数学的起源与发展

江苏人民出版社

数学的起源与发展

王 永 建

江苏人民出版社

数学的起源与发展

王永建

江苏人民出版社出版

江苏省新华书店发行　　南京人民印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米 1/32　印张 4.875　字数 100,000

1981 年 9 月第 1 版　1981 年 9 月第 1 次印刷

印数 1—10,500 册

书号：13100·076　　定价：0.38 元

责任编辑　徐大文

前　　言

本书试图用辩证唯物主义的观点，阐述中学数学教材中一些基础知识的起源与发展，说明数学知识不仅来源于实践，而且在实践中不断得到丰富与发展。希望它对教师在丰富教学内容，使数学教学理论联系实际，培养学生的辩证唯物主义观点等方面，能有一些帮助。

书中资料取自各种数学史、数学杂志和数学丛书等，因篇目较多，恕不一一注明，对所用资料的作者，谨表示感谢！

由于本人水平所限，书中阐明的观点和引用资料时，难免有谬误和不当之处，恳切希望能得到广大读者的批评和指正。

编　者

一九八〇年十一月

目　录

数学中的符号

人们在长期实践中，由于研究的需要，创造了大量的数学符号，来代替和表示某些数学概念、运算和关系，简化了数学研究工作，促进了数学的发展。

在中学数学中，常见的数学符号有以下六种：

一、数量符号　如$\frac{3}{4}$，$3.1\dot{4}\dot{2}$，$\sqrt{7}$，i，$2+\sqrt{3}i$；自然对数底e，圆周率π；a，x；∞等。

二、运算符号　如加号（+），减号（－），乘号（×或·），除号（÷或—），两个集合的并集（∪）、交集（∩），根号（$\sqrt[n]{\ }$），对数（log、lg、ln），差（～），比（：），微分（d），积分（∫）等。

三、关系符号　如“=”是“等号”，读作“等于”；“≈”或“≐”是“近似等号”，读作“近似等于”；“≠”是“不等号”，读作“不等于”；“＞”是“大于符号”，读作“大于”；“＜”是“小于符号”，读作“小于”；“→”表示变量变化的趋势，读作“趋向于”；“∽”是“相似符号”，读作“相似于”；“≌”是“全等号”，读作“全等于”；“∥”是“平行符号”，读作“平行于”；“⊥”是“垂直符号”，读作“垂直于”；“∝”是“正比例符号”，读作“成正比”；“∈”是“属于符号”，如$a\in A$，表示元素a属于集合A等。

四、结合符号　如圆括号（　），方括号[　]，花括号{　}，括线$\overline{\quad\quad}$。

五、性质符号　如正号（+）、负号（－），绝对值符号（| |）

等。

六、省略符号 如三角形(△)，正弦(sin)，x的函数[$f(x)$]，极限(lim)，因为(∵)，所以(∴)，总和(Σ)，连乘(∏)，从n个元素中每次取出r个元素所有不同的组合数(C_n^r)，幂(a^m)，阶乘(|__或!)等。

六种数学符号的产生，首先来源于文字的缩写。如平方根号“$\sqrt{\ }$”中的“√”是从拉丁字Radix的第一个字母r演变而来。虚数单位“i”是引用imaginary number(虚数)的第一个字母。微分、积分符号“d”、“∫”也是分别引用了derivative(导数、微商)、Summation(求和法)的第一个字母。对数符号“log”系logarithm(对数)的缩写，自然对数符号“ln”系natural logarithm(自然对数)的缩写。相似符号“∽”是把拉丁字母S横过来写，而S是Similar(相似)的第一个字母。正弦符号“sin”是sine(正弦)的缩写。极限符号“lim”是limit(极限)的缩写。其次来源于象形，实际上是缩小的图形。如平行符号“//”是两条平行的直线；垂直符号“⊥”是互相垂直的两条直线；三角形符号“△”是一个缩小了的三角形；符号“⊙”表示一个圆，中间加一点表示圆心，以免与数0或字母O混淆。第三，来源于会意。如用两条长度相等的线段“=”并列在一起，表示等号；加一条斜线“≠”，表示不等号；用符号“>”表示大于(左侧大，右面小)，“<”表示小于(左侧小，右面大)，意义不难理解；用括号“( )”、“[ ]”、“{ }”把若干个量结合在一起，也是不言而喻的。第四，还有大量的符号是人们经过规定沿用下来的。当然这些符号也不是一开始就都是这种形状，是有一个演变过程的，这里就不一一赘述了。

美国数学家斯特洛伊克(Dirk J. Struik)说过，新的合适

的数学符号的出现，“它就带着自己的生命出现，并且它又创造出新生命来。”数学符号的产生，为数学科学的发展提供了有利的条件。首先，提高了计算效率。古时候，由于缺少必要的数学符号，提出一个数学问题和解决这个问题的过程，只有用语言文字叙述，几乎象做一篇短文，难怪有人把它称为“文章数学”。这种表达形式非常不便，严重阻碍了数学科学的发展。当数量、图形之间的关系用合适的符号表达后，抽象的数量关系和空间形式能够用看得见的数学表达式表示，人们就可以在此基础上，根据自己的需要，深入进行推理与计算，因而能更迅速地得到问题的解答或发现新的规律。其次，缩短了学习时间。初等数学发展至今已有两千多年历史，内容丰富，而其主要内容今日能在小学和中学阶段学完，这里数学符号是起一定作用的。例如，我们的祖先开始只有1、2少数几个数字的概念，而今天幼儿园的小朋友就能掌握几十个这样的数。究其原因，除了古今实践条件不同，人们的见识相异而外，今天已有一套完整的记数符号，人们容易掌握。第三，推动了深入的研究。我们研究数学概念和规律，不仅需要简明、确切地表达它们，而且对其内部复杂的关系，需要深入地加以探讨，没有数学符号的帮助，进行这样的研究是十分困难的。例如，当我们将“以 a 为底 x 的对数等于 y”这句话用符号“$\log_a x = y$”表示后，就显得简明扼要，便于从这个表达式出发，深入讨论对数的性质和应用，进而建立对实际计算有重要意义的对数理论。同样，只有将图形及其关系用文字和其它一些数学符号表示出来（如用 AB 表示直线和线段、用 $\triangle ABC$ 表示某个三角形等），才便于进行逻辑推理，进一步发现根据直观不易得到的定理。

所以，数学符号的应用，是多快好省地研究数学科学的重要途径。我国宋朝著名科学家沈括曾经说过，数学方法应该“见繁即变，见简即用”。数学符号正是适应这种变“繁”为“简”的实际需要而产生的。

数学符号不仅随着数学发展的需要而产生，而且也随着数学的发展不断完善。比如，古代各民族都有自己的记数符号，但在长期使用过程中，印度——阿拉伯数码记数方法显示出更多的优点，因而其它的数码符号逐渐淘汰，国际上都采用了这种记数方法。数学符号不是纯粹形式的东西，而是以客观世界一定物质为基础的。清朝阮元在所著《续畴人传序》中说：“……天元、四元、大衍等名，皆用假判真，借虚课实，……”意思是说，古代人在列方程解应用题时所用的天元、四元等数学符号看来很抽象，但它们都代表着客观真实的数量。可见，数学符号是客观事物在数量及图形关系方面的抽象概念的具体表现形式，是进行推理计算的有力工具。

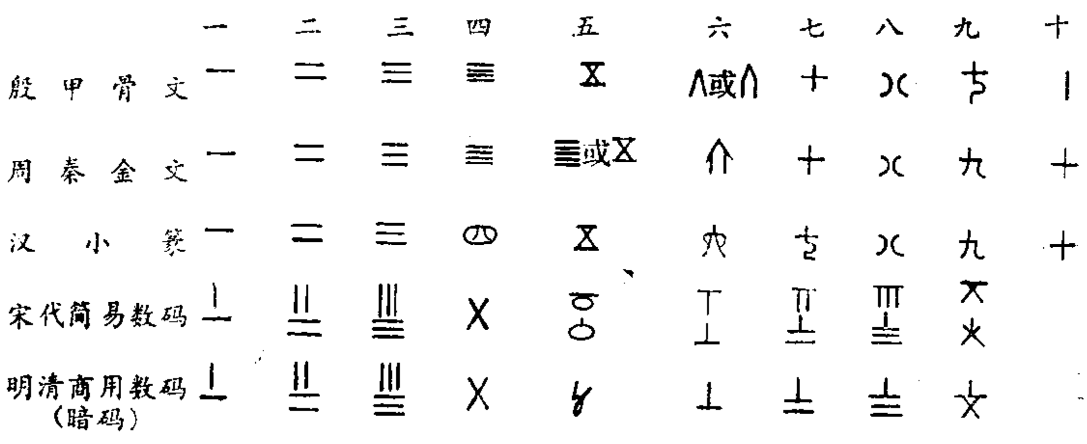
数码符号的引进

数的概念产生于计数的需要。原始时期，人类对数的认识往往是和实物联系在一起的。例如，有些民族用“我”或“月亮”表示“1”；用“眼睛”、“耳朵”或“鸟的翅膀”表示“2”，这是因为人有两只眼睛和两只耳朵的缘故。在西藏文中“2”有“翼”的意思，因为鸟有两只翅膀；用手表示“5”，因为手有五指，佛教语的“5”与波斯语的“手”就相近；用“人”表示“20”，因为人有十个手指和十个脚趾。我国古代的“一”就是“余”，“二”就是“尔”的假借，因为它们的音近似。罗马人在文化发展的初期，是用手指作为计数工具的。譬如他们表示1、2、3、4个物体，就分别伸出1、2、3、4个手指头；5个物体就伸出一只手；10个物体就伸出两只手。为了记录这些数，就把它们写在木板或羊皮上，用Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ来代替手指的数；要表示一只手时，就写成“V”形，表示大拇指与食指张开的形状；表示两只手时，就画成VV形，后来又写成一只手向上，一只手向下的“X”形，这已是数码的雏形。

数码符号的引进，是人类对数学认识的一大进步，它表示着“数”已从各种具体事物中抽象出来，具有“独立”的地位。例如，数“2”不仅表示“两个人”，“两只老虎”或“两条鱼”等，它已经把这些具体事物的其它属性撇开，注意到它们所具有的数量的共性。这样，数字只有一个，而所能表达的具体事物却是无穷的。人类的这种初级的数学抽象能力，是长期在实践中

归纳、类比和概括出来的。正如恩格斯指出:“为了计数，不仅要有可以计数的对象，而且还要有一种在考察对象时撇开对象的其它一切特性而仅仅顾到数目的能力，而这种能力是长期的以经验为依据的历史发展的结果。”（《自然辩证法》240页）各民族都有自己独特的数码符号。这些数码符号的书写方法，都有一个发展过程。就拿我们通常讲的“阿拉伯数字”来说吧，开始是印度人先用的，后来由印度传到阿拉伯，又从阿拉伯传到欧洲，但都不完全是现在的这种写法。经过好几个世纪的演变，才逐渐形成现在通用的阿拉伯数字。

我国是世界上文化发达最早的国家之一。我国数码产生的确实年代，虽难以考查，但是在纪元前一两千年左右，就有数码的写法，这是毫无疑问的。譬如在《世本》（汉刘向撰，是记载器物最初的创作者及姓氏来源的一本书）中曾有这样一句话:“黄帝时，隶首作数。”《易系辞》（是文王周公所作的辞，公元前一千年左右）中说:“上古结绳而治，后世圣人易之以书契。”《释名》（汉刘熙撰，是解释名称、辨别物件的书）这本书中说:“契，刻也，刻识其数也。”这里“契”与“锲”通，就是刻划的意思。由此可知，我国古代文化发展初期，是从上古结绳记事，



逐渐发展到在兽皮或树木上刻划记事，数码是在此基础上产生的。根据考古学家的考证和有关史料的记载，我国表数的古代书契有上面一些。唐宋以后，又以壹、贰、叁、肆、伍、陆、柒、捌、玖、拾、佰、仟为一至千的商业用数字。

这里需要对零这个数码特别加以说明。零作为数码被引入比较迟，这是因为它最初的意义表示“没有”，在古印度文中，零就是“空的”意思。正因为它表示空的意思，什么“没有”，所以也就不必过早地给以独立的符号，而用不写或空位的办法解决。可是，在十进位记数系统中，零的意义有了发展，它已不再仅仅表示“没有”了。0 可以表示界限，如寒暑表中的 0°。0 可以表示起点，如发射火箭时的口令：“9，8，7，6，5，4，3，2，1，0 ——发射！”0 可以表示新生状态，如打算盘前先要清盘，使算珠处于 0 即新生的状态；我们现在常讲的“一切从零开始”，也是这个意思。在物理里，0 还表示平衡状态。在数学中，当“0”添在“1”的后面而成“10”时，“0”的意义不仅表示个位数字上“没有”，而且它和 1 一起组成“十”，其数量比 1 扩大十倍。当正负数引入后，0 作为中性数、分界点，它的意义就更丰富了。

我国目前主要采用国际通用的阿拉伯数字，但也还有采用其它数码的。如票证单据上仍常采用我国古写的商用大写数字，因其字体较繁，不易涂改，可防弊端。中医处方用药量的标数，原来一直采用明清商用暗码，现在已改用克为单位，以阿拉伯数码记录。至于罗马数码，在有些书籍标明章节及钟表面上，仍有使用的。

人类有了自然数的同时，也就有了自然数的运算。例如，澳大利亚有的部族把三叫做二一，四叫做二二，五叫做二三，

六叫做三三，等等。我国数字“三十”表示“三个十”。罗马数字“Ⅶ”、Ⅸ表示 $7=5+2$、$9=10-1$，用加法及减法来命名或表示一些较大的数。它告诉我们，数码和数的运算必然密切联系在一起，数码是在运算过程中产生和发展的。

数码的个数是有限的，如在十进位制中，阿拉伯数码只需要十个。由少数几个数码，再配以其它的一些数学符号，就可以表示出千千万万个多种多样的数来。在这里，数码对于数来说，其作用犹如化学元素和化合物一样，它是组成各种数的基本“元素”，是我们研究数及其发展的基础。

进位制的由来

上古时候，人们为了数出物体的个数，便产生了自然数的观念。但是，如何读出和记出这些数呢？由于自然数有无限多个，如果每一个都用一个独立的名称和记号来表示，这显然是不可能的。有人做了一个统计，在莎士比亚的著作中，有一万七千个不同的词，即使一个英文程度很好的人，在阅读这位作家的著作时，也需要有一本专门词典来帮助。文字是如此的复杂，数字要是没有一种简化的方法去表示，也象文字这样复杂，那在表达数量关系时所出现的困难，是很难设想的。实践的需要促使进位制的产生。早在有文化的初期，多数民族由于实际生活的需要，都或多或少地创造出一定的进位制，但是，用专门数码来表示数的书写方法，却产生得很晚，甚至象古代希腊、罗马这样有高度文化的民族，用数码来表示数的书写方法也是极不完整的。直到纪元初年，人们才初步应用数码，并按一定的进位制来表示数。

国际上通用的是十进制读数与记数方法，即较低位上的十个单位组成较高位上的一个单位。在我国，很早就运用了这种进位制。如周代《易经》中表示数量时曾有“万有一千五百二十”的记载，说明早在二千多年前，我国就有了十进位制。后来，甄鸾在他的《数术记遗》(公元六世纪的书)中还有下面一段话：“黄帝为法，数有十等，及其用也，乃有三焉。十等者：亿，兆，京，垓，秭(音紫)，壤，沟，涧，正，载。三等者，谓上中下也。

其下数者，十十变之，若言十万曰亿，十亿曰兆，十兆曰京也。中数者，万万变之，若言万万曰亿，万万亿曰兆，万万兆曰京也。上数者，数穷则变，若言万万曰亿，亿亿曰兆，兆兆曰京也。”从这段话我们可以看出，当时虽采用了十进制，但缺乏统一的规定，主要原因是那时的生产力不发达，人们在实际生活中还不迫切需要用很大的数去记载。

根据易勒斯（W.C.Eels）的调查，美国原始亚美利加各族的307种计数系统中，有146种是十进位的，106种是五进位、十进位和二十进位的。可见，十进位制在历史上为人们所普遍采用。人类为什么喜欢采用十进位制呢？根据语言学家对世界各进化民族和多数原始民族语言的研究，这是由于人类的手有十个手指，可以自由伸屈，是一个很好的天然计数工具，因而不谋而合地都采用了十进位制。在英文中，“dight”这个单词既可以当“手指”讲，又可以当“数字”讲，这与人们长期用手指表示数字，可能是有联系的。另外，十进位制比较简单，所以传播也就最广。十八世纪晚期，法兰西大革命使很多旧的文物和制度都摧毁了，但十进位制不仅丝毫没有变动，反而比过去更巩固了。由此可见，十进位制真是根深蒂固。

当然，除了十进位制外，还有其它进位制。实际上除0和1以外，任何自然数都可以用来作为进位制的基础数。例如，有二进位制、三进位制、五进位制、七进位制、八进位制、十一进位制、十二进位制、二十进位制和六十进位制等。象北美的印地安人，中美、南美的少数民族，西伯利亚的北部民族及非洲人等，常用五进位制和二十进位制。1937年在维斯托尼斯（罗马尼亚境内）发现旧石器时代的一根幼狼的桡骨，七吋长，上面有着五十五个刻痕，前面二十五个是五个一組地排列着，

随后一个刻痕是原来长的两倍，作为这一列的结束。这是五进位制应用的一个证明。巴比伦人最初使用六十进位制，直到现在我们还在使用这种进位制，如一小时等于六十分钟，一分钟等于六十秒，圆周角等于三百六十度，一度等于六十分等。其它如十二进位制也是比较方便的。因为十二进位制的基础数“十二”能被2、3、4、6所整除，用十二进位制做除法，能整除的机会较多。据传说，古代瑞典国王查理第十二就主张用十二进位制。他在快死时，还念念不忘在他统辖的区域，把十进制改为十二进位制。但后来没有实现。十二进位制今天还在应用，如一年有十二个月，一天是二十四小时（钟表面上仍只用十二）等，其它从英文中也可明显地看出十二进位制的痕迹。英文从1到19这十九个数字是：one, two, three, four, five, six, seven, eight, nine, ten, eleven, twelve, thirteen, fourteen, fifteen, sixteen, seventeen, eighteen, nineteen。这里面从1到12，这十二个数字是独立的，13以后才有一个统一的构成法。

任何一种基数 r 的进位制中，数的写法具有下列形式：

$$a_n r^{n-1} + a_{n-1} r^{n-2} + a_{n-2} r^{n-3} + \cdots + a_2 r + a_1.$$

这里，a_1 是个位数字，a_2 是十位数字，a_3 是百位数字，依此类推。如十进位数3872，可写为：

$$3872 = 3 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 2.$$

科学技术发展到今天，很多问题的解决都需要进行大量的计算。在许多情况下计算速度要求很高，必需使用自动控制。有些数学问题计算工作的量很大，如建筑巨型水力发电站的拦河坝工程，就需要进行极为繁杂的计算。这里遇到的联立方程已经不是两三个未知数，而是十个、几十个乃至几百个未知数，其计算的艰难复杂程度可想而知。堤坝的设计不仅是整