运筹图论

(图、网络理论中的运筹问题)

杜端甫 编

北京航空航天大学出版社

运 筹 图 论

（图、网络理论中的运筹问题）

杜 端 甫 编

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书较为全面、系统地介绍了图论与网络分析中的基本运筹问题，图的基本概念，各类网络模型、优化方法及其应用。取材兼顾理论的系统性与实用性，并侧重于理论的实际应用。论述简明扼要，深浅适度。附有较丰富的应用实例与算例。

本书可用作高等理工科院校系统工程、管理工程、管理信息系统等工程类研究生及高年级本科生的教学用书或参考书。亦可供从事运筹学、应用数学、计算机科学及管理领域的科研人员和工程技术人员参考。

运 筹 图 论

YUNCHOU TULUN

（图、网络理论中的运筹问题）

(TU、WANGLUO LILUN ZHONG DE YUNCHOU WENTI)

杜端甫 编

责任编辑 郭维烈

北京航空航天大学出版社出版

新华书店总店科技发行所发行 各地新华书店经销

昌平建华印刷厂排版 通县觅子店印刷厂印刷

*

787×1092 1/16 印张：19.75 字数：505千字

1990年元月第一版 1990年元月第一次印刷 印数：3200册

ISBN 7-81012-129-4/O·013 定价：3.95元

前言

图与网络理论是近数十年以来运筹学领域中发展比较活跃的分枝。系统工程方面很多有实用价值的问题不少与图、网络分析理论相联系。网络分析在工程项目管理中卓有成效的应用以及运筹学方面计算机应用软件的开发，对网络分析的算法研究有很大的促进。

运筹学中的图、网络理论之所以能够得到广泛的应用与发展，同其他分支相比较具有如下特点：适应性较强的构模能力，对实际问题描述的直观性以及易于将一些复杂的问题分解或转化成为更有效的方法求解。

本书基本内容作为系统工程硕士研究生学位必修课已有七、八年历史，其取材主要考虑工程类硕士研究生的基本要求，着眼于有应用价值的理论问题，使来自各类专业背景的学生能够在图的基本理论概念了解的基础上，重点放在理解和掌握图、网络理论中各类优化模型的特点和算法分析方面，对于有实际应用背景的一些难题也作一定的介绍和讨论。必要的定理与算法的证明，只限于构造性的推理过程与算法思想的理解。各类问题都通过相应的算例以帮助读者更直观地了解模型的应用和加深对算法过程的消化与掌握。

国内外以图论与网络分析的运筹问题为主题的教材甚多，其命名各异，例如有："网络分析基础"，"图、网络中的最优化问题"，"图与网络流理论（运筹学丛书）"，"应用图论"，"图论中的运筹问题"等等。为了更确切、简明地表达本书的主题与内涵，根据国内有的学者的见解，编者认为本书定名为"运筹图论"更为适宜。

全书共分十四章，前五章为图论基础部分，概要地介绍了图的一些基本概念，图的向量空间和矩阵，使读者能够从集合与代数二个方面对图的性质及其典型子图之间的关系有所了解。作为图论基础转向网络分析的过渡，在第六章中简要地介绍了以后各章中常用的算法设计基本方法，搜索技术与分枝定界法。第七至第十四章是全书的主题，在七、八、九章中较为全面地、系统地介绍了最短路径问题和网络流问题的各类模型及其扩展形式，这些都是网络分析中的最基本运筹问题。这三章中除了介绍各类模型的算法特点以外并对算法的复杂性进行了概要分析。十、十一、十二、十三章介绍了运筹图论中著名的、具有广泛实用背景的问题，如对集与覆盖，中国邮路问题，旅行推销员问题、设点问题等，其中有的是组合优化中的著名难题。在这四章中我们较为系统地介绍了各类问题的基本算法，讨论了问题的扩展形式与应用，并对近似的求解方法也作了一定的介绍。网络分析在项目管理中的应用——活动网络，在系统工程中亦具有重要地位，第十四章系统地介绍了活动网络的三种基本型式、算法及网络流理论在活动网络费用优化中的应用。

本教材基本内容经多年教学实践，在理论的系统性与实用性二方面，不断得到充实与修正。整理出版能够适合我国工程类系统工程，管理工程专业研究生使用的图、网络分析方面的教材。是教与学二方面的需要。

本教材承王日爽教授细心审阅，提出了许多宝贵的意见，在此表示深切的谢意。同时还应感谢顾昌耀教授，冯允成教授、董少英同志，徐珠芳同志对本教材编写、出版的支持和帮助。

由于本人学识水平有限，错误不当之处难免，恳请读者批评指正。

编　者

1989年3月

目　　录

第一章 基 本 概 念

§1.1 图、网 络

一、图

什么是图？这里所讨论的是图论中的图，它是在组合概念下所定义的图，图的基本元素是顶点以及顶点之间的联系关系。多数图可以用几何图形来表示，但是很多情况则不可能也不需要将图形画出，这同样并不影响我们对图的研究。图论的发展已经涉及到广泛的领域，近半个世纪以来，在理论和应用两个方面都有很大的进展，一些有特色的应用领域，如电网络等已从图论的范畴分离出去，有其独自的研究方法和理论体系，为了便于讨论图论中的基本运筹等问题，明确我们所使用的术语，对一些图论、网络的基本概念需作必要的定义。

定义1.1 有向图G_D：称如下集合对为有向图

$$G_D=(V, A)$$

V：顶点集，非空，

$$V=\{v_1, v_2\cdots\cdots v_p\}$$

式中p为顶点集中所含元素的个数。

A：弧集，V中元素有向对的集合，

$$A=\{a_1, a_2\cdots\cdots a_l\cdots\cdots a_q\}$$

式中q为弧集中弧元素的个数，

其中 $a_l=(v_i, v_j)$ $a_l\in A$，v_i、$v_j\in V$，且$(v_i, v_j)\neq(v_j, v_i)$，可简记为：$a_l=v_iv_j$，或$a_l=(ij)$。

在$G_D=(V, A)$中存在顺序映射关系

$$\Gamma: V\rightarrow V$$

这里v_i在Γ下的映射可用Γv_i表示

$$\Gamma v_i=\{v_j | (v_i, v_j)\in A\}$$

若$v_j\in\Gamma v_i$，则称v_j是v_i的直接后继，而v_i为v_j的直接先导。据此，有向图的定义还可以表达如下。

定义1.1a **有向图**G_D，由下列集合对所构成。

$$G_D=(V, \Gamma)$$

V：顶点集，非空。

Γ：V到它本身的映射（Γ：$V\rightarrow V$）。有向图用映射来定义有时更便于应用。相对于

$G_D=(V, \Gamma)$，G_D的逆图可表示为$G_D^{-1}=(V, \Gamma^{-1})$这里，$v_i\in\Gamma^{-1}v_j$当且仅当$v_j\in\Gamma v_i$。

假如G_D和它的逆G_D^{-1}相同，则称G_D为**对称有向图**，有向图、对称有向图如图1-1所示。

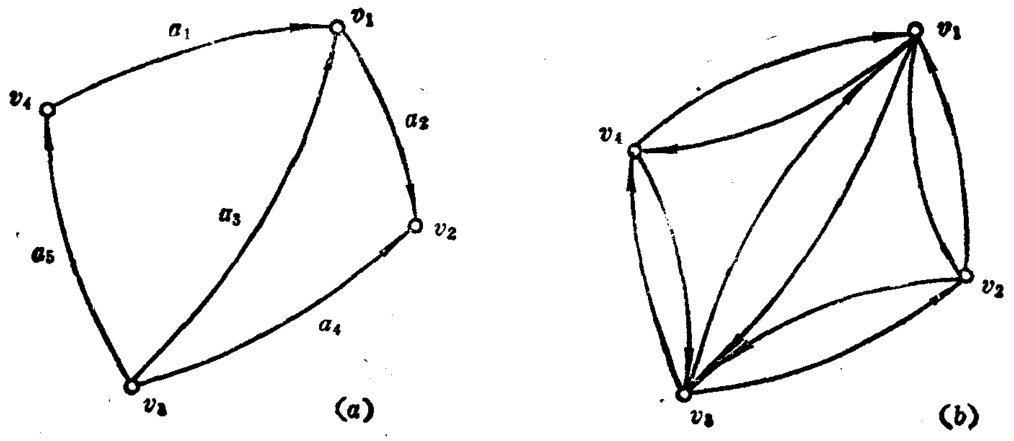

图 1-1

由此，可以很方便地引出无向图的概念。

定义1.2　无向图G，由下列集合对所组成。

$$G=(V,\ E)$$

V：顶点集，非空。

E：边集，V中元素无向对的集合

$$E=\{e_1,\ e_2\cdots\cdots e_q\}$$

q：为边元素个数，

$e_i=(v_i,\ v_j)$　　$e_i\in E$，v_i、$v_j\in V$且$(v_i,\ v_j)=(v_j,\ v_i)$。

在图的一般定义中，构成弧或边元素的顶点，不要求相异。但是，由同一顶点作为两端的弧元素或边元素称为**自环弧**或**自环边**。相同顶点对所对应的边(或方向一致的弧)称为**多重边**(或**多重弧**)。不存在多重边(或弧)与自环边(或弧)的图称**简单图**。仅有一个顶点的图称**平凡图**。

图1-1(b)的对应无向图如图1-2所示，带有自环边的图如图1-3所示

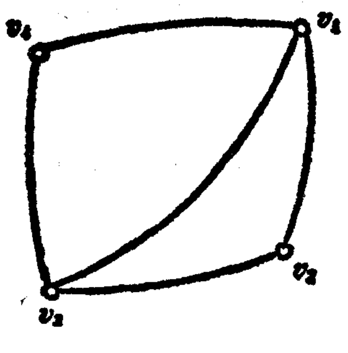

图 1-2

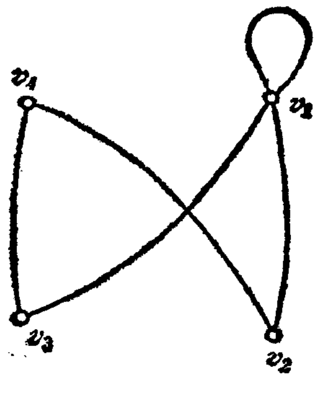

图 1-3

实际问题中，用顶点表示的对象之间的联系关系常常是有向(或有序)和无向(无序)相间存在，由此而构成的图将是混合形式。显然，从定义概念来看，有向图的条件将紧于无向图，而从对实际问题的表达来看有向图将能替代无向图。

实际问题的有限性将决定我们所讨论的图是有限图，因为用以表示有限事物的对象——顶点是有限的。

二、网　络

图论的实际应用大量的是网络问题，图中加入了各类数量指标可用以表达很多实际问题，由此而引出的各种量化指标的优化问题，即是运筹图论所要讨论的对象。在图论中我们统称附加于图的元素中的数量指标为权，特称被赋有权值的图为网络。

定义1.3　网络（有向网络）N_D为赋权图（赋权有向图）

$$N_D=(V,\ A,\ W)$$

由图G_D及相应的权集所构成

$$G_D=(V,\ A)$$

$$W=\{w(v_i,\ v_j)\},\quad (v_i,\ v_j)\in A$$

相应地，对应于一个无向图，可以有无向网络N

$$N=(V,\ E,\ W)$$

$$G=(V,\ E)$$

$$W=\{w(v_i,\ v_j)\}\quad (v_i,\ v_j)\in E$$

在很多著作中图与网络的概念常常混用，一般地说图论中所讨论的图，特别在应用图论（含运筹学中的图论）中所讨论的图多数是网络。

§1.2　图论中运筹问题举例

生产建设中的大量实际问题其规划与安排的优化，可以应用图论、网络模型来描述和求解，一些特殊类型的线性规划或整数规划问题，应用网络方法来求解，从模型的直观性和求解的有效性来评价，都有其一定的优越性。现列举若干可以归结为运筹图论的实际问题，以建立初步的直观概念。在以后各章的讨论中，我们将继续用实例来充实各类模型。

一、生产计划的安排

某机械制造企业按合同要求于下半年每月末提供d_i件产品，i为月份。由于产品比较庞大，该企业库存有限，在每月月初至多允许存放该产品5件，并且每月每件的存储保管费为1个单元，计划初期已有产品3件，年末合同完成时要求该产品库存量为0，又由于原材料、劳动等成本费用的变化，各个月份单位产品的预计成本为p_i，有关d_i p_i的参数给出如表1-1。

表 1-1

月份	1	2	3	4	5	6
d_i	1	1	0	3	3	4
p_i	11	13	13	12	14	13

由于生产能力有限，该企业每月只能生产该产品2件。问采用怎样的生产计划是最有利的安排。

图1-4所示，是满足各种限制条件下的可能存货状态和状态之间的转换。在每一条弧旁边的数字是生产和存放费用总和。例如，第五个月从$s_5=3$转到$s_6=2$，供应顾客3件产

品，并且生产 2 件产品，则此情况的总费用为

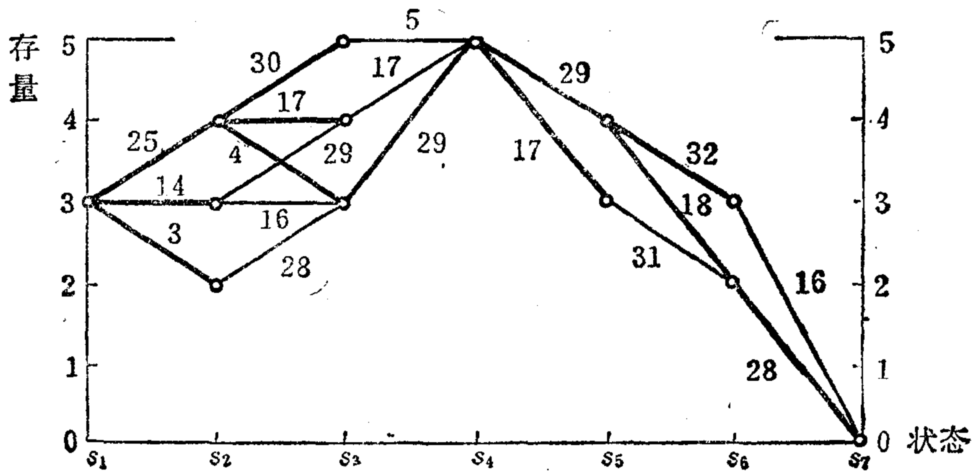

图 1-4

$$(s_5 \times 1)+(2\times P_6)=(3\times 1)+(2\times 14)=31$$

这一生产计划问题变为求解从第一个月的开始状态到第六个月的终止状态的最短路（即总费用最少的路）。这个问题的最优安排是第一个月到第六个月的生产数量分别为：2，0，2，2，1，2，总费用为133，其最短路如图1-4粗黑线所示。

二、线路布置问题

有若干城市，例如 6 个城市v_1 v_2……v_6，需要建立连通的通讯网，各个城市对之间可能修建的线路与费用如图1-5所示，某些城市对之间不能直接修建通讯线路（或修建费用太贵），问题是要求解决在保证各城市间有通讯线路相连通，并且线路网修建总费用最少的布线方案，这是典型的最小生成树问题。其结果如图中加粗黑线所示。

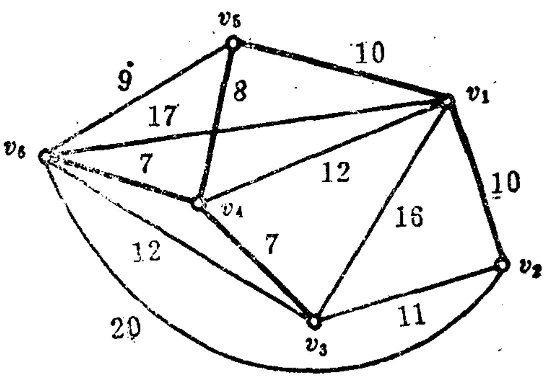

图 1-5

三、多品种产品生产和配置问题

一个食品公司有 8 个工厂生产二种商标，包装重量各不相同的 9 种小食品，包装不同重量的包装机器能力各不相同，已知各工厂所配备的包装机器的能力和能够完成的包装类别以及每一工厂的烹煮设备的能力。产品出厂后经中间仓库到各个批发点。由于设备的不同，各类产品在不同工厂单位生产成本亦不相同，不同重量包装运输费用亦不相同，最终导致在各个批发点产品的直接成本与该产品所用的包装机器、生产工厂以及运输到批发点的路线等因素有关。问题是要确定这 9 种产品在各工厂的生产量和运输路线，以保证在满足各批发点的需要量条件下总成本最低。

用网络的形式表达这个复杂的多品种生产问题如图1-6所示，图中6*c*，12*c*……43*c*代表*A*商标的不同包装的产品，12*c*，22*c*，43*c*代表*B*商标的不同包装的产品；F_1 到F_8 为 8 个工

厂，各工厂与产品的连线表示该工厂所配备的包装机能够生产这类包装的产品，第二排表示工厂的节点与第一排表示工厂的节点的连线F_i—F_i为各工厂烹煮设备能力的限制，也是工厂总产量的限制，D_1到D_4是各中间仓库，它与各工厂的连线表示产品的输送关系，由地区和库容限制，w_1到w_4为批发点，D与w的连线表示中间仓库与批发点的供应关系。

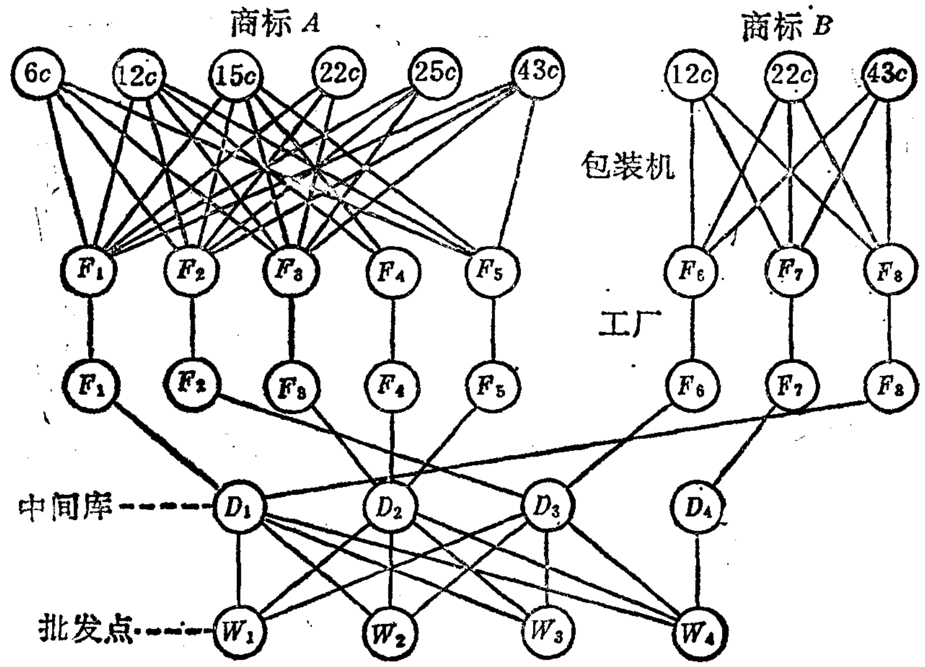

图 1-6

问题归结为在这一个带有费用的容量网络中求解多种产品的流量分布，使总经营成本最低。这问题是较为复杂的多货物网络流问题。

四、换房问题

某房管所管辖一批房屋，按照房屋的地理位置、设备条件、面积、租金等可以分为若干类房型，每隔一定时间由于各种原因，有一部分住户希望换房，有的需要换成设备好些，但面积可以小一些的，有的需要换成面积大一点的，还有地点、距离、上班远近等问题，房管所的工作目标是希望尽可能多地满足住户的要求，各别的调换，固然能满足部分住户的要求，如能通盘考虑，则能使更多住户的要求得到满足，若各房型现有住户已满，各住户的换房需求如下列矩阵所示

$$c_{ij}=\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 8 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵元素c_{ij}表示第i类房型住户希望换到第j类房型的需求数量，共有五类房型可供互换，按照所给的需求矩阵，个别对换所能解决的数量有限，若能采用循环换房，形成一个回路。

例如1型换到5型，5型换到3型，3型换到1型，就可以总共解决15户，最后1—5—2—4—1还可以解决4户，总共68户需要换房，最终最多能解决58户。（详见§5.3）

这里所应用的是图的符号矩阵和距离矩阵的概念。

五、 布点问题

一个机械制造公司，下属的5个工厂，都需要一种特殊的原材料。这5个工厂位于不同城市。该公司计划建立一个或几个仓库，用于成批地收储这些材料，然后按生产的需求，分批送到各生产工厂，现有4个可供选择的设库地点，在i点建库费用为f_i，从第i个仓库点到各工厂所在城市j，每吨材料运输发送费用为c_{ij}（考虑了成批进料到i仓库的附加费用）。如何设置这些仓库使总费用最低（包括建库的固定费和原材料的发货运输费），这是一个简单的设点问题，见表1-2。

表 1-2

设点位置 i	f_i	往城市j发货的费用c_{ij}					$\sum_j c_{ij}$
		1	2	3	4	5	
1	7	7	15	10	7	10	49
2	3	10	17	4	11	22	64
3	3	16	7	6	18	14	61
4	6	11	7	6	12	8	44

六、 巡回路线问题

送奶员在一个住宅小区内送奶，小区的地形如图1-7所示，沿着这些小巷两边，都有住户需要送奶，送奶员从A点进入小区以后，最终仍要从A点出来，然后才能到公路返回奶场。该送奶员习惯的巡回路线是$A\ Y\ Z\ F\ Y\ X\ Z\ E\ B\ E\ D\ F\ D\ C\ A\ X\ B\ C\ A$。问这条巡回路线是否还可以改进？这是一个典型的中国邮路问题。

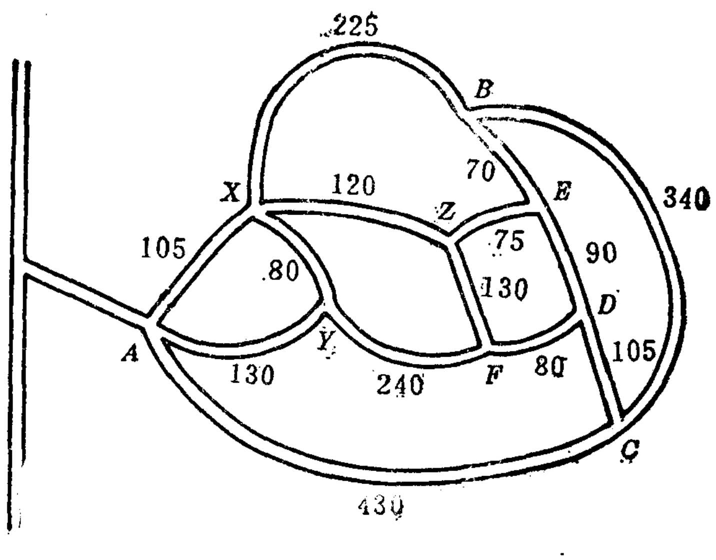

图 1-7

七、 运输车辆的配置与路线问题

一个有四辆运输车的车队，每辆车载重 5 吨，其任务是从一个仓库向 6 个客户发货，六个客户的需要供货量已知，运输的费用矩阵（c_{ij}）也已知，求解下列问题：

1. 四辆车全部调用，最省钱的车辆派遣路线。
2. 用车数量最少为多少，用车数最少情况下的派车路线。
3. 总费用最少的派车数和派车路线。

这是一个分派问题，需要应用多推销员回路的概念。（详见 § 12.6）

八、最优装载问题

某公司生产能力有限，明年可以生产的产品有m种$x_1,\cdots,x_m$，每件产品的单位利润为p_i，消耗的机器工时为t_i，机器的生产能力为T单位/天，若生产的产品都有销路，并且规定某种产品若生产时间超过二天以上，则必需连续安排不得间断，如何确定明年的生产方案，以期得到最大的利润，设已知下列参数表1-3。

表 1-3

i	1	2	3	4
p_i	5	11	7	17
t_i	2	4	3	5
$T=8$				

此问题被称之为背包问题，尤如一个旅行者决定如何装载其所带的食品，使其能够维持的天数最多，问题可用多段决策方法，通过求解网络的最长路得到所需结果，为此需列出不同生产能力以及生产不同产品的状态转换和收益变化的网络图形，最终归结为寻求从网络始端到终端的最长路，即最大利润安排。多段决策网络如图1-8所示。

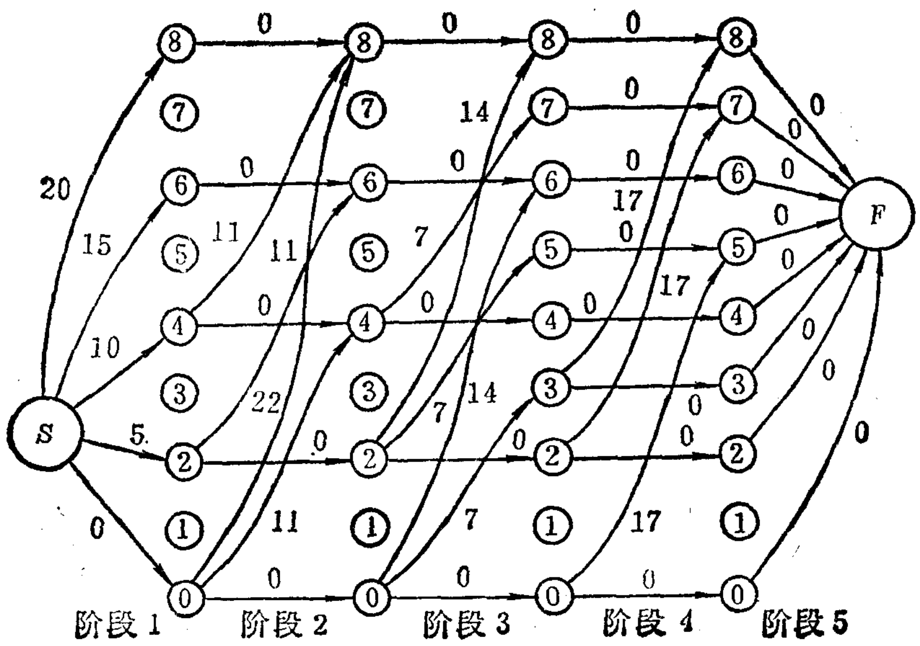

图 1-8

九、服务中心的设置

一个体育中心计划为n个居民区服务，各居民区的居民数为w_j，$j=1,\cdots,n$，现决定将体育中心设置在某一居民区，希望各区居民前来参加活动的平均往返路程为最小，如何选定此体育中心设点位置。我们假定各区前来参加体育活动的人数与该区总人数的比例为α，若体育中心设在i区，则居民平均往返距离为

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} 2\alpha w_j d(ij)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha w_j}$$

$d(ij)$为i到j的最短距离

问题归结为求

$$\tau(i)=\sum_{j=1}^{n} w_j d(ij)$$

对所有的i求$\tau(i)$，取$\min\tau(i)$。为此，需要求解所有居民点对i间的d_{ij}。

十、运输问题

某公司有三个工厂P、Q和R，每周需要一种特别的原材料，分别为5吨，9吨和6吨，这些原材料可以来自三个供应点A、B、C。供应点A、B最多每周可供应量各为8吨，其价格每吨分别为100和105，供应点C，供量不限，每吨价格为120，显然，公司在满足生产需求条件下，尽可能减少来自C供应点的供货，运输费用假定固定为每吨每公里1.5元。各供应点与工厂的距离已知如表1-4。

表 1-4

	P	Q	R
A	12	14	32
B	18	22	14
C	30	14	10

问题是需求解满足生产需求的供货方案，使总成本最低，这是一个多端点的网络流问题，其网络形式如图1-9所示。

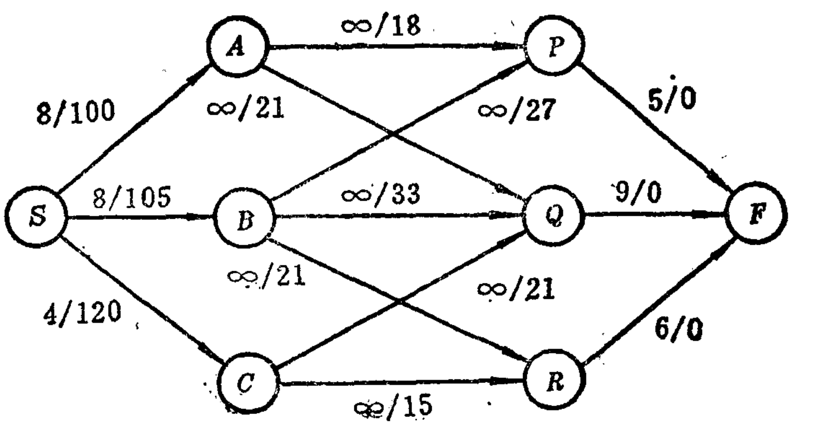

图 1-9

以上十例，提出了运筹图论中所涉及的一些基本问题，但尚不足以概括其全貌，其中多数

问题已有比较成熟的有效解法，有的涉及到一些著名的难题，近似的解决方法亦有很多讨论。实际问题的提练，构模以及模型的转换给我们展现了很多技巧。本书所介绍的材料期望能给读者带来更多的启示。

为了便于展开运筹图论中各类基本问题的讨论，有关图、网络的一些基础概念和问题，尚需作必要的介绍，熟悉这方面的读者可以略之。

§1.3 图的一些基本概念

一、关联和次

1. 关联：

当顶点v_i是某些弧(或边)a_i(或e_i)的一个端点时，则v_i与a_i(e_i)互相称为**关联**，在图1-1a中弧a_1、a_2、a_3与顶点v_1关联，而a_3则一端与v_1关联，另一端与v_3关联。关联于同一个顶点的弧(或边)称为邻接，图1-1(a)中，弧a_5，a_3，a_4相互邻接。另一方面，与同一条弧(边)相关联的两顶点则称为**相邻**，如v_1与v_3相邻，v_4与v_2则不相邻，邻接与相邻有时混用，在今后的讨论中更多地应用相邻。

2. 次：

关联于某一顶点v_i的弧(边)数，称为该顶点的**次**，用$d(v_i)$表示，例图1-1(a)中

$$d(v_1)=d(v_3)=3,\quad d(v_2)=d(v_4)=2$$

次的另一些译名有"价"，"度"等。次$d(v_i)=1$的顶点v_i称为**悬挂点**。在有向图中，各顶点的次还可以细分为出次和入次，进入顶点的弧数为入次，用$d^-(v_i)$表示，离开顶点的弧数为出次，用$d^+(v_i)$表示，图1-1(a)中 $d^-(v_1)=2$，$d^+(v_1)=1$。在任一中图，顶点的次有奇、偶之分，显然，由于每一条弧(边)，给图的顶点带来二个次，所以图中所有顶点的总次数二倍于图中的弧(边)数，即

$$\sum_{i=1}^{p} d(v_i)=2q$$

由上式我们可以推断得下列有用的结果。

定理1.1 在任一图中次为奇数的顶点个数必为偶数。

证明 将顶点集按次的奇、偶分为二组，由于图的总次数为偶数，则得

$$\sum_{i=1}^{p} d(v_i)=\sum_{\substack{\text{偶次}\\\text{顶点}}} d(v_j)+\sum_{\substack{\text{奇次}\\\text{顶点}}} d(v_k)=\text{偶数}$$

由等式左右各项皆为偶数，定理得证。

记$\Delta(G)$为图G的最大次，$\delta(G)$为图G的最小次

即 $$\Delta(G)=\max_{v_i\in V} d(v_i)$$

$$\delta(G)=\min_{v_i\in V} d(v_i)$$

二、同构与子图

1. 同构

与几何学中二个几何图形全等相类似，图论中的图亦有相同的概念，称之为同构。按照图的组合定义，两图的顶点数相等，弧（边）所对应的顶点对（有序或无序）一致，则两图同构，凡是两图同构，它们顶点之间，以及弧（边）之间均能一一对应，其相邻关系，关联关系以及各顶点的次均能一一对应。由于同一图可以用不同图形表示，对于较复杂的图，要判定两图的同构关系亦非易事。同构与非同构图分别如图1-10，图1-11所示。

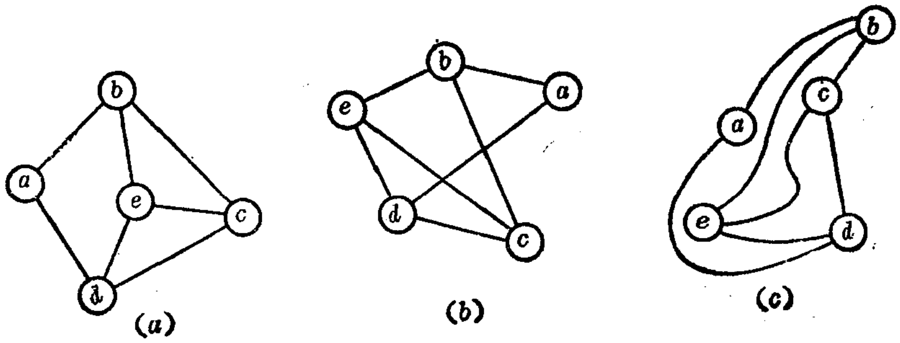

图 1-10

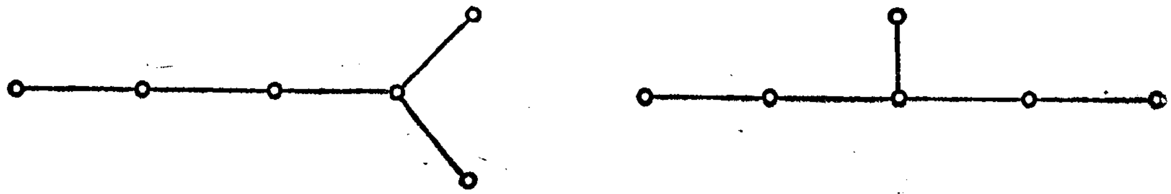

图 1-11

2. 子图

图g若符合如下条件则称i为图G的**子图**：即若g的所有顶点和边(或弧)为G中顶点集V，边集（弧集）E（A）的子集，即

有 $$g=(V_g,\ E_g)$$

$$G=(V,\ E)$$

若 $V_g\subseteq V$，$E_g\subseteq E$，则 $g\subseteq G$

注意到，边不可能孤立存在，边集必有相应的点集与之关联，讨论图的子图时要注意到顶点子集与边子集之间的关联关系。由子图概念我们可得下列判断：

(a) 图可以是它本身的子图，$G\subseteq G$;

(b) 图G的子图的子图也是G的子图，若$g\subseteq G$，$g'\subseteq g$ 则 $g'\subseteq G$;

(c) G中的一个顶点可以是G的子图。

$$g\subseteq G,\ V_g=\{v_1\},\ E_g=\phi$$

(d) G中的一条边及其两端点也是G的子图。

$$g\subseteq G,\ E_g=\{e_1\},\ V_g=\{v_1v_2 \mid e_1=(v_1v_2)\}$$

（1）不交子图 G的两个（或更多个）子图g_1，g_2若无公共边，则称g_1，g_2为图G的**边不交子图**。即子图g_1，g_2中

$$E_{g_1}\cap E_{g_2}=\phi$$

$$V_{g_1}\cap V_{g_2}\neq\phi$$