

# 微分几何讲义

吴大任 编

人民教育出版社

本书内容是三维空间微分几何学。本版比前几版增加了“关于图形的整体性质”内容。第一章简单叙述了本书所需用的有关矢函数的知识；第二章到第四章是曲线理论；第五章初步介绍可展曲面，作为曲线理论与曲面理论的桥梁；第六章到第八章是曲面理论；第九章是关于图形的整体性质；附录 I—V 的内容是正文某些内容的补充。

本书原来的版本是理科数学专业多年使用的教材，修订后有部分内容超出了综合大学数学系《微分几何》教学大纲，经过教师根据教学大纲的要求对内容进行选择后可作为综合大学及师范院校数学专业的教材。

## 微分几何讲义

吴大任 编

\*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印装

\*

开本 850×1168 1/32 印张 13.25 字数 310,000

1959年12月第1版 1981年10月第4版 1982年4月第13次印刷

印数 129,501—154,500

书号 13012·0120 定价 1.20 元

## 初版序

本书原是 1957 年编者在南开大学讲授微分几何课程时所编讲义, 出版前略有增订. 内容大体依据 1956 年高等教育部审定的综合大学数学专业四年制用微分几何教学大纲, 在增订时曾经考虑到五年制的要求. 带有 \* 号的各章节一般是补充的, 次要的或较繁难的内容和证明, 讲授时都可以略去, 不影响或基本不影响以后的学习.

考虑到目前微分几何课程在教学计划里的安排, 本书所用的数学知识和工具限于解析几何(包括矢量运算), 数学分析和微分方程里的一般基础知识和工具, 没有用到复变函数, 变分法和偏微分方程等.

本书企图以较小的篇幅阐述三维欧氏空间里曲线和曲面的理论.

第一章除 § 6 和 § 7 外, 完全是复习矢代数和介绍有关矢函数的微分和积分等最简单的事实. 熟悉这一章的内容, 是阅读以后各章所必须的; 已经熟悉矢代数和矢函数的微积分方法的读者, 可以只读 § 6 和 § 7.

第二至第四章构成空间曲线论, 其中第四章兼讨论了平面曲线. 在那里, 平面曲线既作为空间曲线的特款, 又有其特殊的处理方法.

第五至第八章构成曲面论, 其中以第五章可展曲面初论作为曲线论和曲面论的桥梁, 称为“初论”是因为还有许多关于可展曲面的事实散见以下各章. 第六章和第八章后半论述曲面的内在性质. 第七章全章以法曲率为基础, 可以称为曲面的曲率理论. 第

八章前半主要是导出基本公式和基本方程，并证明基本定理。在第八章，采用了正交参数曲线网。

显然，在曲面论里，这样的安排就不免有逻辑结构不够严密，理论系统不够完整的缺点；例如曲面的内在性质被割裂，而且在引进某些内在性质的时候用到了非内在性质，又如第八章里的一些公式缺乏普遍性，因而缩小了应用范围等。但是，考虑到本书的初等性质，从教学效果出发，编者认为这样的安排有其现实的意义。

除第一章外，在各章末都附有或长或短的“结束语”，概括本章的主要内容，指出它们彼此间的联系，有时也指出本章与其他章的联系。这是编者的一种尝试，希望它们对于读者有所帮助。在阅读全章之前先看看结束语也可能有好处。

在大多数节后附有习题，它们应当看成是本书的有机组成部分。因为只有通过适当的练习，才能较具体地因而也更深刻地掌握理论。学会运用它们去解决实际问题。少数习题还是正文内容的补充。它们都不繁难，适应一般学生水平，个别的附有提示。习题一般是按其所需要的数学工具安排的；因此，有些习题按其性质或内容，是和以后某些章节相联系的，它们的分量也不代表各阶段应做练习的分量。

本书所用数学专门名词，基本上依照中国科学院编译出版委员会名词室编订的“数学名词”（1956），只有个别的更动，人名译名基本上根据高等教育出版社所编的“著译者参考资料”里的译名表，但已经普遍采用的不再更动。

本书因系讲义性质，编写时曾大量采用已有各书的内容和方法；这些书名，就不再一一列举。至于书中的谬误和缺点，一定很多，真诚地希望读者指正，欢迎和出版社或和编者本人联系。

吴大任

1959年建国十周年前夕于南开大学

## 再版说明

和第一版比较,再版的主要变动是增加了附录.

再版正文和第一版基本相同;在这里,只有三处较大变动值得一提.第一是把本书所需用的关于一阶线性微分方程组存在定理的证明从正文中抽出,略加修改,辑成一个附录(附录V);这样可以节省一般读者的时间,而希望了解这些定理证明的读者,也可以无需检阅其他参考书.第二是把第五章里关于单参数曲面族的部分抽出,也作为一个附录(附录I),而在第五章里只讨论单参数平面族;这样可能更适合多数读者的需要.第三是在第八章§13里增添了关于闭曲面总曲率的内容;其目的是为了显示曲面的局部性质和整体性质的一种联系,以及本学科和拓扑学的一种联系.

再版一共增加了五个附录;除上面已经提到的两个外,其余三个都是正文的补充.它们表明,引进新的数学工具,某些原有内容就可以处理得比较完善,还可以扩充或深化本学科的内容,并提出新的命题.

附录II论述了关于小积曲面的若干主要事实,附带补证了关于等角映射的某些结果.由于只假定读者具有复变函数论的最基本知识,不假定读者对于复空间的几何有任何了解,也由于企图较严格地处理复曲面和实曲面的关系,这个附录写得较长.

由于在第八章里采用了曲面上的正交参数曲线网,其中某些公式就缺乏普遍性.为了弥补这个缺陷,在附录III里引进了张量记法来论述曲面理论.阅读这个附录还可能有助于学习黎曼几何学.

附录IV论证了小积曲面和短程线的极小性质.虽然采用了

变分法的方法,但没有采用变分法的专门术语和符号,不假定读者对于变分法有任何了解。

总之,除了附录 II 里假定读者对于复变函数论有初步了解外,再版正文和附录都不假定读者已掌握更多的数学工具。除了附录 IV 采用了附录 III 里所引进的张量记法之外,各个附录是彼此独立的。没有把附录的内容编入正文,是为了不增加正文篇幅,保持本书的初等性质,保持使用上较大的灵活性,以适应不同读者和不同学校的需要。

作为一本教材,本书应如何使用的问题,在第一版序中已有说明。编者认为,进行教学的根本依据,应当是教学大纲而不是教材;前者规定课程的基本内容而后者则总是比较系统,丰富,以便于教师发挥自己的主观能动性,根据情况,进行剪裁组织,以至于加工,改造,也便于因材施教。例如在讲授曲面论时,是否从头或从一定地方起引用张量记法,教师完全可以根据条件自行抉择;如果引用,附录 III 就提供了必要的加工素材。不过,一般说来,附录的材料都不必进行讲授。除了带 \* 号各节和附录以外,如果仍感内容过多,还可以删去许多其他章节。个人意见,下列章节可能体现本课程一个最低限度的要求:

第一章, § § 3—8;

第二章, § § 1—5(删去弧长公式的推导);

第三章, § § 1—4, 6;

第四章, § 4;

第五章, § § 1—5;

第六章, § § 1—5;

第七章, § § 1—5, 7, 8, 11—14(删去 11. 3);

第八章, § § 1—3, 5, 6.

但只讲这些部分,内容又可能过于贫乏。因此,在每一次具体教学

---

过程中,一般地还需要根据情况,从其余部分中,作恰当的选择,补充进去.至于因精简了一些章节所引起的不衔接问题,并不严重,有一定经验的教师,都不难处理.

编 者

1964年建国十五周年前夕

## 第四版说明

本书初版至今,已 21 年. 鉴于图形的整体性质已愈来愈多地成为现代微分几何的研究对象,这次再版,除改善了少数定理的证明和逻辑顺序,改变了个别名词和记号外,只是增加了介绍图形最简单整体性质的第九章. 这一章所用到的预备知识和前八章相同.

近两年来,一些读者来信指出了旧版存在的刊误和不妥之处,本版都作了订正. 对此,愿表由衷的谢意.

编 者

1980 年除夕



# 目 录

初版序	I
再版说明	III
第四版说明	VI
第一章 矢函数	1
§ 1. 矢代数复习	1
§ 2. 直线和平面复习	5
§ 3. 纯量变数的矢函数与曲线的参数表示	7
§ 4. 矢函数的极限·连续性	9
§ 5. 矢函数的微导·曲线的切线	11
§ 6. 几种具有特殊性质的矢函数	14
§ 7. 关于矢函数的泰乐公式	16
§ 8. 矢函数的积分	18
第二章 曲线的基本三棱形	20
§ 1. 切线和法面·寻常点	20
§ 2. 密切面与副法线	22
§ 3. 主法线和从切面·基本三棱形	25
§ 4. 弧长	26
§ 5. 自然参数·基本矢	30
§ 6. 曲线间的切触阶	33
§ 7. 曲线和平面间的切触阶	34
结束语	36
第三章 空间曲线论的基本公式	38
§ 1. 基本公式的推导	38
§ 2. 曲率	43

§ 3. 挠率	45
§ 4. 曲线在一点邻近的结构	48
§ 5. 基本公式在运动学里的意义	5
§ 6. 密切圆	
* § 7. 密切球面	5
* § 8. 微分几何的任务·有关曲线的不变量	61
结束语	66
<b>第四章 曲线论的基本定理</b>	<b>68</b>
§ 1. 平面曲线论的基本公式	68
§ 2. 平面曲线的相对曲率	70
§ 3. 平面曲线论的基本定理	72
§ 4. 空间曲线论的基本定理	77
* § 5. 空间曲线论的唯一存在定理	78
* § 6. 一般柱面螺线	83
* § 7. 贝特朗曲线	87
结束语	94
<b>第五章 可展曲面初论</b>	<b>96</b>
§ 1. 曲面的参数表示	96
§ 2. 曲面的寻常点	99
§ 3. 切面与法线	101
§ 4. 直纹面与可展曲面	102
§ 5. 可展曲面的分类	106
§ 6. 曲线的法线所构成的可展曲面	109
§ 7. 曲线的渐伸线与渐缩线	112
7.1. 求一条曲线的渐伸线	112
7.2. 求一条曲线的渐缩线	113
§ 8. 可展曲面作为单参数平面族的包络面	
8.1. 特征线与包络面	第 5
8.2. 特征点与脊线	
* § 9. 曲线的法面族	

* § 10. 曲线的从切面族	122
结束语	124
<b>第六章 曲面的第一基本齐式</b>	126
§ 1. 第一基本齐式·曲面上曲线弧长	126
§ 2. 曲面上曲线的交角	127
§ 3. 曲面的面积	134
§ 4. 曲面的等距映射·曲面的内在性质	137
§ 5. 可展曲面在平面上的贴合	143
* § 6. 等角映射·等面映射	145
结束语	150
<b>第七章 曲面上曲线的曲率·一些重要的曲线</b>	152
§ 1. 第二基本齐式	152
§ 2. 法曲率	158
2.1. 曲面上曲线的曲率	158
2.2. 法曲率	159
2.3. 默尼埃定理	160
§ 3. 平面和球面的特征	161
§ 4. 主方向与主曲率	164
§ 5. 曲率线	168
* § 6. 关于三重正交曲面系的杜潘定理	170
§ 7. 欧拉公式	172
§ 8. 全曲率和中曲率·曲面在一点邻近形状的分析	174
* § 9. 中曲率为零的点·小积曲面举例	179
* § 10. 密切抛物面·杜潘标线	181
§ 11. 曲率线的特征	186
11.1. 罗德里克方程	186
11.2. 曲率线的几何特征	187
*11.3. 约阿希姆施塔耳定理	189
§ 12. 渐近曲线	191
§ 13. 可展曲面作为全曲率恒等于零的曲面	195

§ 14. 全曲率作为等距不变量·可展曲面作为可与平面贴合的曲面···	197
* § 15. 共轭方向和共轭曲线网·····	200
* § 16. 曲面的球面表示·第三基本齐式·····	203
结束语·····	208
第八章 曲面论的基本定理·曲面的内在几何·····	211
§ 1. 曲面论的基本公式·····	211
§ 2. 曲面论的基本方程·····	214
§ 3. 曲面论的基本定理·····	216
* § 4. 曲面论的唯一存在定理·····	219
§ 5. 短程曲率·····	222
5.1. 短程曲率的定义·····	222
5.2. 短程曲率的一个几何意义·····	223
5.3. 短程曲率公式·····	224
5.4. 曲面上一条曲线在平面上的伸展·····	225
§ 6. 短程线·····	227
6.1. 有关短程线的一些最直接的结论·短程线举例·····	227
6.2. 短程线的微分方程·····	229
6.3. 短程平行坐标·····	230
6.4. 短程线作为曲面上两点的最短联线·····	231
§ 7. 短程挠率·····	233
7.1. 定义和公式·····	233
7.2. 曲面上曲线的一种动标三棱形·····	236
§ 8. 具有常数全曲率的曲面·····	238
§ 9. 具有常数全曲率的回转曲面·····	242
§ 10. 伪球面与伪球率曲面在平面上的等角表示·····	246
10.1. 伪球面在平面上的表示·····	246
10.2. 伪球率曲面在平面上的表示·····	248
10.3. 伪球率曲面上的短程线·····	250
10.4. 伪球率曲面上的短程圆·····	
* § 11. 曲面上矢量的平移·····	
* § 12. 可展曲面的又一特征·全曲率的一项几何意义·····	

* § 13. 高斯-崩尼公式	263
结束语	270
<b>*第九章 关于图形的整体性质</b>	<b>275</b>
§ 1. 平面曲线	275
1.1. 平面闭曲线的相对总曲率	275
1.2. 闭凸线	281
1.3. 四顶定理	283
1.4. 卵形线	285
1.5. 常宽曲线	288
1.6. 等周不等式	289
1.7. 平面上和一条曲线相交直线的测度	293
§ 2. 空间曲线	297
2.1. 球面上和一条曲线相交大圆的测度	297
2.2. 关于闭曲线的总曲率	299
2.3. 关于有结曲线的总曲率	303
2.4. 关于闭曲线的总挠率	305
2.5. 关于闭曲线的主法线球面象	307
§ 3. 曲面	310
3.1. 关于卵形面	311
3.2. 希耳伯特引理	313
3.3. 球面的若干特征	314
结束语	316
<b>附录 I 单参数曲面族</b>	<b>317</b>
§ 1. 用方程 $F(x, y, z) = 0$ 表示的曲面	317
§ 2. 单参数曲面族的包络面·特征线	319
§ 3. 单参数曲面族的脊线·特征点	322
<b>附录 II 复数的引进·从迷向矢到小积曲面</b>	<b>325</b>
§ 1. 迷向矢	325
1.1. 三维复空间	325

1.2. 迷向矢·迷向直线·迷向平面·····	326
1.3. 迷向锥面·····	327
1.4. 迷向矢与全等变换·····	328
1.5. 迷向矢与垂直概念·····	328
1.6. 迷向矢的参数表示·····	330
§ 2. 迷向曲线·····	332
§ 3. 曲面上的迷向曲线·····	334
§ 4. 正方参数·等角映射·····	339
§ 5. 小积曲面·····	343
5.1. 实小积曲面的正方参数·····	343
5.2. 实小积曲面的显式表示·····	345
5.3. 小积曲面作为平移曲面·····	348
5.4. 复小积曲面的显式表示·····	349
5.5. 复小积曲面里嵌有实小积曲面的条件·····	351
5.6. 连带小积曲面和伴随小积曲面·····	353
附录 III 张量记法在曲面论中的运用·····	358
§ 1. 曲面论的基本公式·····	358
1.1. 新记号的引进·····	358
1.2. 高斯公式·····	360
1.3. 魏因加尔吞公式·····	362
§ 2. 曲面论的基本方程·····	362
2.1. 基本方程的推导·····	362
2.2. 迈因纳尔迪-科达齐方程·····	364
2.3. 高斯方程·····	364
§ 3. 曲面论的唯一存在定理·····	367
§ 4. 短程曲率与短程线·····	371
§ 5. 曲面上矢量的平移·····	372
§ 6. 曲面上的矢量和张量·····	377
附录 IV 变分法中的两个命题·····	37
§ 1. 小积曲面的极小性质·····	371

---

§ 2. 短程线的极小性质·····	381
<b>附录 V 关于微分方程组的几个定理·····</b>	<b>385</b>
§ 1. 一阶线性齐次常微分方程组·····	385
§ 2. 含一个参变数的一阶线性齐次常微分方程组·····	388
§ 3. 一阶线性齐次偏微分方程组·····	391
人名译名索引·····	397
内容索引·····	398

## 第一章 矢函数

### § 1. 矢代数复习

在本书里，除非特别声明，所遇到的数量总是实数，所用的坐标系总是直角坐标系。此外还规定：在平面里，从坐标系的正  $x$  轴到正  $y$  轴的角是  $+\frac{\pi}{2}$ ；在三维空间里，坐标系是右旋系（或称右手系）。

我们假定读者对于三维空间里矢量（或称向量）的概念已经熟悉，知道如何在直角坐标系里利用矢量的分量来表示矢量，知道有关矢量的各种代数运算的定义与规律，也知道如何利用分量来实施这些运算。本节的目的是对于这里面最主要的一些事实作简单的复习，并略有补充；在复习的时候，我们不计较这些事实的逻辑顺序。

在本书里，粗体字母总表示矢量。

设  $x, y, z$  为一个矢量  $\mathbf{r}$  的分量， $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  为沿着三个坐标轴正向的么矢<sup>①</sup>，则矢量  $\mathbf{r}$  可以写成

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \{x, y, z\},$$

它的长是

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

零矢

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \{0, 0, 0\}.$$

若  $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ ，则  $\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$  是和  $\mathbf{r}$  正向相同的么矢。这个么矢的分量等

---

① 么 (yāo) 矢即其长为 1 的矢量（或称单位矢量）。



于  $r$  的方向余弦; 设它们为  $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ , 则

$$r = |r|(\cos\alpha i + \cos\beta j + \cos\gamma k),$$

而

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

若  $\lambda$  为纯量(或称数量),  $r = xi + yj + zk$ , 则  $\lambda$  与  $r$  之积

$$\lambda r = \lambda xi + \lambda yj + \lambda zk.$$

若  $r_i = x_i i + y_i j + z_i k (i=1, 2)$  为两个矢量, 则它们的和

$$r_1 + r_2 = (x_1 + x_2)i + (y_1 + y_2)j + (z_1 + z_2)k.$$

① 矢量  $r_1, r_2$  平行的一个充要(即充分和必要)条件是它们线性相关, 即存在着不同时为零的纯量  $\lambda_1, \lambda_2$ , 使  $\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 = 0$ .

若  $\theta$  为矢量  $r_1, r_2$  之间的角,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , 则它们的数积

$$r_1 r_2 = |r_1| |r_2| \cos\theta = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

因此, ②  $r_1 \perp r_2$  的充要条件是它们的数积  $r_1 r_2 = 0$ ①. 若  $r_1 = r_2 = r$ , 上式化为

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = |r|^2.$$

故

$$\sqrt{r^2} = |r|.$$

若  $e$  为与  $r_1, r_2$  同时垂直的一个幺矢, 而且当  $r_1, r_2$  不平行时,  $r_1, r_2, e$  按这个次序构成右旋的三个矢, 则矢量  $r_1, r_2$  的矢积

$$r_1 \times r_2 = |r_1| |r_2| \sin\theta e$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} k.$$

因此, ③  $r_1 \parallel r_2$  的另一个充要条件是它们的矢积  $r_1 \times r_2 = 0$ ②.

以上几种运算满足一些简单的规律. 若  $\lambda, \mu$  表示纯量,  $r_1,$

① 在这里, 零矢作为和任何方向垂直的矢量.

② 在这里, 零矢作为和任何方向平行的矢量.