

现代数学丛书

肖刚 著

代数曲面的纤维化

THE
FIBRATIONS
OF ALGEBRAIC
SURFACES
XIAO GANG

上海科学技术出版社

· 现代数学丛书 ·

代数曲面的纤维化

肖 刚 著

上海科学技术出版社

(沪)新登字108号

责任编辑 赵序明

现代数学丛书

代数曲面的纤维化

肖 刚 著

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所发行 上海中华印刷厂印刷

开本850×1168 1/32 印张6.25 插页4 字数156,000

1992年1月第1版 1992年1月第1次印刷

印数 1—1,600

ISBN 7-5323-2539-3/O·150

定价: 5.45 元

内 容 提 要

纤维化是代数曲面研究中的基本方法之一，本书详细介绍了曲面纤维化的主要性质，包括层上同调、不变量、基变换、单值、基本群等，然后以椭圆纤维化、亏格二纤维化、超椭圆纤维化、非超椭圆纤维化的顺序，讨论各种不同的纤维化。重点是奇异纤维的分类及其与纤维化整体不变量的关系。

本书供数学专业研究生作教材，并供数学研究工作者、数学专业教师参考。

Modern Mathematics Series

THE FIBRATIONS OF
ALGEBRAIC SURFACES

Xiao Gang

JY1151124

Shanghai Scientific & Technical Publishers

The Fibrations of Algebraic Surfaces

Xiao Gang

Abstract

The fibration is one of the fundamental methods in the study of algebraic surfaces. The book begins with a detailed explanation of the main properties of surface fibrations including sheaf cohomology, invariants, base changes, monodromy, fundamental groups etc. Then different kinds of fibrations are discussed following the order: elliptic fibrations, genus two fibrations, hyperelliptic fibrations and non-hyperelliptic fibrations. The emphasis is placed on the classification of singular fibres and their relations with the global invariants of the fibrations.

This book can be used as a textbook for graduate students in math major or as a reference book for research workers as well as teachers in pure mathematics.

《现代数学丛书》编辑委员会

名誉主编 苏步青

主 编 谷超豪

委 员 (以姓氏笔划为序)

丁夏畦 王梓坤 叶彦谦

石钟慈 冯克勤 刘应明

严志达 杨 乐 吴 方

李大潜 陈希孺 陈翰馥

张恭庆 胡和生 姜伯驹

梁友栋 曹锡华 程民德

Modern Mathematics Series

Editorial Committee

Honorary Editor-in-Chief Su Buchin

Editor-in-Chief Gu Chaohao

Members

Cao Xihua

Chen Hanfu

Chen Xiru

Cheng Minde

Ding Xiaqi

Feng Keqin

Hu Hesheng

Jiang Boju

Li Tatsien

Liang Youdong

Liu Yingming

Shi Zhongci

Wang Zikun

Wu Fang

Yan Zhida

Yang Le

Xe Yanqian

Zhang Gongqing

出版说明

从六十年代起,由华罗庚教授任主编的《现代数学丛书》编辑委员会曾组织编著,并由我社出版了多部具有很高水平的数学学术专著,有几部专著并已在外国出了外文版,受到国内外数学界和广大读者的高度重视,获得了很高的评价。原编委会中华罗庚、关肇直、吴新谋三位教授虽已先后逝世,但他们为本《丛书》所作出的贡献迄今仍为人们所敬仰、怀念。由于某些客观原因,《现代数学丛书》的出版工作曾一度停顿。

为了适应现代数学的迅速发展,更好地反映我国数学家近几年的优秀研究成果,必须大力加强《现代数学丛书》的规划、编辑、出版工作。充实编委会的力量。考虑到不少编委年事已高,经向原编委会中大部分同志及数学界有关专家广泛征求意见后,于1990年对编委会作了调整,补充了一些著名的中年数学家和学科带头人,建立了新的编委会,并进一步明确了本丛书的宗旨。

《现代数学丛书》新的编辑委员会由苏步青教授任名誉主编、谷超豪教授任主编,十八位著名数学家任委员。编委会负责推荐(或审定)选题和作者,主持书稿的审核等工作。

《现代数学丛书》的宗旨是:向国内外介绍我国比较成熟的、对学科发展方向有引导作用的、国内第一流水平的数学研究成果,反映我国数学研究的特色和优势,扩大我国数学研究成果的影响,促进学科的发展和国内外的学术交流。

为了实现上述宗旨,本丛书将陆续组织出版在基础数学、应用数学和计算数学方面处于学科发展前沿、有创见且具有系统完整

研究成果的现代数学学术专著。

为出版好《现代数学丛书》，我们热切地期望着数学界各位专家的大力支持和悉心指导，并欢迎广大读者提出宝贵的建议和意见。

上海科学技术出版社

1991年4月

引言

纤维化在代数几何中占有十分重要的地位。它的意义是两方面的：一方面，我们可以把一个纤维化看成是一族代数簇，这一族代数簇中的元就是纤维化中的纤维，从而提供了研究代数簇的形变和模空间的一个途径；另一方面，一个纤维化 $f: X \rightarrow Y$ 在某种意义下也是把代数簇 X 分解成了 f 的纤维所组成的族，这就给我们研究代数簇 X 的性质提供了一个降维的途径，因为 f 的纤维具有比 X 更低的维数。这时问题的关键在于建立 f 的纤维，特别是一些特殊的纤维的性质与 X 的整体性质之间的关系。

本书的目的是讨论最低维数的纤维化 $f: X \rightarrow Y$ ：当 $X = S$ 为二维代数簇(代数曲面)时，这时 $Y = C$ 为一曲线，并且 f 的纤维都是曲线。我们主要是从上述的第二个角度去研究这样的纤维化，即通过 f 去研究曲面 S 的性质，特别是 S 的整体不变量和基本群等。与此同时，我们也特别注重对纤维化本身的研究，读者可以发现在曲面的性质和纤维化的性质之间有着引人注目的平行性。

我们假定读者熟悉代数几何的基本知识，包括层的上同调、射影代数曲线等。我们也要求读者了解代数曲面理论的基础内容，如相交形式、Riemann-Roch 定理、极小曲面等，但我们并不用到代数曲面的分类理论的深刻结论。所要求的这些预备知识的范围基本上不超过有关代数几何的任何一本教科书，如 [H1]、[Ii] 或 [Sha] 的内容。

我们从代数曲面的基本知识开始(第一章)，但是本书不可能也决没有意图写成本代数曲面理论的入门读物。所以有关的这

些基本知识只是在第一节中不加证明地予以罗列,其目的是供读者回忆和参考,同时也是为了定出一些以后要用到的记号。以后的两节较详细地讨论直纹曲面和二次覆盖,它们是我们研究超椭圆纤维化的主要工具。最后用一节的篇幅介绍曲面分类理论的主要结果,但因为本书以后的内容基本上不依赖于这些分类结果,这一节的目的主要是提供一个参考,用以与纤维化曲面的对应分类相比较。

曲面纤维化的定义、基本概念、一般结果和主要的研究方法都在第二章中作了详细的叙述,这一章因而构成了本书的主要基础。从拓扑的角度出发,我们讨论了奇异纤维的对偶图、曲面的基本群与纤维化的关系以及单值。从上同调的角度,有 $f_*\omega_{S/C}$ 的基本性质(它的半正定性,即 Parshin-Arakelov 定理的证明放在最后一章中),相对典范与多重典范映射以及纤维化与基变换的关系。

从第三章开始,采用由特殊到一般的顺序,区别不同的类型对曲面的纤维化进行详细的讨论。这个顺序是:椭圆纤维化、亏格二的纤维化、超椭圆纤维化,最后是非超椭圆纤维化。这四种情形分别构成了本书后四章的内容。

椭圆纤维化的研究可以被看成是曲面纤维化研究的开始,它是由小平邦彦在本世纪 60 年代开创的。小平对椭圆纤维化中的奇异纤维给出了一个完整的分类理论,并由此出发导出了椭圆纤维化的分类以及曲面的整体性质和奇异纤维之间的关系。

小平邦彦的奇异椭圆纤维的组合分类刻划在亏格更高时立即变得极为复杂,这使得在组合的意义上直接推广小平邦彦的分类失去意义。这方面的第一个成功的尝试是堀川颖二(Horikawa)的工作,他在亏格二的情形找到了奇异纤维的一个合理的刻划,并且在此基础上得到了满足 $K^2 = 2p_g - 4$ 或 $2p_g - 3$ 的一般型曲面的一系列重要性质[Ho3]。

从 Horikawa 的这个奇异纤维的分类开始,第四章详细地研究了亏格二的纤维化。但是我们没有完全遵循 Horikawa 的表

示,而是引入了两个“奇异性指数” s_2 和 s_3 ,使得这个分类能更好地反映问题的本质,并为下一章在高亏格超椭圆纤维化的推广奠定了基础。

第四章还遵照 [X 2] 在 Horikawa 的奇异纤维分类理论的基础上讨论了亏格二纤维化的几何问题,以及在雅可比簇的基础上建立的不规则亏格二纤维化的完整分类。在这一章的最后一节中,详细地讨论了一类特殊的亏格二纤维化的分类及例子,它们是满足 $p_g = q = 0$, 且 S 为一般型曲面的情形。

运用奇异性指数的概念,可以很容易地把 Horikawa 的亏格二分类理论推广到亏格 $g > 2$ 的超椭圆纤维化。这时我们得到的是一列奇异性指数 $s_2, s_3, \dots, s_{g+2}$ 。第五章的第一个内容就是给出这些奇异性指数的定义,并运用它们来表示纤维化的整体不变量(定理 5.1.7)。此外,这个分类理论还可以用来确定纤维化的基本群 (§ 5.2)。在最后一节里构造了几个具有较高斜率的超椭圆纤维化,它们在一般型曲面的分类问题上有重要的应用。

同超椭圆的纤维化相比,人们对于非超椭圆的情形所知道的就少得多了。例 6.1.1 说明,在这种情形我们很难期望一个像定理 5.1.7 这样完美的表达式,而最多只能用一些如定理 6.1.5 这样的不等式来刻画不变量之间的关系。除了这个不等式以及有关的一些结论外,第六章还包含了一般情形的纤维化的一些重要结果,其中有小平纤维化,非局部平凡纤维化的一系列正性和有限性定理($\deg f_* \omega_{S/C}$ 的正性, $f_* \omega_{S/C}^{\otimes n}$ 当 $n \geq 2$ 时的正定性,截面自交数的上下界以及截面的有限性,关于固定的底曲线和临界点集的纤维化的有限性,等等),以及几个其中的曲面满足 $c_1^2 = 3c_2$ 的纤维化的例子。

为了使本书尽可能地自包含,我们在最后的附录里用一定的篇幅介绍了代数曲面以外的一些预备知识:代数曲线上的局部自由层、模曲线和 Siegel 模簇以及代数曲线的基本群。

本书是从作者 1988~1989 年度在华东师范大学讲课稿的基础上,经增补、发展而成的。撰写过程中曾得到陈志杰、杨劲根等同

志的许多帮助,撰写期间作者得到了国家自然科学基金的资助,谨此致谢。

肖 刚
于华东师范大学

目 录

引言

第一章 代数曲面	1
§ 1.1 代数曲面的基本性质	1
§ 1.2 曲线上的秩二局部自由层与直纹曲面	8
§ 1.3 对合与二次覆盖	13
§ 1.4 代数曲面的双有理分类	19
第二章 曲面的纤维化	22
§ 2.1 定义与基本性质	23
§ 2.2 例: 解析纤维丛	29
§ 2.3 奇异纤维的对偶图	30
§ 2.4 相对典范层与相对不变量	33
§ 2.5 相对典范和多典范映射	42
§ 2.6 基变换与稳定约化	43
§ 2.7 基本群	50
§ 2.8 单值	55
第三章 椭圆纤维化	63
§ 3.1 奇异纤维的小平分类	63
§ 3.2 典范除子和不变量	63
§ 3.3 椭圆纤维丛	70
§ 3.4 雅可比簇纤维化	71
§ 3.5 基本群	74
§ 3.6 例	77
第四章 亏格二的纤维化	80
§ 4.1 相对典范覆盖与奇异纤维分类	80
§ 4.2 地理问题	88
§ 4.3 不规则纤维化的分类	93

§ 4.4 例	99
第五章 超椭圆纤维化	108
§ 5.1 超椭圆覆盖与奇异纤维分类	108
§ 5.2 基本群	115
§ 5.3 例	122
第六章 非超椭圆纤维化及其他	126
§ 6.1 斜率公式	126
§ 6.2 正性和有限性定理	130
§ 6.3 小平纤维化	133
§ 6.4 例	138
§ 6.5 问题	143
附录	145
§ A1 曲线上的局部自由层	145
§ A2 模簇和模形式	155
§ A3 代数曲线的基本群	163
参考文献	167
索引及汉英术语对照	173

CONTENTS

1. Algebraic Surfaces	1
§ 1.1 Basic Properties of Algebraic Surfaces	1
§ 1.2 Locally Free Sheaves of Rank 2 over a Curve and Ruled Surfaces	8
§ 1.3 Involutions and Double Covers	13
§ 1.4 Birational Classification of Algebraic Surfaces	19
2. Fibrations on Surfaces	22
§ 2.1 Definitions and Basic Properties	23
§ 2.2 Examples: Analytic Fibre Bundles	29
§ 2.3 Dual Graphs of Singular Fibres	30
§ 2.4 Relatively Dualising Sheaf and Relative Invariants	33
§ 2.5 Relatively Canonical and Pluri-canonical Maps	42
§ 2.6 Base Changes and Stable Reduction	43
§ 2.7 Fundamental Groups	50
§ 2.8 Monodromy	55
3. Elliptic Fibrations	63
§ 3.1 Kodaira Classification of Singular Fibres	63
§ 3.2 Canonical Divisors and Invariants	66
§ 3.3 Elliptic Fibrations	70
§ 3.4 Jacobian Fibrations	71
§ 3.5 Fundamental Groups	74
§ 3.6 Examples	77
4. Genus Two Fibrations	80
§ 4.1 Relatively Canonical Covering and Classification of Singular Fibres	80