走向IMO
数学奥林匹克试题集锦
(2013)

顾问　裘宗沪

2013年IMO中国国家集训队教练组　编

IMO 2013

Colombia

上海著名商标

ECNUP

华东师范大学出版社

全国百佳图书出版单位

走向IMO

数学奥林匹克试题集锦（2013）

2013年IMO中国国家集训队教练组 编

华东师范大学出版社
全国百佳图书出版单位

图书在版编目(CIP)数据

走向IMO:数学奥林匹克试题集锦. 2013/2013年IMO中国国家集训队教练组编. —上海:华东师范大学出版社, 2013.8

ISBN 978-7-5675-1184-2

Ⅰ.①走… Ⅱ.①2… Ⅲ.①数学课—中学—竞赛题 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第204049号

走向IMO

数学奥林匹克试题集锦(2013)

编　　者　2013年IMO中国国家集训队教练组
总 策 划　倪　明
责任编辑　孔令志
装帧设计　高　山

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话021-62869887
地　　址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　江苏句容市排印厂
开　　本　890×1240　32开
印　　张　6
插　　页　4
字　　数　134千字
版　　次　2013年9月第一版
印　　次　2013年9月第一次
书　　号　ISBN 978-7-5675-1184-2/G·6818
定　　价　22.00元

出 版 人　朱杰人

2013 年 IMO 中国队在开幕式上

2013 年 IMO 中国队合影 *从左到右依次为：*
刘宇韬、 饶家鼎、 李秋生、 廖宇轩、 姚一隽、 顾超、 熊斌、 张灵夫、 张思汇、 刘潇

前　言

本书以 2013 年国家集训队的测试选拔题为主体，搜集了 2012 年 8 月至 2013 年 7 月间国内主要的数学竞赛及 2013 年国际数学奥林匹克试题和解答，并且附上了 2013 年美国和俄罗斯数学奥林匹克的试题与解答，2013 年罗马尼亚大师杯数学奥林匹克的试题与解答，这些试题大都是从事数学奥林匹克教学和研究的专家们的精心创作，其中的一些解答源自国家集训队和国家队队员，他们的一些巧思妙解为本书增色不少.

在过去的一年中，我国中学生数学竞赛的主要赛事有 2012 年全国高中数学联赛(中国数学会普及工作委员会主办)、2013 年中国数学奥林匹克(CMO)(中国数学奥林匹克委员会主办)，以及由中国数学奥林匹克委员会主办的第 11 届中国女子数学奥林匹克(CGMO)等.

在 2013 年国家集训队和国家队集训期间，得到了裘宗沪、王杰、潘承彪等专家们的鼓励、支持和指导. 另外在国家集训队集训期间，除了国家集训队教练组外，天津师范大学李建泉教授、江西科技师范大学陶平生教授为学生做了专题讲座，提供了一些测验题. 在国家队集训期间，除了国家队教练组外，潘承彪教授为学生做了精彩的报告，裘宗沪教授对学生进行了赛前指导，再次对他

们表示衷心的感谢.

本书倾注了许多专家和学者的心血，书中有许多他们的创造性的工作.本书可供数学爱好者、参加数学竞赛的广大中学生、从事数学竞赛教学的教练员、开设数学选修课的教师参考.

2012 年全国高中数学联赛及加试由吴建平整理，2013 年中国数学奥林匹克由陈永高整理，2012 年第 11 届中国女子数学奥林匹克由朱华伟整理，2012 年中国西部数学邀请赛由冯志刚整理，2012 年中国东南地区数学奥林匹克由李胜宏整理，2013 国家集训队测试题由熊斌整理，2013 年中国国家队选拔考试题由瞿振华整理，2013 年第 54 届国际数学奥林匹克由熊斌和李秋生整理.2013 年俄罗斯数学奥林匹克由李伟固整理，2013 年美国数学奥林匹克由张思汇整理，2013 年罗马尼亚大师杯数学奥林匹克由冯志刚整理.

囿于作者的水平，加上编写时间仓促，不足和错误在所难免，请广大读者朋友批评指正，不吝施教.

2013 年 IMO 中国国家集训队教练组
2013 年 7 月

目　录

2012 年全国高中数学联赛

受中国数学会委托，2012 年全国高中数学联赛由陕西省数学会承办，中国数学会普及工作委员会和陕西省数学会负责命题工作.

2012 年全国高中数学联赛一试命题范围不超出教育部 2000 年《全日制普通高级中学数学教学大纲》中所规定的教学要求和内容，但在方法上有所提高，主要考查学生对基础知识和基本技能的掌握情况，以及综合和灵活运用的能力. 全卷包括 8 道填空题和 3 道解答题，答卷时间为 80 分钟，满分 120 分.

全国高中数学联赛加试命题范围与国际数学奥林匹克接轨，在知识方面有所扩展，适当增加一些竞赛教学大纲的内容. 全卷包括 4 道解答题，其中一道平面几何题，答卷时间为 150 分钟，试卷满分为 180 分.

全国高中数学联赛于 10 月 14 日进行. 在各赛区初评的基础上，复评工作于 11 月 11 日至 14 日在西安进行，中国数学会和陕西省数学会的相关负责人参加. 经过复评，确定了“2012 年全国高中数学联赛赛区一等奖名单”，31 个赛区共有 1281 名同学获得赛区一等奖. 确定了“2013 年冬令营营员名单”，有 312 名同学取得了参加 2013 年沈阳冬令营的资格.

一、填空题(每小题 8 分,共 64 分)

1 设 P 是函数 $y=x+\frac{2}{x}(x>0)$ 的图象上任意一点,过点 P 分别向直线 $y=x$ 和 y 轴作垂线,垂足分别为 A、B,则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的值是________.

解法一 设 $P\left(x_0,\ x_0+\frac{2}{x_0}\right)$,则直线 PA 的方程为

$$y-\left(x_0+\frac{2}{x_0}\right)=-(x-x_0),$$

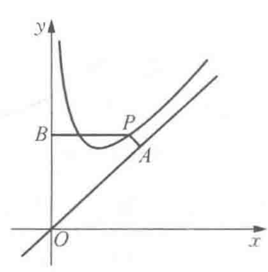
即 $y=-x+2x_0+\frac{2}{x_0}$.

由 $\begin{cases}y=x,\\ y=-x+2x_0+\frac{2}{x_0},\end{cases}$ 得 $A\left(x_0+\frac{1}{x_0},\ x_0+\frac{1}{x_0}\right)$.

又 $B\left(0,\ x_0+\frac{2}{x_0}\right)$,所以 $\overrightarrow{PA}=\left(\frac{1}{x_0},\ -\frac{1}{x_0}\right)$, $\overrightarrow{PB}=(-x_0,\ 0)$.

故 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\frac{1}{x_0}\cdot(-x_0)=-1$.

解法二 如图,设 $P\left(x_0,\ x_0+\frac{2}{x_0}\right)$ $(x_0>0)$,则点 P 到直线 $x-y=0$ 和 y 轴的距离分别为



(第 1 题)

$$|PA|=\frac{\left|x_0-\left(x_0+\frac{2}{x_0}\right)\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{x_0},$$

$$|PB|=x_0.$$

因为 O、A、P、B 四点共圆(O 为坐标原点),所以

$$\angle APB = \pi - \angle AOB = \frac{3\pi}{4}.$$

故 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = |\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{PB}| \cos \frac{3\pi}{4} = -1.$

2 设$\triangle ABC$ 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c,且满足 $a\cos B - b\cos A = \frac{3}{5}c$,则$\frac{\tan A}{\tan B}$ 的值是________.

解法一 由题设及余弦定理,得

$$a \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} - b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3}{5}c,$$

即 $a^2 - b^2 = \frac{3}{5}c^2$.

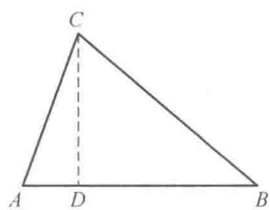
$$故 \frac{\tan A}{\tan B} = \frac{\sin A\cos B}{\sin B\cos A} = \frac{a \cdot \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}}{b \cdot \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}$$

$$= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2} = \frac{\dfrac{8}{5}c^2}{\dfrac{2}{5}c^2} = 4.$$

解法二 如图,过点 C 作 $CD \perp AB$,垂足为 D,则

$a\cos B = DB$, $b\cos A = AD$.

由题设得 $DB - AD = \frac{3}{5}c$.



(第 2 题)

又 $DB+DA=c$，联立解得 $AD=\frac{1}{5}c$，$DB=\frac{4}{5}c$.

故 $\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{\frac{CD}{AD}}{\frac{CD}{DB}}=\frac{DB}{AD}=4$.

解法三 由射影定理，得 $a\cos B+b\cos A=c$.

又 $a\cos B-b\cos A=\frac{3}{5}c$，联立解得

$$a\cos B=\frac{4}{5}c,\ b\cos A=\frac{1}{5}c.$$

故 $\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{\sin A\cos B}{\sin B\cos A}=\frac{a\cos B}{b\cos A}=\frac{\frac{4}{5}c}{\frac{1}{5}c}=4$.

3 设 $x,\ y,\ z\in[0,\ 1]$，则

$$M=\sqrt{|x-y|}+\sqrt{|y-z|}+\sqrt{|z-x|}$$

的最大值是________.

解 不妨设 $0\leqslant x\leqslant y\leqslant z\leqslant 1$，则

$$M=\sqrt{y-x}+\sqrt{z-y}+\sqrt{z-x}.$$

因为

$$\begin{aligned}\sqrt{y-x}+\sqrt{z-y}&\leqslant\sqrt{2[(y-x)+(z-y)]}\\&=\sqrt{2(z-x)},\end{aligned}$$

所以 $M \leqslant \sqrt{2(z-x)}+\sqrt{z-x}=(\sqrt{2}+1)\sqrt{z-x} \leqslant \sqrt{2}+1$.

当且仅当 $y-x=z-y$, $x=0$, $z=1$,即 $x=0$, $y=\frac{1}{2}$, $z=1$ 时,上式等号同时成立.

故 $M_{\max}=\sqrt{2}+1$.

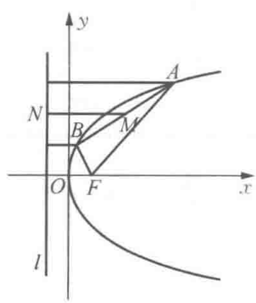
4 抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 的焦点为 F,准线为 l, A、B 是抛物线上的两个动点,且满足 $\angle AFB=\frac{\pi}{3}$. 设线段 AB 的中点 M 在 l 上的投影为 N,则 $\frac{|MN|}{|AB|}$ 的最大值是______.

解法一 设 $\angle ABF=\theta\left(0<\theta<\frac{2\pi}{3}\right)$,则由正弦定理,得

$$\frac{|AF|}{\sin\theta}=\frac{|BF|}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)}=\frac{|AB|}{\sin\frac{\pi}{3}}.$$

所以 $$\frac{|AF|+|BF|}{\sin\theta+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)}=\frac{|AB|}{\sin\frac{\pi}{3}},$$

即 $$\frac{|AF|+|BF|}{|AB|}=\frac{\sin\theta+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right).$$



(第 4 题)

如图,由抛物线的定义及梯形的中位线定理,得 $|MN|=\frac{|AF|+|BF|}{2}$.

所以 $\dfrac{|MN|}{|AB|}=\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

故当 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 时，$\dfrac{|MN|}{|AB|}$ 取得最大值为 1.

解法二 由抛物线的定义及梯形的中位线定理，得

$$|MN|=\frac{|AF|+|BF|}{2}.$$

在$\triangle AFB$中，由余弦定理，得

$$\begin{aligned}|AB|^2&=|AF|^2+|BF|^2-2|AF|\cdot|BF|\cos\frac{\pi}{3}\\&=(|AF|+|BF|)^2-3|AF|\cdot|BF|\\&\geqslant(|AF|+|BF|)^2-3\left(\frac{|AF|+|BF|}{2}\right)^2\\&=\left(\frac{|AF|+|BF|}{2}\right)^2=|MN|^2.\end{aligned}$$

当且仅当 $|AF|=|BF|$ 时，等号成立.

故$\dfrac{|MN|}{|AB|}$的最大值为 1.

5 设同底的两个正三棱锥 $P-ABC$ 和 $Q-ABC$ 内接于同一个球. 若正三棱锥 $P-ABC$ 的侧面与底面所成的角为 $45°$，则正三棱锥 $Q-ABC$ 的侧面与底面所成角的正切值是________.

解 如图，连结 PQ，则 $PQ\perp$ 平面 ABC，垂足 H 为正$\triangle ABC$的中心，且 PQ 过球心 O. 连结 CH 并延长交 AB 于点 M，则 M 为 AB 的中点，且 $CM\perp AB$. 易知 $\angle PMH$、$\angle QMH$ 分别为正三棱锥 $P-ABC$、$Q-ABC$ 的侧面与底面所成二面角的平面角，则

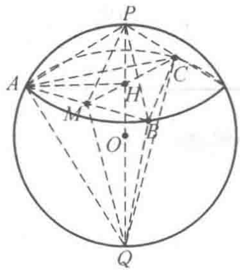
$\angle PMH = 45°$,从而 $PH = MH = \frac{1}{2}AH$.

因为 $\angle PAQ = 90°$, $AH \perp PQ$,所以 $AH^2 = PH \cdot QH$, 即

$$AH^2 = \frac{1}{2}AH \cdot QH.$$

所以 $QH = 2AH = 4MH$.

故 $\tan\angle QMH = \frac{QH}{MH} = 4$.



(第 5 题)

6 设 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且当 $x \geqslant 0$ 时,$f(x) = x^2$. 若对任意的 $x \in [a, a+2]$,不等式 $f(x+a) \geqslant 2f(x)$ 恒成立,则实数 a 的取值范围是________.

解 由题设知,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geqslant 0), \\ -x^2 & (x < 0), \end{cases}$$

则 $2f(x) = f(\sqrt{2}x)$.

因此,原不等式等价于 $f(x+a) \geqslant f(\sqrt{2}x)$.

因为 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是增函数,所以 $x + a \geqslant \sqrt{2}x$, 即

$$a \geqslant (\sqrt{2} - 1)x.$$

又 $x \in [a, a+2]$, 所以当 $x = a+2$ 时,$(\sqrt{2}-1)x$ 取得最大值为$(\sqrt{2}-1)(a+2)$.

因此,$a \geqslant (\sqrt{2}-1)(a+2)$,解得 $a \geqslant \sqrt{2}$.

故 a 的取值范围是$[\sqrt{2}, +\infty)$.

7 满足 $\frac{1}{4} < \sin\frac{\pi}{n} < \frac{1}{3}$ 的所有正整数 n 的和是________.

解 由正弦函数的凸性有，当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 时，$\frac{3}{\pi}x < \sin x < x$. 由此得

$$\sin\frac{\pi}{13} < \frac{\pi}{13} < \frac{1}{4},\ \sin\frac{\pi}{12} > \frac{3}{\pi} \times \frac{\pi}{12} = \frac{1}{4},$$

$$\sin\frac{\pi}{10} < \frac{\pi}{10} < \frac{1}{3},\ \sin\frac{\pi}{9} > \frac{3}{\pi} \times \frac{\pi}{9} = \frac{1}{3}.$$

所以 $\sin\frac{\pi}{13} < \frac{1}{4} < \sin\frac{\pi}{12} < \sin\frac{\pi}{11} < \sin\frac{\pi}{10} < \frac{1}{3} < \sin\frac{\pi}{9}$.

故满足 $\frac{1}{4} < \sin\frac{\pi}{n} < \frac{1}{3}$ 的正整数 n 的所有值分别为 10、11、12，它们的和为 33.

8 某情报站有 A、B、C、D 四种互不相同的密码，每周使用其中的一种密码，且每周都是从上周未使用的三种密码中等可能地随机选用一种. 设第 1 周使用 A 种密码，那么第 7 周也使用 A 种密码的概率是________.(用最简分数表示)

解 用 P_k 表示第 k 周用 A 种密码的概率，则第 k 周未用 A 种密码的概率为 $1-P_k$. 于是，有

$$P_{k+1}=\frac{1}{3}(1-P_k),\ k\in \mathbf{N}^*,$$

即

$$P_{k+1}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(P_k-\frac{1}{4}\right).$$

由 $P_1=1$ 知，$\left\{P_k-\frac{1}{4}\right\}$是首项为$\frac{3}{4}$，公比为$-\frac{1}{3}$的等比数列.

所以 $P_k-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}$，即 $P_k=\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}+\frac{1}{4}$.

故 $P_7=\frac{61}{243}$.

二、解答题(本大题共 3 小题，共 56 分)

9 (16 分)已知函数 $f(x)=a\sin x-\frac{1}{2}\cos 2x+a-\frac{3}{a}+\frac{1}{2}$，$a\in \mathbf{R}$ 且$a\neq 0$.

(1) 若对任意 $x\in \mathbf{R}$，都有 $f(x)\leqslant 0$，求 a 的取值范围；

(2) 若 $a\geqslant 2$，且存在 $x\in \mathbf{R}$，使得 $f(x)\leqslant 0$，求 a 的取值范围.

解 (1) $f(x)=\sin^2 x+a\sin x+a-\frac{3}{a}$.

令 $t=\sin x(-1\leqslant t\leqslant 1)$，则 $g(t)=t^2+at+a-\frac{3}{a}$.

对任意 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)\leqslant 0$ 恒成立的充要条件是

$$\begin{cases} g(-1)=1-\dfrac{3}{a}\leqslant 0, \\ g(1)=1+2a-\dfrac{3}{a}\leqslant 0, \end{cases}$$

解得 a 的取值范围为 $(0, 1]$.

(2) 因为 $a\geqslant 2$,所以 $-\dfrac{a}{2}\leqslant -1$. 所以

$$g(t)_{\min}=g(-1)=1-\frac{3}{a}.$$

因此, $f(x)_{\min}=1-\dfrac{3}{a}$.

于是,存在 $x\in\mathbf{R}$,使得 $f(x)\leqslant 0$ 的充要条件是 $1-\dfrac{3}{a}\leqslant 0$,解得 $0<a\leqslant 3$.

故 a 的取值范围是 $[2, 3]$.

10 (20 分)已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为非零实数,且对于任意的正整数 n,都有

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3.$$

(1) 当 $n=3$ 时,求所有满足条件的三项组成的数列 a_1、a_2、a_3;

(2) 是否存在满足条件的无穷数列 $\{a_n\}$,使得 $a_{2013}=-2012$? 若存在,求出这样的无穷数列的一个通项公式;若不存在,说明理由.

解 (1) 当 $n=1$ 时, $a_1^2=a_1^3$,由 $a_1\neq 0$,得 $a_1=1$.