

内 容 简 介

本书系统地推导并讲述各类飞行器在各种条件下的运动方程, 并且阐明建立飞行器运动方程的一般原则和方法。

内容有: 为建立飞行器运动方程所必需的预备知识; 坐标变换方法及刚体运动方程; 在平面大地情况下的飞行器运动方程的多种形式; 在旋转球形大地情况下的飞行器运动方程, 其中包括运载火箭的运动方程; 飞行器的小扰动线性化方程; 纵向方程和横侧向方程及多种简化情况; 在非平静大气中飞行器的运动方程; 全量形式和偏量形式; 飞行器运动的计算和分析方法。

本书可作为航空航天高等院校高年级学生和研究生教材, 也可作为航空航天部门科技工作者的参考资料。对于综合大学力学系的师生也有一定的参考价值。

飞 行 器 运 动 方 程

肖业伦 编著

航空工业出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

北京航空学院印刷厂印装

1987年12月第一版 1987年12月第一次印刷

开本: 787×1092 1/16 印张: 8.125

印数: 1000册 字数: 193.44千字

统一书号: 15448·21 定价: 1.40元

ISBN 7-80046-004-5/V·002

前 言

考慮到飞行器运动方程在飞行力学中的极端重要性，而国内外一直没有一本专门系统地讲述飞行器运动方程的书，作者很早就有写一本关于此课题的专著的愿望。由于种种原因，直到1980年才写成本书的初稿，并在北京航空学院出版油印本，作为教材和科研参考资料。即使这样一本不太成熟的版本，也受到了欢迎，这不过表明，这方面的书，确实是必需的。

现在作者根据最近几年的发展，对本书作了全面的修订和增补后，再次出版。尤其是第五章“在非平静大气中的飞行器运动方程”几乎完全改写了，第六章“飞行器运动的计算和分析方法”是新加的。

熊海泉副教授在审阅本书手稿时提出了许多宝贵的意见和建议；高仍清同志为本书作了全面校订、修改和出版准备工作。他们的努力对保证本书质量起了重要的作用。作者谨向他们表示衷心的感谢。

北京航空学院

翁业伦

1987年1月

目 录

符号说明

引言

第一章 预备知识

- §1 坐标变换的一般方法和性质..... (3)
- §2 旋转坐标系中矢量的导数..... (7)
- §3 矢量乘积的矩阵表示法..... (8)
- §4 刚体的一般运动方程..... (9)

第二章 “平面大地”情况下的飞行器运动方程

- §1 坐标系的定义..... (12)
- §2 各坐标系之间的关系及变换矩阵..... (14)
- §3 作用在飞行器上的力和力矩..... (18)
- §4 飞行器质心移动的动力学方程..... (21)
- §5 飞行器绕质心转动的动力学方程..... (24)
- §6 运动学方程及几何关系式..... (26)
- §7 关于运动方程的一般讨论..... (30)

第三章 “旋转球形大地”情况下的飞行器运动方程

- §1 坐标系的定义..... (36)
- §2 各坐标系之间的关系及变换矩阵..... (37)
- §3 飞行器质心的运动方程..... (39)
- §4 飞行器绕质心转动的方程..... (45)
- §5 关于运动方程的一般讨论..... (47)
- §6 弹道式火箭的主动段运动方程..... (53)

第四章 飞行器的小扰动线性化方程

- §1 基本概念..... (62)
- §2 力和力矩的偏量和导数..... (64)
- §3 运动方程的线性化..... (69)
- §4 纵向小扰动方程组..... (72)
- §5 横侧向小扰动方程组..... (81)
- §6 惯性和气动数据的换算..... (86)
- §7 按稳定性坐标系建立的方程式的特点..... (89)

第五章 在非平静大气中飞行器的运动方程

§1 关于风对飞行器运动的影响..... (90)

§2 在非平静大气中全量形式的运动方程..... (91)

§3 有风切变时的运动方程..... (95)

§4 在非平静大气中偏量形式的运动方程..... (99)

第六章 飞行器运动的计算和分析方法

§1 引言.....(106)

§2 作为线性系统的飞行器的动态特性分析.....(106)

§3 作为非线性系统的飞行器的运动方程的数值求解.....(113)

§4 飞行器平衡状态的计算.....(115)

附录 四元数在飞行器运动方程中的应用

参考文献

符 号 说 明

1. 物理矢量用黑体字母表示。例如

$$\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{F}$$

2. 矩阵

- i) 当写出全部元素时, 用 $\begin{bmatrix} \end{bmatrix}$ 表示。例如

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{xd} \\ v_{yd} \\ v_{zd} \end{bmatrix}$$

- ii) 当用字母代表整个矩阵时, 用黑体字母表示。并且, 列阵往往用小写字母表示, 例如 $\mathbf{r}_p$; 其它阵用大写字母表示, 例如 $\mathbf{B}_d^t$ 。

- iii) 斜对称矩阵, 用上标 ss 表示, 例如

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}^{ss} \text{ 或 } \boldsymbol{\omega}^{ss} \text{ 代表 } \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

- iv) 逆矩阵用上标 -1 表示;

转置矩阵用上标 T 表示。

引 言

飞行器的运动方程是对飞行器运动规律的原始描述。对于航空和航天器的设计、试验和使用来说，飞行器航迹（弹道）的计算以及稳定性和操纵性的分析是十分必要的，而这些工作都必须以飞行器的运动方程为出发点。

不同类型的飞行器，由于飞行条件的不同，描述其运动的方程也不相同。例如，对于研究常规飞机或战术导弹来说，可以把大地当作平坦的、不旋转的；而对于研究超高速的飞行器（如弹道式火箭或人造卫星运载火箭）来说，大地的球形和旋转就成为不可忽略的因素。在紊流大气中飞行器的运动方程就比在平静大气中的运动方程复杂得多。进行飞行器航迹计算时往往采用全量的运动方程；而进行飞行器的稳定性和操纵性分析以及控制系统设计时，则常常采用线性化的运动方程。此外，即使在同样的飞行条件下，运动方程也可以列写成几种不同的形式，这可能是由于研究者的传统习惯、或者其它特点决定的。所以在航空航天科技文献中出现多种多样的飞行器运动方程，有关的科技人员应深入理解这些方程的实质和特点，并根据实际情况加以选择。

此外，任何文献（包括本书）中列举的飞行器运动方程都不可能是包罗万象的。科技人员必须具备根据具体的特殊情况建立运动方程的能力，才能解决各种各样的有关飞行器运动的问题。

本书就是为了满足上述的需要而写成的关于飞行器运动方程的一部专著。一方面，系统地推导并论述各种飞行器在各种具体条件下的运动方程；另一方面，讲述建立飞行器运动方程的一般原理和方法。

本书由六章组成。第一章讲述一些预备知识，主要是以矩阵形式书写的关于坐标变换的通用公式以及刚体动力学的一般方程。第二章在平面大地的假设下（即不考虑地球的曲率和旋转）建立飞行器的运动方程，这些方程适合于速度不太高的飞机和战术导弹。第三章则考虑到地球的曲率和旋转建立超高速飞行器的运动方程，而且对于特殊类型的飞行器——弹道式火箭或人造卫星运载火箭——的运动方程作了专门的描述。第四章介绍飞行器运动方程的线性化形式，这样的常系数线性微分方程组适宜于飞行器的稳定性和操纵性品质的分析以及控制系统的设计。第五章讲述在非平静大气中飞行器的运动方程，用这些方程可以研究飞行器对风切变和大气紊流的响应。第六章介绍飞行器运动的计算和分析方法，包括：作为线性系统的飞行器的动态特性分析，作为非线性系统的飞行器运动微分方程的数值求解，飞行器平衡状态的计算。

本书可供航空航天高等院校的高年级学生、研究生和教师以及航空航天部门的科技人员作为系统学习飞行器运动方程用的教材，亦可作为科技工作者的实用参考资料。此外，对于综合大学力学系的师生也有一定的参考价值。

第一章 预备知识

§ 1 坐标变换的一般方法和性质

1-1 坐标变换矩阵的定义

设：某个空间矢量 r 在坐标系 S_p (即 $O_p x_p y_p z_p$) 和 S_q (即 $O_q x_q y_q z_q$) 中的分量分别为 (x_p, y_p, z_p) 和 (x_q, y_q, z_q) (见图1-1)。它们之间的关系可以用如下矩阵形式表示：

$$\begin{pmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} \quad (1-1)$$

其中的 b_{ij} 即是对应各轴之间的方向余弦：

$$\left. \begin{aligned} b_{11} &= \cos(x_p, x_q), & b_{12} &= \cos(y_p, x_q), & b_{13} &= \cos(z_p, x_q) \\ b_{21} &= \cos(x_p, y_q), & b_{22} &= \cos(y_p, y_q), & b_{23} &= \cos(z_p, y_q) \\ b_{31} &= \cos(x_p, z_q), & b_{32} &= \cos(y_p, z_q), & b_{33} &= \cos(z_p, z_q) \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

引用符号

$$r_p = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} \quad r_q = \begin{pmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{pmatrix} \quad (1-3)$$

$$B_p^q = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \quad (1-4)$$

则式 (1-1) 可以写成

$$r_q = B_p^q r_p \quad (1-5)$$

矩阵 B_p^q 称为由坐标系 S_p 到坐标系 S_q 的变换矩阵。坐标变换的问题可以归结为寻找坐标变换矩阵的问题。

因为在飞行力学的大多数坐标变换问题中，只注意坐标轴的指向，而不关心坐标原点的位置，所以以后将主要研究具有共同原点、不同指向的两个坐标系之间的关系。

1-2 坐标变换矩阵的基本性质

若仍然利用式 (1-2) 所规定的方向余弦符号，则有

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{pmatrix}$$

或

$$r_p = B_q^p r_q \quad (1-6)$$

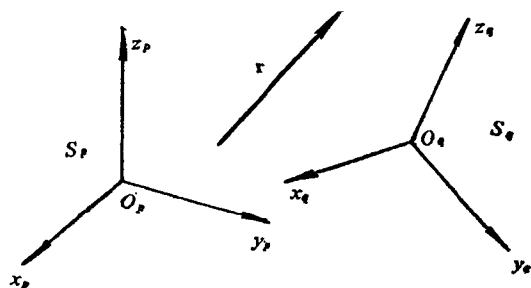


图1-1 坐标系 S_p 和 S_q

$$\text{其中} \quad \mathbf{B}_q^p = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} \quad (1-7)$$

比较式 (1-4) 与 (1-7), 可见

$$\mathbf{B}_q^p = (\mathbf{B}_p^q)^T \quad \text{或} \quad \mathbf{B}_p^q = (\mathbf{B}_q^p)^T \quad (1-8)$$

这里上标 T 表示矩阵转置。这就是说, $\mathbf{B}_p^q$ 与 $\mathbf{B}_q^p$ 互为转置矩阵。

另一方面, 由式 (1-5) 可以得到

$$\mathbf{r}_p = (\mathbf{B}_p^q)^{-1} \mathbf{r}_q$$

将此式与式 (1-6) 比较, 得到

$$\mathbf{B}_q^p = (\mathbf{B}_p^q)^{-1} \quad \text{或} \quad \mathbf{B}_p^q = (\mathbf{B}_q^p)^{-1} \quad (1-9)$$

这表明, $\mathbf{B}_p^q$ 与 $\mathbf{B}_q^p$ 互为逆矩阵。

由式 (1-8) 和式 (1-9) 可见

$$(\mathbf{B}_p^q)^T = (\mathbf{B}_q^p)^{-1} \quad (1-10)$$

具有这样性质的矩阵, 在线性代数学中称为正交矩阵。正交矩阵的各元素满足如下关系:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^3 b_{ki} b_{kj} &= \begin{cases} 1 & \text{当 } i=j \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } i \neq j \text{ 时} \end{cases} \\ \sum_{k=1}^3 b_{ik} b_{jk} &= \begin{cases} 1 & \text{当 } i=j \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } i \neq j \text{ 时} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

也就是说, 坐标变换矩阵的任一行 (或列) 的三元素的平方之和等于 1; 不同行 (或列) 的元素彼此乘积之和等于 0。根据解析几何的定理, 也能直接推出上述结论。

公式 (1-8)、(1-9)、(1-10) 和 (1-11) 反映了坐标变换矩阵的重要性质。

1-3 坐标系的基元变换

为了研究三维坐标系变换的一般关系式, 首先来考虑三维坐标系变换的最简单情况 (或者基元情况), 即有一个轴彼此重合的情况。

设: 有两个坐标系 S_p 和 S_q , 其中的轴 z_p 和 z_q 是重合的, 而 x_p, y_p 与 x_q, y_q 之间有夹角 α 。假若坐标系 S_p 绕轴 z_p 转过角 α , 就达到坐标系 S_q 的位置 (见图 1-2a)。在此情况下, 显然有

$$\begin{pmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} \quad (1-12)$$

或者写成

$$\mathbf{r}_q = \mathbf{B}_z(\alpha) \mathbf{r}_p$$

$$\text{其中} \quad \mathbf{B}_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1-13)$$

是在上述条件下由坐标系 S_p 到 S_q 的变换矩阵。

同样地, 如果坐标系 S_p 和 S_q 的轴 y_p 与 y_q 重合, 并且当 S_p 绕轴 y_p 转过角 α 时就达到 S_q 的位置 (见图 1-2b), 则由 S_p 到 S_q 的变换矩阵是

$$\mathbf{B}_y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (1-14)$$

最后, 如果坐标系 S_p 和 S_q 的轴 x_p, x_q 重合, 并且当 S_p 绕轴 x_p 转过角 α 时就达到 S_q 的位置 (见图1-2c), 则由 S_p 到 S_q 的变换矩阵是

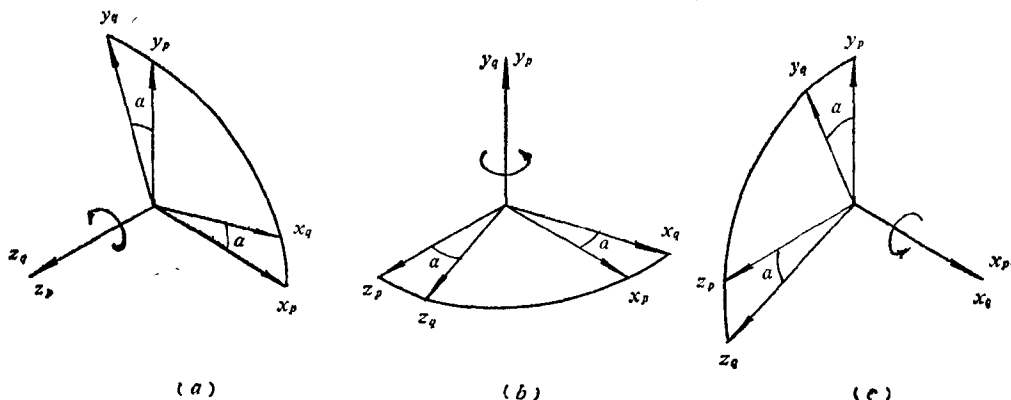


图1-2 坐标系的基元变换

$$\mathbf{B}_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (1-15)$$

式 (1-13)、(1-14) 和 (1-15) 所表示的三个变换矩阵, 称为基元变换矩阵。

1-4 坐标系变换的一般情况

任意两个空间坐标系之间的关系可以用一组 (三个) Euler角来表示。

设想: 由坐标系 S_p 到 S_q 的过渡是通过如下三次转动来实现的 (见图1-3): 首先, 坐标系 $Ox_p y_p z_p$ 绕轴 z_p 转过一个角 ξ (进动角), 成为 $Ox' y' z_p$; 然后绕轴 y' 转过角 η (章动角), 成为 $Ox_q y' z'$; 最后绕轴 x_q 转过角 ξ (自转角), 到达 $Ox_q y_q z_q$ 。角 ξ, η, ξ 组成一组 Euler 角。

根据1-3节所讲述的原理, 可以写出

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z_p \end{bmatrix} = \mathbf{B}_z(\xi) \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_q \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \mathbf{B}_y(\eta) \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z_p \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{bmatrix} = \mathbf{B}_x(\xi) \begin{bmatrix} x_q \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

把以上三式合起来, 有

$$\mathbf{r}_q = \mathbf{B}_x(\xi) \mathbf{B}_y(\eta) \mathbf{B}_z(\xi) \mathbf{r}_p$$

所以由 S_p 到 S_q 的坐标变换矩阵为

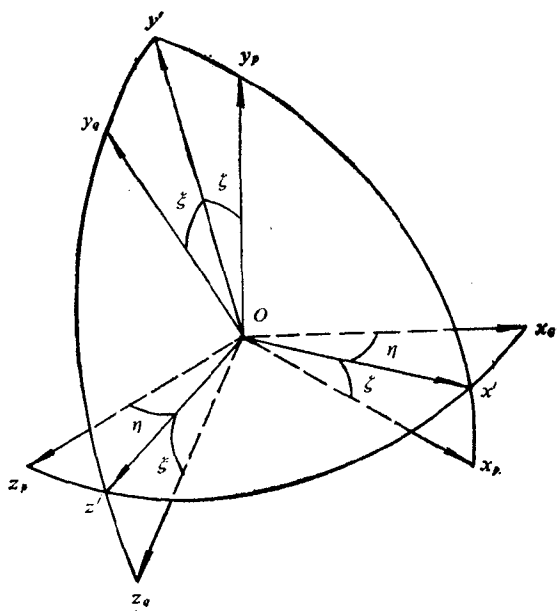


图1-3 坐标变换的一般情况

$$\mathbf{B}_p^q = \mathbf{B}_x(\xi) \mathbf{B}_y(\eta) \mathbf{B}_z(\xi) \quad (1-16)$$

其中的 $\mathbf{B}_z(\xi)$ 、 $\mathbf{B}_y(\eta)$ 、 $\mathbf{B}_x(\xi)$ 的表达式可以按公式 (1-13)、(1-14)、(1-15) 写出，只要分别以 ξ 、 η 、 ξ 代替 α 。注意，式 (1-16) 中右边三个矩阵的书写顺序与对应的旋转顺序是相反的。

由此归纳出坐标变换的一般规则：首先确定，坐标系 S_p 经过怎样的三次基元旋转可以到达坐标系 S_q 的位置；然后把由 S_p 到 S_q 的坐标变换矩阵按照与基元旋转的顺序相反的顺序写成三个基元变换矩阵的乘积，且每个基元变换矩阵中的参数即是相应的基元旋转中的角度。

必须指出，任意两个坐标系之间的变换矩阵是唯一的，但它们之间的 Euler 角则不只有一组，而有六组，这是因为，从一个坐标系到另一个坐标系的过渡，可以按以下六种不同的顺序进行：

$x-y-z$, $x-z-y$, $y-z-x$, $y-x-z$, $z-x-y$, $z-y-x$ 。转动顺序不同，则对应的一组（三个）Euler 角就不同，因而得到的坐标变换矩阵的表达式也就不同。但坐标变换矩阵的各元素的数值是唯一的，与所取转动顺序无关（参看式 (1-1)、(1-2)）。

在实际问题中，两个坐标系之间的相互方位，往往只采用确定的一组 Euler 角来定义，这样的选择常常是由传统习惯决定的，或者由物理意义决定的，或者由测量方式决定的。例如飞机机体相对于地面的方位，用偏航角 ψ 、俯仰角 θ 和滚转角 γ 来确定（详见第二章 §2），而不用其它方式来确定。

1-5 坐标变换矩阵的传递

设有三个坐标系 S_p 、 S_g 和 S_q ，且已知变换矩阵 $\mathbf{B}_g^p$ 和 $\mathbf{B}_g^q$ ，如何求出 $\mathbf{B}_p^q$ ？

因为

$$\mathbf{r}_q = \mathbf{B}_g^q \mathbf{r}_g, \quad \mathbf{r}_g = \mathbf{B}_p^g \mathbf{r}_p$$

故

$$\mathbf{r}_q = \mathbf{B}_g^q \mathbf{B}_p^g \mathbf{r}_p$$

由此得到

$$\mathbf{B}_p^q = \mathbf{B}_g^q \mathbf{B}_p^g \quad (1-17)$$

这就是坐标变换的传递公式。

1-6 物理矩阵的转换

设想，有两个物理矢量 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ ，它们在任意坐标系中的分量由如下关系式联系：

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{u} \quad (1-18)$$

其中 $\mathbf{A}$ 是 3×3 维物理矩阵，它的元素的值依赖于所选取的坐标系。

在坐标系 S_p 中， $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 的分量的关系是

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{A}_p \mathbf{u}_p \quad (1-19)$$

在坐标系 S_q 中

$$\mathbf{v}_q = \mathbf{A}_q \mathbf{u}_q \quad (1-20)$$

此外，可以利用坐标变换矩阵 $\mathbf{B}_q^p$ 把同一物理矢量在不同坐标系中的分量联系起来：

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{B}_q^p \mathbf{v}_q \quad \mathbf{u}_p = \mathbf{B}_q^p \mathbf{u}_q \quad (1-21)$$

把它们代入式 (1-19) 中：

$$\mathbf{B}_q^p \mathbf{v}_q = \mathbf{A}_p \mathbf{B}_q^p \mathbf{u}_q$$

由此式，利用式 (1-9)，得到

$$v_q = B_p^q A_p B_q^p u_q$$

把它与式 (1-20) 比较，就得到

$$A_q = B_p^q A_p B_q^p \quad (1-22)$$

这个公式的意义是由坐标系 S_p 中的矩阵 A_p 换算出坐标系 S_q 中的矩阵 A_q ，其中 A 是 3×3 维矩阵，且具有式 (1-18) 所表示的物理意义。例如，后面将看到，刚体的动量矩矢量 H 与角速度矢量 ω 是通过惯性矩阵 I 相连系的（参见式 (1-40)），因此可以按照公式 (1-22) 把惯性矩阵（及其每一个元素）由一个坐标系换算到另一个坐标系。利用公式 (1-22) 的另一个例子是气动旋转导数的换算（见第四章 §6）。

§ 2 旋转坐标系中矢量的导数

2-1 基本情况

设：活动坐标系 $Oxyz$ 具有角速度 ω （见图 1-4）。矢量 ω 在此坐标系中的分量为 ω_x 、 ω_y 、 ω_z ，即

$$\omega = \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k$$

其中 i 、 j 、 k 是 x 、 y 、 z 轴的单位矢量。

设有一个可变的矢量 $a(t)$ ，它在此坐标系中的分量为 a_x 、 a_y 、 a_z ，即

$$a = a_x i + a_y j + a_z k \quad (1-23)$$

由上式求矢量 a 对时间 t 的导数：

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{da_x}{dt} i + \frac{da_y}{dt} j + \\ &+ \frac{da_z}{dt} k + a_x \frac{di}{dt} + a_y \frac{dj}{dt} + a_z \frac{dk}{dt} \end{aligned} \quad (1-24)$$

理论力学已指出，当一个刚体绕定点 O 以角速度 ω 旋转时，刚体上任何一点 P 的速度等于

$$\frac{dr}{dt} = \omega \times r \quad (1-25)$$

其中 r 是从 O 点引向 P 点的矢径。

现在，把单位矢量 i 看作是活动坐标系中某一点 P 的矢径，于是，与式 (1-25) 类似。可以写出

$$\frac{di}{dt} = \omega \times i$$

同样地，有

$$\frac{dj}{dt} = \omega \times j, \quad \frac{dk}{dt} = \omega \times k$$

把以上关系式代入式 (1-24) 中，得到

$$\frac{da}{dt} = \frac{da_x}{dt} i + \frac{da_y}{dt} j + \frac{da_z}{dt} k + \omega \times (a_x i + a_y j + a_z k)$$

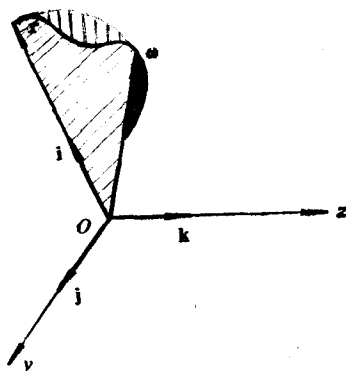


图 1-4

最后得到旋转坐标系中矢量的导数的公式

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\delta\mathbf{a}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} \quad (1-26)$$

其中
$$\frac{\delta\mathbf{a}}{\delta t} = \frac{da_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{da_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{da_z}{dt}\mathbf{k} \quad (1-27)$$

$\delta\mathbf{a}/\delta t$ 称为在活动坐标系中的“相对导数”，相当于站在此活动坐标系中的观察者所看到的矢量 $\mathbf{a}$ 的变化率。而 $d\mathbf{a}/dt$ 则称为“绝对导数”，相当于站在固定坐标系中的观察者所看到的矢量 $\mathbf{a}$ 的变化率。例如，若 $\mathbf{a}$ 是某点的矢径，则 $\delta\mathbf{a}/\delta t$ 代表该点的相对速度（相对于动坐标系），而 $d\mathbf{a}/dt$ 则代表该点的绝对速度。

2-2 更一般情况

现在把公式(1-26)推广到更一般的情况。设坐标系 $S_0(O_0x_0y_0z_0)$ 是静止的，坐标系 $S_1(O_1x_1y_1z_1)$ 和 $S_2(O_2x_2y_2z_2)$ 分别具有角速度 $\boldsymbol{\omega}_1$ 和 $\boldsymbol{\omega}_2$ 。某一矢量 $\mathbf{a}(t)$ 可以分别在坐标系 S_1 和 S_2 中分解成

$$\mathbf{a}(t) = a_{x1}\mathbf{i}_1 + a_{y1}\mathbf{j}_1 + a_{z1}\mathbf{k}_1 = a_{x2}\mathbf{i}_2 + a_{y2}\mathbf{j}_2 + a_{z2}\mathbf{k}_2$$

根据矢量导数的公式(1-26)和(1-27)，有

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \left(\frac{\delta\mathbf{a}}{\delta t} \right)_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{a} = \left(\frac{\delta\mathbf{a}}{\delta t} \right)_2 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{a}$$

其中
$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\delta\mathbf{a}}{\delta t} \right)_1 &= \frac{da_{x1}}{dt}\mathbf{i}_1 + \frac{da_{y1}}{dt}\mathbf{j}_1 + \frac{da_{z1}}{dt}\mathbf{k}_1 \\ \left(\frac{\delta\mathbf{a}}{\delta t} \right)_2 &= \frac{da_{x2}}{dt}\mathbf{i}_2 + \frac{da_{y2}}{dt}\mathbf{j}_2 + \frac{da_{z2}}{dt}\mathbf{k}_2 \end{aligned} \right\}$$

分别为矢量 $\mathbf{a}$ 在坐标系 S_1 和 S_2 中的相对导数。

由此得到

$$\left(\frac{\delta\mathbf{a}}{\delta t} \right)_1 = \left(\frac{\delta\mathbf{a}}{\delta t} \right)_2 + (\boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1) \times \mathbf{a} \quad (1-28)$$

这个公式表示同一矢量 $\mathbf{a}$ 在不同坐标系中的相对导数之间的关系。这里的 $(\boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1)$ 就是坐标系 S_2 相对于 S_1 的转动角速度。

§ 3 矢量乘积的矩阵表示法

大家知道，矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的叉乘积 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 是一个矢量，在坐标系 xyz 中它的分量等于

$$\begin{aligned} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{aligned}$$

利用矩阵表示法，可以写成

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \quad (1-29)$$

上式右边第一个矩阵称为 $\mathbf{a}$ 的斜对称矩阵 (*skew-symmetric matrix*)。为了今后书写方便起见, 采用如下简便符号

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}^{ss} \triangleq \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}$$

于是公式 (1-29) 可以写成

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}^{ss} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \quad (1-29')$$

或

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a}^{ss} \mathbf{b} \quad (1-29'')$$

另外, 点乘积 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 是一个标量, 等于

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

利用矩阵表示法, 写成

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = [a_x \ a_y \ a_z] \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \quad (1-30)$$

或

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} \quad (1-30')$$

公式 (1-29) 和 (1-30) 就是矢量的乘积的矩阵表达式。

§ 4 刚体的一般运动方程

4-1 在活动坐标系中列写的刚体质心动力学方程

在理论力学中知道, 刚体质心的运动方程为

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \quad (1-31)$$

其中 m 为刚体的质量; $\mathbf{v}$ 为刚体质心相对于惯性参考系的速度矢量; $\mathbf{F}$ 为作用在刚体上的外力总矢量。

设: 有一个活动的参考坐标系 $Oxyz$, 它的旋转角速度为 $\boldsymbol{\omega}$ 。在该坐标系中, $\boldsymbol{\omega}$ 的分量为 ω_x 、 ω_y 、 ω_z , 即

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k} \quad (1-32)$$

其中 $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{j}$ 、 $\mathbf{k}$ 为沿 x 、 y 、 z 轴的单位矢量。

同样, 质心速度 $\mathbf{v}$ 和力 $\mathbf{F}$ 也在该活动坐标系中分解如下:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} &= v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} \\ \mathbf{F} &= F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \end{aligned} \right\} \quad (1-33)$$

根据在旋转坐标系中矢量的导数的公式 (1-26), 方程 (1-31) 可以写成

$$m \left(\frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \right) = \mathbf{F} \quad (1-34)$$

其中

$$\frac{\delta \mathbf{v}}{\delta t} = \frac{dv_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt} \mathbf{k} \quad (1-35)$$

利用公式 (1-29)，则方程 (1-34) 可以写成如下矩阵形式：

$$m \left(\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} \quad (1-36)$$

展开后，写成三个标量方程如下：

$$\begin{aligned} m \left(\frac{dv_x}{dt} + \omega_y v_z - \omega_z v_y \right) &= F_x \\ m \left(\frac{dv_y}{dt} + \omega_z v_x - \omega_x v_z \right) &= F_y \\ m \left(\frac{dv_z}{dt} + \omega_x v_y - \omega_y v_x \right) &= F_z \end{aligned} \quad (1-37)$$

这就是在任意活动参考坐标系中列写的刚体质心动力学方程。在以后的两章中将把方程 (1-37) 应用到不同的坐标系。

4-2 刚体绕质心转动的动力学方程

由理论力学中得知，刚体转动的动力学方程是

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \mathbf{M} \quad (1-38)$$

其中 $\mathbf{M}$ 是作用在刚体上的外力对刚体质心的力矩总矢量。

$\mathbf{H}$ 是刚体对质心的动量矩，其一般表达式是

$$\mathbf{H} = \int \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm \quad (1-39)$$

其中 $\boldsymbol{\omega}$ 是刚体的转动角速度；

$\mathbf{r}$ 是由质心 O 到质点 dm 的矢径。

若以质心为原点，建立一个与刚体固连的坐标系 $Oxyz$ ，则动量矩 $\mathbf{H}$ 的分量与角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的分量有如下关系：

$$\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (1-40)$$

$$\text{其中} \quad I_x = \int (y^2 + z^2) dm, \quad I_y = \int (z^2 + x^2) dm, \quad I_z = \int (x^2 + y^2) dm,$$

$$I_{xy} = \int xy dm, \quad I_{yz} = \int yz dm, \quad I_{zx} = \int zx dm$$

分别是刚体对坐标系 $Oxyz$ 的转动惯量和惯性积。而公式 (1-40) 右边的方形阵称为惯性阵。

把旋转坐标系中矢量的导数的公式 (1-26) 应用到刚体转动动力学方程 (1-38) 中，有

$$\frac{\delta \mathbf{H}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} = \mathbf{M} \quad (1-41)$$

利用公式 (1-29')，把上式写成矩阵形式

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$$

展开后, 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{dH_x}{dt} + \omega_y H_z - \omega_z H_y &= M_x \\ \frac{dH_y}{dt} + \omega_z H_x - \omega_x H_z &= M_y \\ \frac{dH_z}{dt} + \omega_x H_y - \omega_y H_x &= M_z \end{aligned} \right\} \quad (1-42)$$

把 H_x 、 H_y 、 H_z 的表达式(1-40)代入上式, 并假定 $I_x, I_y, \dots$ 为常数, 最后得到最一般情况下刚体绕质心转动的动力学方程的标量形式如下:

$$\left. \begin{aligned} I_x \frac{d\omega_x}{dt} - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z - I_{yz}(\omega_y^2 - \omega_z^2) - I_{zx} \left(\frac{d\omega_z}{dt} + \omega_x\omega_y \right) - \\ - I_{xy} \left(-\frac{d\omega_y}{dt} - \omega_z\omega_x \right) &= M_x \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x - I_{zx}(\omega_z^2 - \omega_x^2) - I_{xy} \left(-\frac{d\omega_x}{dt} + \omega_y\omega_z \right) - \\ - I_{yz} \left(\frac{d\omega_z}{dt} - \omega_x\omega_y \right) &= M_y \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y - I_{xy}(\omega_x^2 - \omega_y^2) - I_{yz} \left(\frac{d\omega_y}{dt} + \omega_z\omega_x \right) - \\ - I_{zx} \left(\frac{d\omega_x}{dt} - \omega_y\omega_z \right) &= M_z \end{aligned} \right\} \quad (1-43)$$

某些情况下, 飞行器中的高速旋转部件(例如喷气发动机的压气机转子和涡轮转子)对飞行器的转动运动产生明显的影响, 它称为陀螺效应。因此在飞行器运动方程中有必要计及这种效应。

作为最一般情况, 假设旋转部件的动量矩在与飞行器固连的坐标系中具有三个分量:

$$\mathbf{H}_r = H_{rx} \mathbf{i} + H_{ry} \mathbf{j} + H_{rz} \mathbf{k} \quad (1-44)$$

于是整个飞行器的动量矩表达式(1-40)中要分别加上 H_{rx} 、 H_{ry} 、 H_{rz} 。

把上述情况计入方程(1-42)中, 于是飞行器转动动力学方程应修正成为

$$\left. \begin{aligned} \dots + \frac{dH_{rx}}{dt} + \omega_y H_{rz} - \omega_z H_{ry} &= M_x \\ \dots + \frac{dH_{ry}}{dt} + \omega_z H_{rx} - \omega_x H_{rz} &= M_y \\ \dots + \frac{dH_{rz}}{dt} + \omega_x H_{ry} - \omega_y H_{rx} &= M_z \end{aligned} \right\} \quad (1-45)$$

其中被省略的部分($\dots$)即是方程(1-43)的左边。

第二章 “平面大地”情况下的飞行器运动方程

本章在“平面大地”的假设下、即在不考虑大地（地球）的曲率和旋转的条件下建立刚性飞行器的运动方程式。对于目前大多数类型的飞行器，即各种飞机和战术导弹来说，把大地看作平面是适宜的。所以本章建立的运动方程有广阔的应用场所。考虑大地曲率和旋转时的飞行器运动方程将在第三章进行研究。

本章中在定义坐标系和运动变量时考虑风的存在，但在建立运动方程时假设大气是平静的（即假定无风）。在非平静大气中飞行器的运动方程将在第五章中讲述。

§ 1 坐标系的定义

1-1 概述

为了研究平面大地情况下飞行器的运动，需要建立若干套坐标系（或称坐标轴系或轴系）。所有这些都是右手直角坐标系，不再一一指出。

首先要解释几个名词。飞行器质心相对于大地的速度称为对地速度，简称地速，以符号 $\mathbf{v}$ 表示。飞行器质心相对于未受扰空气（即远前方空气）的速度称为对空速度，简称空速，以符号 $\mathbf{u}$ 表示。空气的移动速度称为风速，它以符号 $\mathbf{w}$ 表示。它们之间的关系是

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$$

当大气为静止不动，即风速为零时，飞行器的地速与空速是一致的。这时，它们统称为飞行速度。

1-2 地面坐标系

地面（或大地）坐标系 $O_D x_D y_D z_D$ （见图2-1或2-2）固定于大地。它的原点 O_D 选取在地面上的某一点（例如起飞点）。轴 y_D 铅垂向上。轴 x_D 和 z_D 在水平面内，它们的指向可以按具体条件加以选取（没有严格限制）。

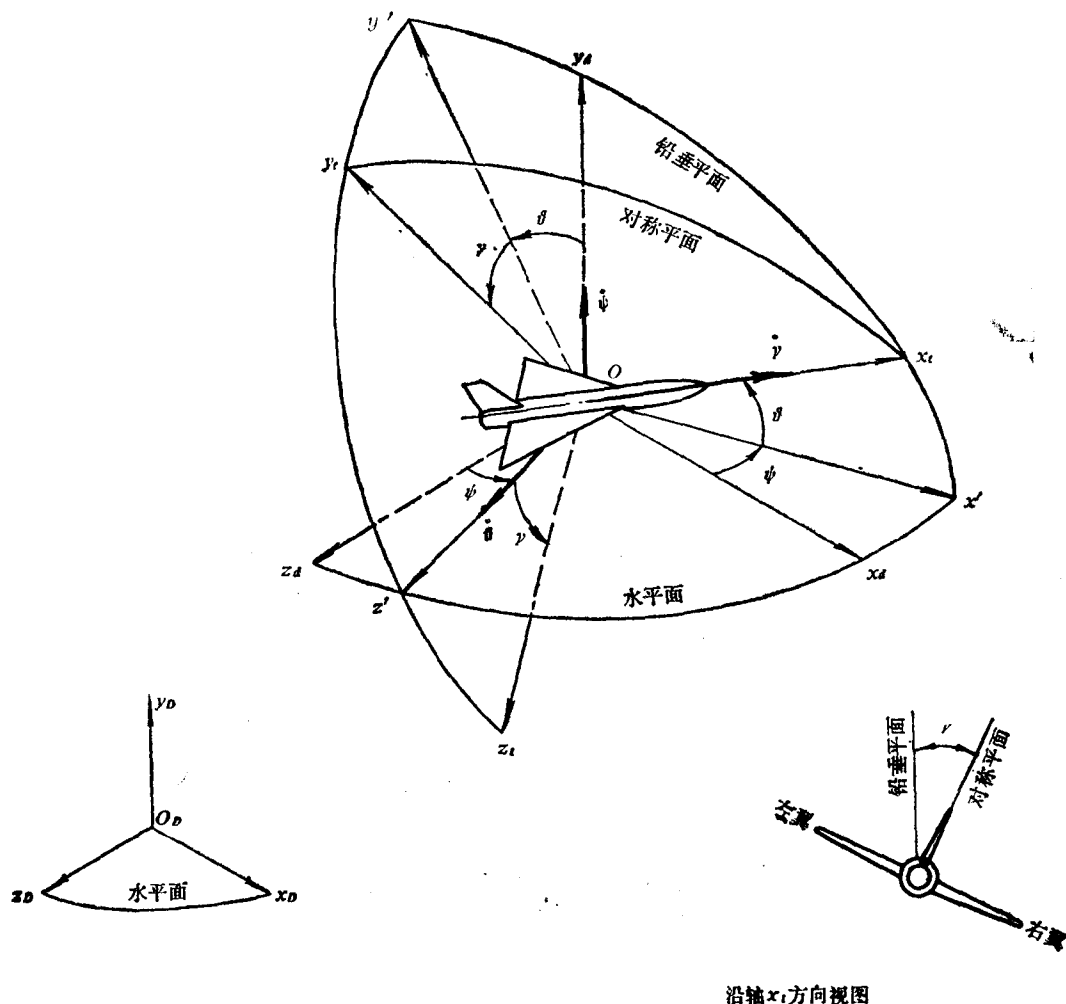
因为不考虑大地的旋转，所以此坐标系可以看作是惯性坐标系。飞行器的位置和姿态以及速度和角速度等都是相对于此坐标系来衡量的。

若把原点放在飞行器质心，而坐标轴始终平行于地面坐标系的轴 x_D 、 y_D 、 z_D ，则这样构成的坐标系 $O x_d y_d z_d$ 称为飞行器牵连的地面坐标系（见图2-1或2-2）。当仅关心坐标系的方位，而不关心原点位置时，此坐标系可以简称为地面坐标系。

1-3 机体坐标系

机体坐标系 $O x_i y_i z_i$ （见图2-1或2-3）固连于飞行器。原点 O 在飞行器质心。纵轴 x_i 平行于机身轴线或平行于机翼平均气动弦，指向前方。竖轴 y_i 在飞行器对称平面内，垂直于轴 x_i ，指向上方。横轴 z_i 垂直于飞行器对称平面，指向右方。

此坐标系的方位就代表飞行器在空间的姿态。



沿轴 x_i 方向视图

图2-1 地面坐标系与机体坐标系的关系

1-4 气流坐标系

气流坐标系 $Ox_qy_qz_q$ (见图2-3) 的原点 O 在飞行器质心。轴 x_q 沿飞行器空速矢量 u 。轴 y_q 在飞行器对称平面内, 垂直于轴 x_q 、指向上方。轴 z_q 垂直于平面 x_qy_q , 指向右方。

通常作用在飞行器上的空气动力是在此坐标系内分解成阻力 Q (沿 x_q 负向)、升力 Y 和侧力 Z 的。

1-5 航迹坐标系

航迹坐标系 $Ox_hy_hz_h$ (见图2-2) 的原点 O 在飞行器质心。轴 x_h 沿飞行器地速矢量 v 。轴 y_h 在包含矢量 v 的铅垂平面内, 垂直于轴 x_h , 指向上方。轴 z_h 垂直于铅垂平面 x_hy_h (因而是水平的), 指向右方。

建立飞行器质心运动方程时, 要利用此坐标系。

由定义可见, 航迹坐标系的轴 x_h 与气流坐标系的轴 x_q , 当有风 ($w \neq 0$) 时是不一致的, 当无风 ($w = 0$) 时才一致。