

信号与系统习题集

王宝祥 主 编

哈尔滨工业大学出版社

内 容 简 介

本习题集共分九章：信号的频谱分析、随机信号、连续系统的时域分析、频域分析、复频域分析和系统函数、离散系统的时域分析和Z变换分析、线性系统的状态变量分析。全书共有例题习题一千多道，书末给出了习题答案。

本书可作为“信号与系统”课程的习题课教材，亦可供有关专业学生自学参考。

信号与系统习题集

王 宝 祥 主 编

*

哈尔滨工业大学出版社出版

新华书店首都发行所发行

哈尔滨工业大学印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印张17.25 字数384 000

1988年2月第1版 1988年2月第1次印刷

印数1-5 000

ISBN7-5603-0044-8/TN·1 定价：2.65元

前 言

本书是高等工科院校无线电技术、通信、电子工程等专业《信号与系统》课程的辅助教学用书。全书共分九章，每一章的开始扼要地介绍基本理论，给出计算公式和表格，便于解题时参考，并举出一些具有代表性的例题，然后选编了相当数量的习题。书后附有参考答案。

本书在编写过程中，力求做到以国家教委电工教学指导委员会关于《信号与系统》课程的基本要求为中心内容，在编排上将信号分析提到前面，并且增加了有关随机信号的部分内容。

本书由哈尔滨工业大学无线电工程系王宝祥、贾晓光、张晔、任广辉、谭斌等同志编写，王宝祥同志任主编。本书由哈尔滨船舶工程学院陈素贤教授主审，在审阅中提出许多宝贵的意见，在此谨致衷心的感谢。

由于编者水平所限，书中难免有不妥之处，诚恳地希望广大读者批评指正。

编 者

一九八六年十月

目 录

第一章	信号的频谱分析	(1)
第二章	随机信号	(94)
第三章	连续时间系统的时域分析	(122)
第四章	连续时间系统的频域分析	(183)
第五章	连续时间系统的复频域分析	(220)
第六章	连续时间系统的系统函数	(281)
第七章	离散时间系统的时域分析	(311)
第八章	离散时间系统的 Z 域分析	(351)
第九章	系统的状态变量分析	(393)
习题答案		(448)
参考书		(542)

第一章 信号的频谱分析

内 容 提 要

一般来讲,我们将消息的运载工具和表现形式称为信号。在无线电电子学中,通常把随时间变化的电压和电流称为电信号,简称信号。

根据信号随时间变化的性质可将信号分为确定性信号与随机信号。在确定性信号中,又可分为周期信号与非周期信号。此外,根据信号在时间函数上取值的连续性与离散性可将信号分为连续时间信号与离散时间信号,简称连续信号与离散信号;以及根据信号的功率和能量情况,又可将信号分为能量信号与功率信号。

在时域中,连续时间信号可以有多种分解形式:

1. 分解为直流分量和交流分量

$$f(t) = f_{DC}(t) + f_{AC}(t)$$

2. 分解为奇分量和偶分量

$$f(t) = f_o(t) + f_e(t)$$

其中 奇分量 $f_o(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)]$

偶分量 $f_e(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)]$

3. 分解为冲激信号之和

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

4. 分解为阶跃信号之和

$$f(t) = f(0)U(t) + \int_0^t f'(\tau)U(t-\tau)d\tau$$

本章讨论连续信号的频域分解即频谱分析, 关于离散信号的特性将在后续章节中讨论。

信号频谱分析就是研究如何将信号表示为各频率分量的叠加, 并从信号分量的组成情况去考察信号的特性。

(一) 信号表示为正交函数集

任意一个表示信号的函数 $f(t)$ 在 (t_1, t_2) 内可以精确地表示为无穷级数之和, 即

$$f(t) = c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) + \cdots + c_r g_r(t) + \cdots \quad (1.1)$$

其中 $g_r(t)$ ($r=1, 2, \cdots$) 在 (t_1, t_2) 内组成一完备正交函数集, 满足

$$\int_{t_1}^{t_2} g_m(t) \cdot g_m^*(t) dt = K_m$$

$$\int_{t_1}^{t_2} g_m(t) \cdot g_l^*(t) dt = 0 \quad l \neq m$$

c_r 为 $f(t)$ 和 $g_r(t)$ 的相关系数。

$$c_r = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \cdot g_r^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} g_r(t) \cdot g_l^*(t) dt} = \frac{1}{K_r} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \cdot g_r^*(t) dt$$

(二) 周期信号的傅立叶级数表示

任意周期为 T 的周期信号 $f(t)$, 若满足狄利克雷 (Dirichlet) 条件, 可展为傅立叶级数。

1. 三角形式的傅立叶级数

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t) \quad (1.2)$$

其中 $\Omega = \frac{2\pi}{T}$, a_0, a_n, b_n 为相关系数。

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\Omega t dt \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\Omega t dt$$

亦可写成

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n) \quad (1.3)$$

其中 $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \varphi_n = -\arctg \frac{b_n}{a_n}$

$$a_n = A_n \cos \varphi_n \quad b_n = -A_n \sin \varphi_n$$

2. 指数形式的傅立叶级数

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n e^{jn\Omega t} \quad (1.4)$$

其中

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

与三角形式的傅立叶级数比较, 其相关系数存在如下关

系

$$\dot{A}_n = \begin{cases} a_n + jb_n & n < 0 \\ a_0 & n = 0 \\ a_n - jb_n & n > 0 \end{cases}$$

3. 周期信号的对称性与傅立叶级数系数的关系

见表 1.1。

表 1.1 周期信号的对称性与傅立叶系数的关系

$f(t)$ 的对称条件	展开式中系数特点
纵轴对称 (偶函数) $f(t) = f(-t)$	$b_n = 0, a_n = \frac{4}{T} \int_{t_0}^{t_0 + \frac{T}{2}} f(t) \cos n\Omega t dt$
原点对称 (奇函数) $f(t) = -f(-t)$	$a_n = 0, b_n = \frac{4}{T} \int_{t_0}^{t_0 + \frac{T}{2}} f(t) \sin n\Omega t dt$
半周重迭 (偶谐函数) $f(t + \frac{T}{2}) = f(t)$	无奇次谐波, 只有直流和偶谐分量。
半周镜像 (奇谐函数) $f(t + \frac{T}{2}) = -f(t)$	无偶次谐波, 只有奇次谐波分量。

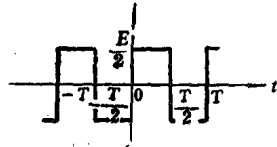
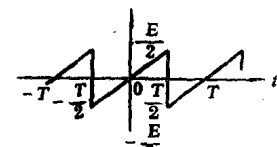
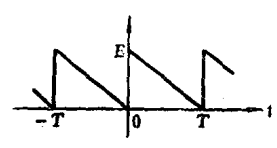
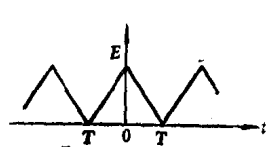
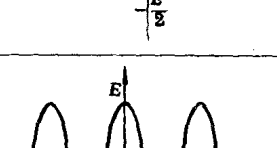
(三) 典型周期信号的傅立叶级数和频谱特点

见表1.2。

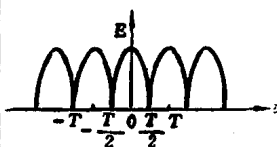
表 1.2 典型周期信号的傅立叶级数及频谱特点 ($\Omega = \frac{2\pi}{T}$)

信号名称	波 形	a_0	a_n	b_n	特 点	
					对称性	含频率分量
矩形脉冲		$\frac{E \cdot \tau}{T}$	$\frac{E \tau \Omega}{\pi} \text{Sa} \left(\frac{n \Omega \tau}{2} \right)$	0	偶函数	直流分量和余弦分量
对称方波		0	$\frac{2E}{n\pi} \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right)$	0	偶函数, 奇谐函数	奇次谐波的余弦分量

续表 1.2

对称方波		0	0	$\frac{2E}{n\pi} \cdot \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)$	奇函数, 奇次谐波	奇次谐波的正弦分量
锯齿波		0	0	$(1-n)^{n+1} \cdot \frac{E}{n\pi}$	奇函数	正弦分量
波		$\frac{E}{2}$	0	$\frac{E}{n\pi}$	去直流后为奇函数	直流和正弦分量
三角波		$\frac{E}{2}$	$\frac{4E}{(n\pi)^2} \cdot \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)$	0	偶函数去直流后为奇函数	直流和奇次谐波的余弦分量
角波		0	0	$\frac{4E}{(n\pi)^2} \cdot \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)$	奇函数奇谐波函数	基波和奇次谐波的正弦分量
半波整流		$\frac{E}{\pi}$	$\frac{2E}{(1-n^2)\pi} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$	0	偶函数	直流和基波、偶次谐波的余弦分量

续表 1.2

全波整流		$\frac{2E}{\pi}$	$(-1)^{n+1}$ $\frac{4E}{(4n^2-1)\pi}$	0	偶函数	直流和基波以及各次谐波的余弦分量
------	---	------------------	--	---	-----	------------------

由式 (1.2)、(1.4) 及表 1.2 可以看出, 周期信号在一定条件下能够分解成直流分量和一系列正弦信号之和, 而这些正弦信号的频率是该周期信号的重复频率及其整数倍频率, 其幅度将随频率的升高而减小。综上所述, 周期信号的频谱具有离散性、谐波性和收敛性。

(四) 非周期信号的傅立叶变换

1. 频谱密度函数

当非周期信号 $f(t)$ 满足狄利克雷条件, 且在无限范围上绝对可积, 则 $f(t)$ 的傅立叶积分存在, 其表示式为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.5)$$

其中 $F(j\omega)$ 为 $f(t)$ 的傅立叶变换

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.6)$$

上两式构成傅立叶变换对, 式 (1.6) 为傅立叶正变换, 式 (1.5) 为傅立叶反变换。 $F(j\omega)$ 即为 $f(t)$ 的频谱密度函数, 简称频谱函数。

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

$|F(j\omega)|$ 是 ω 的偶函数, $\varphi(\omega)$ 是 ω 的奇函数。

2. 非周期信号频谱的求法

(1) 由频谱密度函数的定义式 (1.6) 直接积分得出;

(2) 运用傅立叶变换的性质 (线性特性、时移特性、

频移特性、比例特性、积分特性、微分特性等），由已知简单信号的频谱得出；

(3) 将 $f(t)$ 分解为两简单信号的相乘或卷积，运用卷积定理得出 $f(t)$ 的频谱；

(4) 根据周期信号和非周期信号频谱的关系

$$F(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2} \dot{A}_n \quad (n\Omega \rightarrow \omega, \Omega \rightarrow d\omega)$$

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T} F(j\omega) \Big|_{\omega = n\Omega}$$

由已知的周期信号频谱得出相应的非周期信号的频谱密度函数。

(五) 傅立叶变换的性质

见表 1.3。其中 $F(j\omega)$, $F_1(j\omega)$ 和 $F_2(j\omega)$ 分别为 $f(t)$, $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的频谱。

表 1.3

傅立叶变换的性质

性 质	时 域	频 域
线 性	$\sum_{i=1}^n a_i f_i(t)$	$\sum_{i=1}^n a_i F_i(j\omega)$
时 移	$f(t \pm t_0)$	$F(j\omega) e^{\pm j\omega t_0}$
频 移	$f(t) e^{\pm j\omega_0 t}$	$F[j(\omega \mp \omega_0)]$
时 频 展 缩	$f(at) \quad a \neq 0$	$\frac{1}{ a } F(j\frac{\omega}{a})$
	$f(at \pm b) \quad a \neq 0$	$\frac{1}{ a } e^{\pm j\frac{b}{a}\omega} F(j\frac{\omega}{a})$

续表 1.3

对 称 性	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
时 域 微 分	$\frac{d^n}{dt^n} f(t)$	$(j\omega)^n F(j\omega)$
频 域 微 分	$(-jt)^n f(t)$	$\frac{d^n}{d\omega^n} F(j\omega)$
时 域 积 分	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\pi F(0)\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} F(j\omega)$
卷 积 定 理	时域	$f_1(t) * f_2(t)$
	频域	$F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega)$
		$\frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_2(j\omega)$

(六) 周期信号的傅立叶变换

周期信号 $f(t)$ 可表示为指数形式的傅立叶级数

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \dot{A}_n e^{jn\Omega t}$$

其中 $\Omega = \frac{2\pi}{T}$, T 为信号 $f(t)$ 的周期。

$f(t)$ 的傅立叶变换为

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \dot{A}_n \mathcal{F}[e^{jn\Omega t}] \\ &= \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n \delta(\omega - n\Omega) \end{aligned} \quad (1.7)$$

$\dot{A}_n$ 可由 (二)、2 中公式求得。

(七) 抽样信号的傅立叶变换

1. 均匀抽样定理

一个在频谱中不含有大于频率 f_m 的分量的有限频带信号, 由对该信号以不大于 $\frac{1}{2f_m}$ 的时间间隔进行抽样的抽样值唯一确定。 $\frac{1}{2f_m}$ 称为奈奎斯特抽样间隔, $2f_m$ 称为奈奎斯特抽样率。

2. 时域抽样

设连续信号 $f(t)$ 的频谱为 $F(j\omega)$, 其理想抽样信号 $f_s(t)$ 的频谱用 $F_s(j\omega)$ 表示。

抽样脉冲序列 $p(t)$ 为周期信号, 其频谱为

$$P(j\omega) = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n \delta(\omega - n\Omega_s)$$

其中 $p_n = \frac{2}{T_s} \int_{T_s} p(t) e^{-jn\Omega_s t} dt$, $T_s = \frac{2\pi}{\Omega_s}$ 为均匀抽样的抽样间隔。

抽样后的信号 $f_s(t) = f(t) \cdot p(t)$, 根据频域卷积定理, 其频谱为

$$F_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * P(j\omega) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n F[j(\omega - n\Omega_s)] \quad (1.8)$$

3. 频域抽样

设连续频谱函数 $F(j\omega)$ 对应的时间函数为 $f(t)$, 抽样冲激序列

$$\delta_{\Omega_1}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega_1)$$

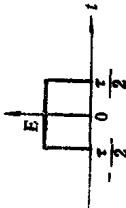
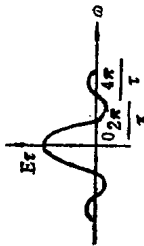
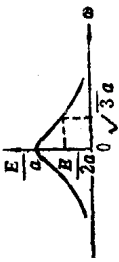
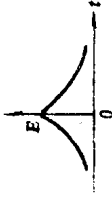
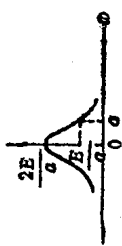
抽样后的频谱函数

$$F_1(j\omega) = F(j\omega) \cdot \delta_{\Omega_1}(\omega)$$

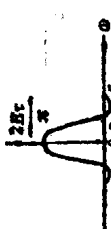
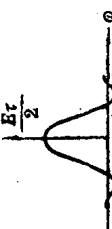
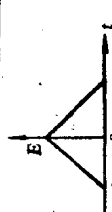
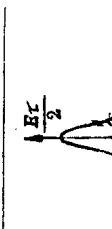
根据卷积定理可得

典型信号的傅立叶变换及频谱图

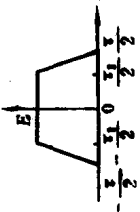
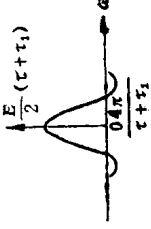
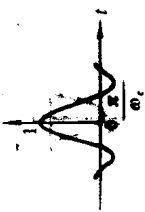
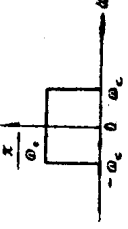
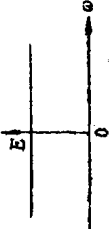
表 1.4

信号名称	$f(t)$	波形图	$F(j\omega) = F(j\omega) e^{j\varphi(\omega)}$	频谱图
矩形脉冲	$\begin{cases} E, & t < \frac{\tau}{2} \\ 0, & t > \frac{\tau}{2} \end{cases}$		$E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$	
单边指数脉冲	$Ee^{-at} U(t), a > 0$		$\frac{E}{a + j\omega}$	
双边指数脉冲	$Ee^{-a t } U(t), a > 0$		$\frac{2aE}{a^2 + \omega^2}$	

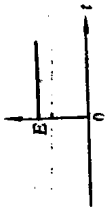
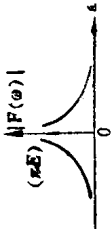
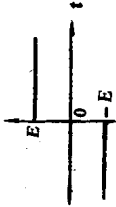
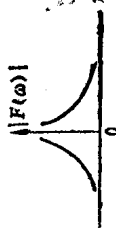
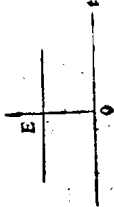
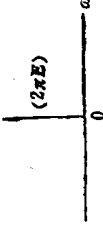
续表 1.4

钟形脉冲	$E \cdot e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$		$\sqrt{\pi} E \tau \cdot e^{-\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)^2}$	
余弦脉冲	$\begin{cases} E \cos \frac{\pi t}{\tau}, & t < \frac{\tau}{2} \\ 0, & t \geq \frac{\tau}{2} \end{cases}$		$\frac{2E\tau}{\pi} \cdot \left[1 - \left(\frac{\omega \tau}{\pi} \right)^2 \right]$	
升余弦脉冲	$\begin{cases} \frac{E}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi t}{\tau} \right), & t < \frac{\tau}{2} \\ 0, & t \geq \frac{\tau}{2} \end{cases}$		$\frac{E\tau}{2} \cdot \frac{\text{Sa}^2\left(\frac{\omega \tau}{2}\right)}{1 - \left(\frac{\omega \tau}{2}\right)^2}$	
三角脉冲	$\begin{cases} E \left(1 - \frac{2 t }{\tau} \right), & t < \frac{\tau}{2} \\ 0, & t \geq \frac{\tau}{2} \end{cases}$		$\frac{E\tau}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\omega \tau}{4}\right)$	

续表 1.4

梯形脉冲	$\begin{cases} \frac{2E}{r-r_1} \left(t + \frac{r}{2} \right), & -\frac{r}{2} < t < -\frac{r_1}{2} \\ E, & -\frac{r_1}{2} < t < \frac{r_1}{2} \\ \frac{2E}{r-r_1} \left(\frac{r}{2} - t \right), & \frac{r_1}{2} < t < \frac{r}{2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$		$\frac{8E}{(r-r_1)\omega^2} \sin \frac{\omega(r+r_1)}{4} \cdot \sin \frac{\omega(r-r_1)}{4}$	
抽样脉冲	$\text{Sa}(\omega_c t)$		$\begin{cases} \frac{\pi}{\omega_c}, & \omega < \omega_c \\ 0, & \omega > \omega_c \end{cases}$	
冲激函数	$E\delta(t)$		E	

续表 1.4

阶跃函数	$EU(t)$		$\frac{E}{j\omega} + \pi E\delta(\omega)$	
符号函数	$E\text{sgn}(t)$		$\frac{2E}{j\omega}$	
直流信号	E		$2\pi E\delta(\omega)$	
冲激序列	$\delta_{T_1}(t)$		$\omega_1 \delta_{\omega_1}(\omega), \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$	