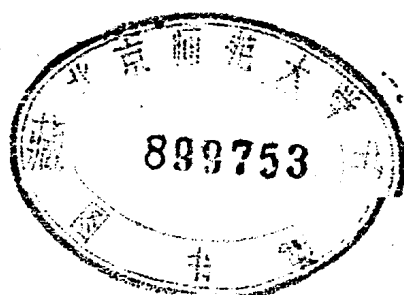


数学分析题解

新乡师院数学系分析研究班编

吕绍明 高福洪 审

10157116



河南人民出版社

序 言

数学分析是高等数学中一门最基本、最重要的基础课程。中学教师进修高等数学，首先要学好这门课程的基本理论与基本方法。因此，编一本《数学分析题解》作为进修学习者参考读物是有益的。

为了极大地提高整个中华民族的科学文化水平，党中央极为重视科学教育事业，并采取了改革大学招生制度、恢复研究生培养制度等一系列重大措施。当前，迅速提高中学师资水平从而提高广大青少年一代的科学文化水平，是教育战线极其光荣而艰巨的任务。目前，广大中学教师一面要完成教学任务，一面又要进修学习，还不可能大批地脱产学习，因此，动员与组织高等院校的师资力量来普及高等数学等最重要的基础课程，开展电视大学学习辅导、办短训班、编写一些适宜的简明教本、习题解等参考读物，对提高中学教学质量是极为必要行之有效的措施。我衷心地希望凡有条件的单位与同志，都来作一点普及科学文化知识的工作。

这本书是供进修数学分析、尤其是对论证命题感到困难的中学教师和自学者参考使用的。根据中学数学大纲的要求和统编教材的内容，我们从《数学分析习题集》（吉米多维奇著）第一至五章中选解了六百余题各类型典型习题及少量

较难的证明题。各节开头并选编有关重要定理、公式及求解方法供参考。本书是我院数学系研究生集体编写的，错误与不妥之处一定不少，敬请广大读者提出宝贵意见。

新乡师院数学系副主任

研究生导师 吕绍明

一九八一年九月于新乡

目 录

序言	(1)
第一章 分析引论	(1)
§ 1 实数	(1)
§ 2 叙列的理论	(7)
§ 3 函数的概念	(35)
§ 4 函数的图形表示法	(43)
§ 5 函数的极限	(50)
§ 6 函数无穷小和无穷大的阶	(73)
§ 7 函数的连续性	(81)
§ 8 反函数, 用参数表示的函数	(96)
§ 9 函数的一致连续性	(99)
§ 10 函数方程	(113)
第二章 单变量函数的微分学	(117)
§ 1 显函数的导函数	(117)
§ 2 反函数的导函数 , 用参变数表示的函数的导函数, 隐函数的导函数	(154)
§ 3 导函数的几何意义	(157)
§ 4 函数的微分	(160)
§ 5 高阶的导函数和微分	(165)

§ 6	洛尔、拉格朗日及哥西定理	(173)
§ 7	函数的增大与减小, 不等式	(179)
§ 8	凹凸性, 拐点	(187)
§ 9	未定形的求值法	(190)
§10	台劳公式	(200)
§11	函数的极值, 函数的最大值和最小值	(208)
§12	依据函数的特征点作函数图形	(225)
§13	函数的极大值和极小值问题	(233)
§14	曲线的相切, 曲率圆, 渐屈线	(244)
§15	方程的近似解法	(250)
第三章	不定积分	(255)
§ 1	最简单的不定积分	(255)
§ 2	有理函数的积分法	(282)
§ 3	无理函数的积分法	(291)
§ 4	三角函数的积分法	(301)
§ 5	各种超越函数的积分法	(308)
§ 6	函数的积分法的各种例子	(311)
第四章	定积分	(321)
§ 1	定积分作为和的极限	(321)
§ 2	利用不定积分计算定积分的方法	(332)
§ 3	中值定理	(358)
§ 4	广义积分	(364)
§ 5	面积的计算法	(378)
§ 6	弧长的计算法	(386)

§7	体积的计算法	(392)
§8	旋转曲面表面积的算法	(397)
§9	矩的计算法,重心的坐标	(400)
§10	力学和物理学中的问题	(405)
§11	定积分的近似算法	(409)
第五章	级数	(418)
§1	数项级数,同号级数收敛性的判别法	(418)
§2	变号级数收敛性的判别法	(435)
§3	级数的运算	(445)
§4	函数项级数	(447)
§5	幂级数	(461)
§6	富里叶级数	(481)
§7	级数求和法	(489)
§8	利用级数求定积分之值	(529)
§9	无穷乘积	(536)
§10	斯特林格公式	(540)
§11	用多项式逼近连续函数	(542)

第一章 分析引论

§ 1 实数

一、提要

本节大致可分为用数学归纳法证明、分割、上(下)确界、解不等式、绝对误差和相对误差题等五类。各类选一详解, 并有较难的分割证明题例6。

1° 数学归纳法 为了证明某定理对任意的自然数 n 为真, 只须证明下面两点就够了: (1) 这定理对 $n=1$ 为真, (2) 设这定理对任何的一个自然数 n 为真, 则它对其次的一自然数 $n+1$ 也为真。

2° 分割 假设分有理数为 A 和 B 两类, 使其满足下列条件: (1) 两类均非空集; (2) 每一个有理数必属于一类, 且仅属于一类, (3) 属于 A 类(下类)的任一数小于属于 B 类(上类)的任何数, 这样的—个分类法称为分割。(a) 若或是下类 A 有最大的数, 或是上类 B 有最小的数, 则分割 A/B 确定一个有理数。(6) 若 A 类无最大数而 B 类亦无最小数, 则分割 A/B 确定一个无理数。有理数和无理数统称为实数。

3° 绝对值 假若 x 为实数, 则用下列条件所确定的非负数 $|x|$, 称为 x 的绝对值:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{若 } x \geq 0; \\ -x, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

对于任何的实数 x 和 y , 有以下的不等式成立:

$$|x| - |y| \leq |x+y| \leq |x| + |y|.$$

4° 上确界和下确界 设 $X = \{x\}$ 为实数的有界集合.

若: (1) 每一个 $x \in X$ 满足不等式

$$x \geq m;$$

(2) 对于任何的 $\varepsilon > 0$, 存在有 $x' \in X$, 使

$$x' < m + \varepsilon,$$

则数 $m = \inf\{x\}$ 称为集合 X 的下确界.

同样, 若: (1) 每一个 $x \in X$ 满足不等式

$$x \leq M;$$

(2) 对于任何的 $\varepsilon > 0$, 存在有 $x'' \in X$, 使

$$x'' > M - \varepsilon,$$

则数 $M = \sup\{x\}$ 称为集合 X 的上确界.

若集合 X 下方无界, 则通常说

$$\inf\{x\} = -\infty;$$

若集合 X 上方无界, 则认为

$$\sup\{x\} = +\infty.$$

5° 绝对误差和相对误差 设 $a (a \neq 0)$ 是被测的量的准确数值, 而 x 是这个量的近似值, 则

$$\Delta = |x - a|$$

称为绝对误差, 而

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}$$

称为被测的量的相对误差。

假若 x 的绝对误差不超过它的第 n 个有效数字的单位的
一半，则说 x 有 n 位准确的数字。

二、详例

1 [4]* 利用数学归纳法求证等式

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

对任何自然数 n 皆成立。

证 当(1) $n=1$ 时，

$$\text{左} = 2^{1-1} = 1, \text{右} = 2^1 - 1 = 1,$$

所以等式成立。

(2) 假设 $n=k$ 时，等式也成立，即

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1,$$

则 $n=k+1$ 时：

$$\text{左} = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1} + 2^k = 2^k - 1 + 2^k = 2^{k+1} - 1 = \text{右},$$

所以等式成立。

故由归纳法知：对于任何自然数 n ，

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

成立。

2 [11] 设 c 为正整数，而不为整数的平方，且 A/B 为
确定实数 $\sqrt{c}$ 的分割，其中 B 类包含所有合于 $b^2 > c$ 的正有理
数 b ，而 A 类包含所有其余的有理数。求证在 A 类中无最大

* 本书中方括号为原书题号。

数，而在 B 类中无最小数。

证 于 A 类中任取一正有理数 a ，则 $a^2 < c$ (由于 c 为正整数，且不为整数的平方，故 $a^2 \neq c$)。设 $c - a^2 = r$ 。现选取正有理数 $x < 1$ ，使 $(a+x)^2 < c$ 。为此只需

$$c - (a+x)^2 = r - 2ax - x^2 > r - (2a+1)x > 0,$$

即 $0 < x < \frac{r}{2a+1}$ 。故在 $(0, \delta)$ 中 [其中 $\delta = \min\left(1, \frac{c-a^2}{2a+1}\right)$]

任取一有理数 x ，都可使 $(a+x)^2 < c$ ，即 $a+x$ 属于 A 类且 $a+x > a$ ，故 A 类中无最大数。

于 B 类中任取一有理数 b ，设 $S = b^2 - c$ 。现选取正有理数 $y < b$ ，使 $(b-y)^2 > c$ 。为此只需

$$(b-y)^2 - c = S - 2by + y^2 > S - 2by > 0,$$

即 $0 < y < \frac{S}{2b}$ 。故在 $(0, \varepsilon)$ 中 [其中 $\varepsilon = \min\left(b, \frac{b^2-c}{2b}\right)$] 任

取一有理数 y ，都可使 $(b-y)^2 > c$ ，此即 $b-y$ 属于 B 类且 $b-y < b$ ，故 B 类中无最小数。

3 [21] 求证不等式：

$$(a) \quad |x-y| \geq ||x| - |y||;$$

$$(b) \quad |x+x_1+x_2+\cdots+x_n| \geq |x| - (|x_1| + \cdots + |x_n|),$$

证 (a) 取 $x = (x-y) + y$ 。因为

$$|x| = |(x-y) + y| \leq |x-y| + |y|,$$

$$\therefore |x| - |y| \leq |x-y|. \quad (1)$$

取 $y = (y-x) + x$ 。因为

$$|y| \leq |y-x| + |x|,$$

$$\therefore |y| - |x| \leq |y - x|. \quad (2)$$

由(1)、(2), 即得

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

(6)由(a), 得

$$\begin{aligned} |x + x_1 + \cdots + x_n| &= |x - [-(x_1 + \cdots + x_n)]| \\ &\geq |x| - |-(x_1 + \cdots + x_n)| \\ &= |x| - |x_1 + \cdots + x_n|. \end{aligned} \quad (3)$$

又因为

$$\begin{aligned} |x_1 + \cdots + x_n| &\leq |x_1| + |x_2 + \cdots + x_n| \\ &\leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|, \end{aligned}$$

将此代入(3), 得

$$|x + x_1 + \cdots + x_n| \geq |x| - (|x_1| + \cdots + |x_n|).$$

4 [19] 设 $\{x+y\}$ 为所有 $x+y$ 这些和的集合, 其中 $x \in \{x\}$ 及 $y \in \{y\}$, 证明等式:

$$(a) \inf\{x+y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\};$$

$$(b) \sup\{x+y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}.$$

证 (a) 设 $\inf\{x\} = m$, $\inf\{y\} = n$, 据定义知 $m \leq x$, $n \leq y$. 因此, 对于集 $\{x\}$ 及 $\{y\}$ 中之 x 和 y , 恒有

$$m + n \leq x + y, \quad (1)$$

且对任意的 $\varepsilon > 0$, 必 $\exists x_0 \in \{x\}$, 使

$$x_0 < m + \frac{\varepsilon}{2}, \quad (\text{符号: } \exists \text{ 表示存在})$$

同时必 $\exists y_0 \in \{y\}$, 使 $y_0 < n + \frac{\varepsilon}{2}$, 所以必有

$$x_0 + y_0 < m + n + \varepsilon. \quad (2)$$

由(1)、(2), 得

$$\inf\{x+y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}.$$

(6)证明类同(a), 留给读者.

5 [38] 测量正方形的边 x , 此处 $2 \text{ 米} < x < 3 \text{ 米}$, 应有多小的绝对误差, 才能使此正方形面积有可能精确到 0.001 米^2 ?

解 设边长的精确值为 x_0 , 则面积 S 表成

$$(x_0 - \Delta)^2 \leq S \leq (x_0 + \Delta)^2, \text{ 其中 } 2 < x_0 < 3;$$

$$x_0^2 + \Delta^2 - 2x_0\Delta \leq S \leq x_0^2 + \Delta^2 + 2x_0\Delta.$$

由题设, 面积的绝对误差

$$\Delta S \leq 0.001 \text{ 米}^2,$$

$$\therefore \Delta S = \frac{1}{2} [(x_0 + \Delta)^2 - (x_0 - \Delta)^2] = 2 \cdot \Delta \cdot x_0 \leq 0.001 \text{ 米}^2.$$

$$\text{故取 } \Delta \leq \frac{0.001}{2 \cdot x_0} = \frac{0.001}{2 \times 3} = 0.000166 \text{ 米}$$

即满足要求.

答: 应取边长绝对误差 Δ 为 0.17 毫米.

6 [13] 作出适当的分割, 然后证明等式:

$$(a) \sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18};$$

$$(6) \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}.$$

解 对有理数作分割 A_1/B_1 . 凡 $b_1 > 0$ 且 $b_1^2 > 2$, 则规定 $b_1 \in B_1$; 凡不属于 B_1 的有理数 $a_1 \in A_1$. 所以 $a_1 \leq 0$ 或 $a_1^2 < 2$.

对有理数作分割 A_2/B_2 . 若 $b_2 > 0$ 且 $b_2^2 > 8$, 则规定

$b_2 \in B_2$; 凡不属于 B_2 的有理数 $a_2 \in A_2$. 所以 $a_2 \leq 0$ 或 $a_2^2 < 8$.

由分割的性质, 有

$$a_1 < \sqrt{2} < b_1 \quad a_2 < \sqrt{8} < b_2. \quad (*)$$

从而推得

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &< \sqrt{2} + \sqrt{8} < b_1 + b_2. \\ \therefore a_1 + a_2 &< \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{8})^2} = \sqrt{2+8+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}} \\ &= \sqrt{18} < b_1 + b_2. \end{aligned}$$

即对于一切满足 $(*)$ 式的 a_1 、 a_2 、 b_1 、 b_2 , 都有

$$a_1 + a_2 < \sqrt{18} < b_1 + b_2.$$

因此根据实数的和之定义知道: $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18}$.

(6)和上面解法类似, 留给读者证明.

§ 2 叙列的理论

一、提要

本节内容是分析引论的基础与重点之一, 内容大致可分为:

- ① 证明叙列极限存在题 (题7—题25);
- ② 求叙列极限、上(下)极限、聚点题 (题26—题32);
- ③ 叙列极限的综合证明题 (题33—题40).

1° 叙列的极限的概念 假设对于任意的 $\varepsilon > 0$, 有数 $N = N(\varepsilon)$, 使当 $n > N$ 时,

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

则称叙列 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 有极限 a (或者说, 收敛于 a),

亦即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

其中, 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0,$$

则称 x_n 为无穷小.

没有极限的数列, 称为发散的.

2° 证明数列极限存在的方法通常有:

(1) 直接由 ε - N 定义(例7);

(2) 由不等式导出常用数列极限(例8—12), 如

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{2^n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1;$$

(3) 利用 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$ ($n \rightarrow \infty$) (例13—15)推导

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln a;$$

(4) 利用单调有界数列必有极限定理(例16—17);

(5) 柯西判别法(例18—21);

(6) 利用凡有有界变差的数列必收敛(例22);

(7) 利用施笃兹定理(例23—24);

(8) 利用数列 $x_n = f(x_{n-1})$ 的函数关系法(例25).

3° 关于数列极限的基本定理 设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{和} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

存在, 则有: (1) 若 $x_n \leq y_n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$;

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$(4) \text{ 若 } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}.$$

4° 无穷极限 符号

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

表示对于任意的 $E > 0$, 有数 $N = N(E)$, 使当 $n > N$ 时, $|x_n| > E$.

5° 聚点 设已知数列 $x_n (n=1, 2, \dots)$ 有子数列 $x_{p_1}, x_{p_2}, \dots, x_{p_n}, \dots$ 适合

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p_n} = \xi$$

则称数 ξ (或符号 ∞) 为已知数列 $x_n (n=1, 2, \dots)$ 的聚点.

一切有界的数列至少有一个有穷的聚点 (波尔查诺——外尔斯特拉斯原理), 若这个聚点是唯一的, 则它即为已知数列的有穷极限.

数列 $\{x_n\}$ 的最小聚点 (有穷的或无穷的)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

称为下极限, 而它的最大聚点

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$$

称为此数列的上极限.

等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$$

为数列 $\{x_n\}$ 的 (有穷或无穷) 极限存在的必要而且充分的条件。

二、详例

7 [41] 设 $x_n = \frac{n}{n+1}$ ($n=1, 2, \dots$), 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

即: 对于任一个给定的 $\varepsilon > 0$, 求数 $N = N(\varepsilon)$ 使得在 $n > N$ 时, $|x_n - 1| < \varepsilon$.

填下表:

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	
N					

证 欲使

$$|x_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| -\frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon,$$

只要 $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. 所以, 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,

$$\exists N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] - 1$$

(其中 $[a]$ 表示数 a 的整数部分), 当 $n > N$ 时, 可使

$$|x_n - 1| < \varepsilon, \text{ 即 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

据此填表如下:

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	
N	9	99	999	9999	

8 [59] 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

$$\text{证 } \because 0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{2^n}{1 \cdot 2 \cdots n} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{2}{n-1} \cdot \frac{2}{n}$$

$$< 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{n} = \frac{4}{n},$$

取极限

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} = 0,$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

9 [60] 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad (a > 1)$.

证 设 k 为正整数, 令 $a = 1 + h$, 其中 $h > 0$, 则

$$\begin{aligned} a^n &= (1+h)^n = 1 + C_n^1 h + \cdots + C_n^{k+1} h^{k+1} + \cdots + h^n \\ &> C_n^{k+1} h^{k+1} \end{aligned}$$

于是

$$0 < \frac{n^k}{a^n} < \frac{n^k}{C_n^{k+1} h^{k+1}} <$$