动都可以用来代表整体的运动.

综上所述，物体各部分运动完全一样，或物体各部分运动的差别在研究的问题中可以忽略，就可以用一个点来代表这个物体，这个点集中了物体的质量（物体的质量不能忽略），称为**质点**.

物理学中为了突出问题中的主要矛盾，常在科学分析的基础上将一些影响不大的次要因素忽略，从而建立起一种理想模型，用

研究模型的运动代表实际物体的运动．质点就是一个理想模型．

研究地球公转时，忽略地球的自转，将地球这么大一个球体也可当质点．然而如果问题只关心地球的自转，则地球上各个点运动的差别就不能忽略，地球就不能当作质点．又如研究分子的转动，一个直径约 10^{-2}—10^{-10} m 线度的分子（例如 H_2 分子，两核平衡距离～0.8 Å＝0.8×10^{-10} m)，这么小也不能当成质点．再如齿轮和车轮的转动运动也不能当成质点．可见一个物体能否作为质点，要看在研究的问题中各点运动的差别能否忽略，而不在物体本身线度的大小；同一个物体的运动，在有些问题中可当质点，另一些问题中就不能当质点．

对于地球的自转、齿轮和车轮的转动等这些运动问题，由于各点运动的差别不能忽略而不能当质点．但这些物体运动中大小和形状的变化可以忽略．譬如，尽管地球自转时河流中的水在流动，潮汐现象在发生，某些地方在地震，汽车开过马路或桥梁时地面和桥梁在颤抖等等，这些次要的运动相对于地球自转可以忽略；车轮滚过地面，接触地面处多少也有一点变形，相对于车轮本身这些变化也可以被忽略．从这些物体运动问题中可以抽象出另一种理想模型——刚体．所谓刚体就是在运动中物体的形状和大小均不发生变化的物体．

§1.3 质点的位置矢量（位矢）和位移

要描述可以当作质点的物体的运动，(如电子的运动，天体、人造卫星、单摆等物体的运动都可当作质点.）首先得描述质点在空间的位置，因为位置的变化即运动．

（一）质点的位矢和轨迹

要表示某时刻 t，质点 P 的位置，最通常的办法是在地面参考

系上取一个固定参考点 o 作原点，建立固定的直角坐标系. 坐标轴分别为 x、y、z 轴. 轴方向单位矢量分别设为 $\vec{i}$ $\vec{j}$ 和 $\vec{k}$（本书矢量上均加箭头.），则 P 点的位置可以用过 P 分别作与坐标平面 yoz、zox、xoy 平行的平面分别与 x、y、z 轴的交点 x、y、z 表示. 称 (x,y,z) 为质点 P 在 t 时刻的坐标. 质点运动，其位置随时间变化，坐标 x、y、z 都是时间的函数：

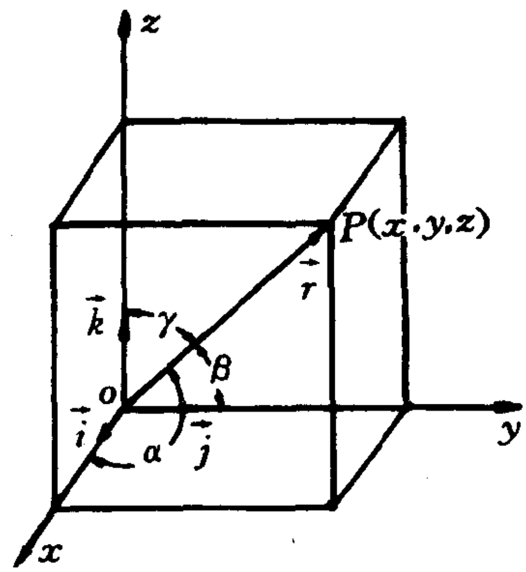


图 1.3—1

$$x = x(t);y = y(t);z = z(t). \qquad (1.3-1)$$

质点的位置也可以用从原点 o 到 P 的矢量 $\vec{r}$ 表示. 将 $\vec{r}$ 称为质点在 t 时刻的**位置矢量**，简称**位矢**. 见图 1.3－1. $\vec{r}$ 矢量在坐标轴上的投影分别为 x、y、z. 这也就是位置坐标.

则：
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \qquad (1.3-2)$$

位矢 $\vec{r}$ 是矢量，既有大小，还有方向. 位矢 $\vec{r}$ 的大小是它的长度，用 r 表示. 则

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (1.3-3)$$

$\vec{r}$ 的方向可以用它与三个坐标轴夹角的余弦（称为**方向余弦**）表示：

$$\cos\alpha = \frac{x}{r},\ \cos\beta = \frac{y}{r},\ \cos\gamma = \frac{z}{r}. \qquad (1.3-4)$$

（注意：$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$）

(1.3－1) 式或 (1.3－2) 式不仅表示了质点在 t 时刻的位置，而且随着 t 变化也即描述了不同时刻质点的位置，即这两式中任

一式都表示了质点的位置和运动规律，称为质点的**运动学方程**.

质点运动时在空间经历的路线称为**轨迹或轨道**. 取不同时刻的 t 值，代入运动学方程，得出各个不同时刻质点的位置，将各个位置连成曲线，便得到质点运动的轨迹. 其实(1.3－1)式即**轨迹参数方程**，从其中消去 t，即得：

$$x = x(z), y = y(z); \text{ 或 } f(x,y,z) = 0. \quad (1.3-5)$$

(1.3－5)式即**轨迹方程**.

质点运动按轨迹分为**直线运动**和**曲线运动**.

质点若在平面上运动，可以在它运动的平面上建立一个坐标系，用两个坐标就可以确定质点位置. 如建立直角坐标系，质点的位置由：$x = x(t), y = y(t)$ 确定. 其位矢为：$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

例 1　平抛体运动学方程为：$x = v_0 t, y = h_0 - \frac{1}{2}gt^2$ 求轨迹方程.

解　由 $x = v_0 t$ 得 $t = \frac{x}{v_0}$. 代入 y 得：$y = h_0 - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2$.

为抛物线方程，作图如图 1.3—2.

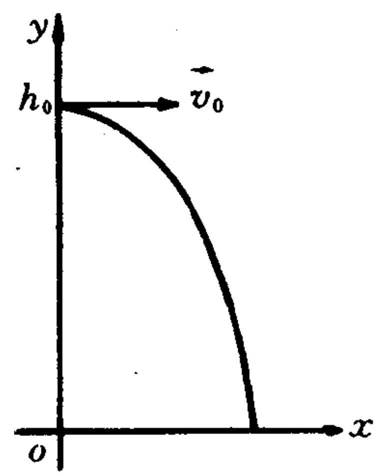


图 1.3—2

质点作直线运动，就沿轨迹取 x 轴. 运动学方程是 $x=x(t)$. 例如自由落体运动，以落点为坐标原点，沿下落方向为 x 轴正向，t 时刻质点位置：$x=\frac{1}{2}gt^2$，式中 t 以秒 (s) 为单位. g 为自由落体加速度 ($g=9.8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$). 这里运动学方程 $x=x(t)=\frac{1}{2}gt^2$ 表达的函数关系是抛物线（曲线），不是质点运动的轨迹.

（二）质点的位移和路程

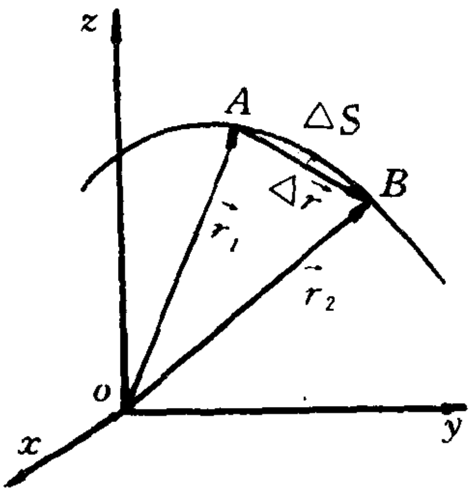


图 1.3—3

见图 1.3－3，t 时刻质点位于 A 点，位矢为$\vec{r}_1=\vec{r}\ (t)$；$(t+\triangle t)$ 时刻质点运动到 B 点，位矢为$\vec{r}_2=\vec{r}\ (t+\triangle t)$，质点位置的变化为

$$\triangle\vec{r}=\vec{r}\ (t+\triangle t)\ -\vec{r}\ (t) \tag{1.3-6}$$

称$\triangle\vec{r}$为质点在$\triangle t$ 时间内的**位移**. 位移是 t 到 $t+\triangle t$ 时间内位置矢量的改变量，是从 A 点到 B 点的矢量. 它的大小$|\triangle\vec{r}|$，是 A 到 B 的直线距离，表示质点位置改变的大小；它的方向从 A 到 B，表示质点位置变动的方向.

应指出：位矢是与某时刻对应的瞬时量，位矢和参考点的选择有关；位移是位置在某时间间隔内的改变量，和参考点的选择无关. 一般情况下，位移的大小不等于位矢大小的增量. 即$|\triangle\vec{r}|\neq\triangle|\vec{r}|$. 这从图 1.3－3 也可知：$|\triangle\vec{r}|=\overline{AB}$；$\triangle|\vec{r}|=\overline{OB}-\overline{OA}$；$\overline{AB}\neq\overline{OB}-\overline{OA}$.

质点运动轨迹的长度称为**路程**，用弧长$\triangle S$ 表示.（$\triangle S=\widehat{AB}$弧长）路程$\triangle S$ 是标量. 位移$\triangle\vec{r}$是矢量. 位移的大小一般也不等于弧长. 只有在单方向直线运动中才有$|\triangle\vec{r}|=\triangle S$，或者在$\triangle t\rightarrow 0$ 时，$\triangle S\rightarrow 0$，$|\triangle\vec{r}|\rightarrow 0$，可认为$|\triangle\vec{r}|=\triangle S$.

在直角坐标系情况下

$$\vec{r}\ (t)=\vec{r}_1=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}.$$

$$\vec{r}\ (t+\triangle t)=\vec{r}_2=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}.$$

则： $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$$= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

$$= \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}. \qquad (1.3-7)$$

这里 $\Delta x = x_2 - x_1; \Delta y = y_2 - y_1; \Delta z = z_2 - z_1.$

$$(1.3-8)$$

在直线运动中，沿轨迹取坐标轴，质点可以有两个运动方向. 取定 x 轴方向向右为正. 设 t 时刻质点在$\vec{r}_1 =$

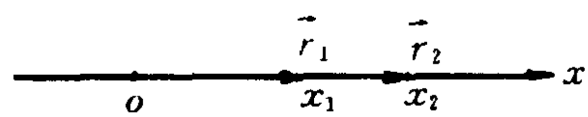


图 1.3—4

$x_1\vec{i}$ 处(则 $x_1 > 0$ 表示质点在 x 轴上原点之右；$x_1 < 0$ 表示质点在 x 轴上原点之左；$x_1 = 0$ 表示质点在原点). 在 $t + \Delta t$ 时刻质点在 $\vec{r}_2 = \vec{r}(t+\Delta t) = x_2\vec{i}$ 处，则

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\vec{i} = \Delta x\vec{i}. \qquad (1.3-9)$$

$\vec{i}$ 为 x 轴方向单位矢量，其大小为单位 1，方向为 x 轴方向均已确定. 所以(1.3－9)式给出位移 $\Delta\vec{r}$ 的大小由 $|\Delta x|$ 决定，而位移的方向由 Δx 的正负决定：

若 $\Delta x > 0$，说明 $x_2 > x_1$，位移沿 x 轴正向；

若 $\Delta x < 0$，$x_2 < x_1$，位移沿 x 轴反向；

若 $\Delta x = 0$，$x_2 = x_1$，质点没有位移.

由此可知在直线运动简单情况下，沿直线取坐标轴，可以用 Δx 表示位移的大小和方向.

§1.4 质点运动的速度和加速度

（一）质点在直线运动中的速度和加速度

见上节图 1.3－4，质点作直线运动，取坐标轴沿轨迹．t 时刻质点在$\vec{r}_1 = x_1\vec{i}$ 处；$t + \triangle t$ 时刻质点在$\vec{r}_2 = x_2\vec{i}$ 处，$\triangle t$ 时间内质点的位移为：

$$\triangle\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\vec{i} = \triangle x\vec{i}. \qquad (1.3-9)$$

(1) 平均速度

质点的位移 $\triangle\vec{r}$ 和产生位移的时间间隔 $\triangle t$ 之比值为：

$$\frac{\triangle\vec{r}}{\triangle t} = \frac{\triangle x}{\triangle t}\vec{i}. \qquad (1.4-1)$$

称$\dfrac{\triangle\vec{r}}{\triangle t}$为质点在 $\triangle t$ 时间内的**平均速度**．由定义式(1.4－1)知，平均速度是矢量：大小为$\left|\dfrac{\triangle\vec{r}}{\triangle t}\right| = \left|\dfrac{\triangle x}{\triangle t}\right|$；方向和位移方向一致．平均速度是 $\triangle t$ 时间内质点运动情况（快慢和方向）的粗略描述．实际上物体运动快慢也不一定按照平均速度大小运动，可能一会儿快些，一会儿慢些．就是直线运动情况下，质点甚至还可以在 $\triangle t$ 时间内曾经正向运动后反过向，又向正向运动．

例1 设汽车由西向东开，作直线运动以车站为原点，位置～时间关系为 $x = bt^2$，b 为常数，x 单位为(m)，t 单位为(s)，b 单位为($\mathrm{m\cdot s^{-2}}$)．求汽车在 t 到 $t + \triangle t$ 时间内的平均速度．

解 按定义平均速度为$\dfrac{\triangle x}{\triangle t}$，先算 $\triangle x$，

$$\begin{aligned}\triangle x &= x(t + \triangle t) - x(t) = b(t + \triangle t)^2 - b(t^2) \\ &= b(2t + \triangle t)\triangle t,\end{aligned}$$