胡瑶光编著

规范场论

GUIFANCHANG LUN

华东师范大学出版社

规 范 场 论

胡瑶光 编著

华东师范大学出版社

规 范 场 论

胡瑶光 编著

华东师范大学出版社出版
（上海中山北路3663号）

新华书店上海发行所发行　　江苏如皋印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32　印张：13　字数：330千字

1984年3月第一版　1984年3月第一次印刷

印数 1—6,000本

统一书号：13135·011　　定价：1.50元

前　言

基本粒子物理是最活跃的前沿学科之一。随着高能加速器的发展，新粒子不断出现，粒子反应过程呈现新的规律。人们试图从各个不同方面，用各种不同理论，来论述基本粒子的规律。在多种多样的基本粒子理论中，对称性理论居于主导地位。五十年代发现了宇称不尽守恒，完善了基本粒子的时、空对称理论。六十年代建立了幺正对称理论，预言了夸克的存在，进入了基本粒子的夸克时代。七十年代确立了弱电统一规范理论，初创了量子色动力学，开始了规范理论的统治局面。

授予诺贝尔奖金，是肯定科学研究成果的一种重要方式。基本粒子理论研究，获得诺贝尔奖金的，共有六次：1949 年汤川的介子理论；1957 年李政道、杨振宁的宇称不尽守恒；1963 年维格勒(Wigner)的对称群用于物理；1965 年朝永振一郎(Tomonaga)、许温格(Schwinger)、费曼(Feynman)的重整化等场论；1965 年格尔曼(Gell-Mann)的幺正对称理论；1979 年格拉肖(Glashow)、温伯格(Weinberg)、萨拉姆(Salam)的弱电统一规范理论。其中有四项是对称理论。这不是偶然现象，是对称理论在基本粒子理论中所居地位的一种反映。

自然界存在四种相互作用：电磁作用；弱作用；强作用；万有引力。人们早就想把这四种相互作用统一起来，进行描述。为此，进行了多方面的努力。但是，取得成功的，都属规范场论。弱电统一理论是 $SU(2)\times U(1)$ 规范场论。量子色动力学是 $SU_c(3)$ 规范场论。由于弱电统一理论的成功，而量子色动力学又是强作用理论的唯一候选者，所以人们把 $SU_c(3)\times SU(2)\times U(1)$ 叫做标准模

型。在这基础上，人们建立了把弱电强三种相互作用统一起来的大统一理论。人们还企图把万有引力也包括进去，建立统一四种相互作用的超对称、超统一理论。

通常，把基本粒子分成轻子、重子、介子和光子四类。但是，从规范理论的观点看来，基本粒子应该分成新的三种类型：实粒子；规范粒子；Higgs 粒子。实粒子包括轻子和夸克，是基本的费米子。重子和介子是由夸克组成的复合粒子。规范粒子是传递相互作用的矢量粒子，它们是光子、中间玻色子和胶子，还可能有导致质子衰变的 X、Y 粒子。Higgs 粒子具有奇异的性质：当它们以虚质量面目出现时，破坏真空的对称性；当把对称性的破坏由真空转向“实物”时，它们以实质量面目出现，并使其它粒子获得质量；它们的主要责任是使其它粒子获得质量。

把最新科学研究成果，尽快地传播开去是科教工作者的职责。规范场论的研究，取得了重大成就，改变了基本粒子理论的面貌。规范场论正在成为基本粒子理论工作者的必修课程。可是，迄今还缺少系统论述规范场论的专门教材，这对初学者是不利的。鉴于此，作者在几次讲学的基础上，在一些同志的督促下，写成此书。但愿本书能使读者获得一个初步的基础，为进一步学习、研究准备条件。所以，在内容的选取和论述方面，着重基础，着重处理问题的观点和方法。但是，由于作者水平的限制，力不从心，错误之处难免，请读者指正。

本书内容包括四个部分：第一部分由第一、二章组成，在经典场论的基础上，论述规范对称性、破缺对称性和弱电统一规范理论；第二部分由第三、四、五、六章组成，介绍泛函路径积分方法，用它处理规范场的量子化和重整化；第三部分由第七、八、九章组成，是量子色动力学的基础，包括重整化群、算符乘积展开、A-P 方程等理论方法，以及深度非弹散射和 e^+e^- 湮灭等基本内容；第四部分是第十章，是以 SU(5) 为例的大统一理论的导引。

本书主要参考的资料有：E. S. Abers, B. W. Lee 的《规范理论》(Phys. Rep. 9C. No. 1, 1973)；杨炳麟的《量子场论导论》和《微扰量子色动力学及重整化群的应用》；P. Langacker 的"Grand unified theories and proton decay" (Phys. Rep. Vol. 72, No. 4, 1981)；A. J. Buras, "Asymptotic freedom in deep inelastic processes in the leading order and beyond"(Rev. Mod. phys. Vol. 52, No. 1, 1980)等等。

本书使用的符号、度规，大致和 J. D. Bjorken, S. D. Drell 的 "Relativistic Quantum Fields" 一书中的相同，但 γ_5 差一负号。

殷鹏程教授审阅了原稿，李凌云同志负责编辑，薛晓舟、王勉、潘传增、葛源、杨学恒等许多同志，对本书给予了很大的促进和帮助，蒋元方、沙以高校核了样稿，作者向他们表示感谢！

目　　录

前　言
第一章　场的对称性 ……1
§1. 时空连续变换下的不变性 ……1
§2. 整体规范不变性 ……6
§3. 定域规范不变性 ……9
§4. Higgs场的破缺对称性 ……14
§5. Higgs 机制 ……24
第二章　GWS 弱电统一规范理论 ……33
§1. 费米子的场和流 ……33
§2. 轻子弱电统一规范理论 ……42
§3. 夸克弱电统一规范理论 ……53
§4. 轻子弱过程 ……63
§5. 强子弱过程 ……69
第三章　生成泛函的路径积分表示 ……76
§1. 转换矩阵元和算符矩阵元 ……78
§2. 格林函数及其生成泛函 ……86
§3. 场的格林函数及其生成泛函 ……95
§4. 连通格林函数及其生成泛函 ……105
§5. 正规顶角及其生成泛函 ……108
§6. $\phi^4(x)$场的生成泛函 ……115
第四章　规范场的量子化 ……124
§1. 正则坐标和动量 ……125
§2. 库伦规范下的生成泛函 ……128
§3. 法捷叶夫-波波夫理论 ……132
§4. 鬼粒子和规范固定项 ……136

§5. 规范场的费曼规则 ……143
§6. GWS 场的量子化和 R_ξ 规范 ……149
第五章 生成泛函的不变性和恒等式 ……162
§1. 函数空间的平移变换和正则关系 ……162
§2. 场、源分离变换和费曼规则 ……168
§3. 一般变换下的不变性和恒等式 ……176
§4. B、R、S 变换和 W、T 恒等式 ……183
第六章 规范理论的重整化 ……194
§1. 重整化的一般概念 ……194
§2. 重整化常数的计算 ……203
§3. 规范场传播子纵分量不需重整 ……214
§4. 重整化方程 ……217
§5. 规范理论的重整化 ……224
第七章 QCD 和重整化群方程 ……230
§1. 颜色自由度 ……230
§2. 量子色动力学 ……236
§3. 重整化群方程 ……243
§4. 随动量变化的参数 ……248
§5. 深度非弹散射的结构函数 ……257
§6. 渐近自由的夸克模型 ……273
第八章 算符乘积展开及其应用 ……281
§1. 自由场算符乘积展开 ……281
§2. 再论结构函数 ……293
§3. 相互作用场算符乘积的展开 ……306
§4. 展开系数的重整化群方程 ……318
§5. 展开算符及其反常量纲 ……321
第九章 A–P 方程和分布、碎裂、演化函数 ……333
§1. 分布函数及其 A–P 方程 ……334
§2. 演化函数 ……340
§3. e^+e^- 湮灭为强子的初级近似 ……352

§4. e^+e^-湮灭为强子的重整化效应……358
§5. 碎裂函数及其 A-P 方程……364
第十章 SU(5)大统一理论 ……373
§1. SU(5)规范群和规范场……373
§2. 费米场的表示 ……384
§3. Higgs 机制 ……390
§4. 重整化效应 ……399

第一章　场的对称性

对称理论是基本粒子理论的重要内容。规范不变性是场的一种基本对称性。对称性的破缺是使场获得质量的一种机制。在这一章里，我们着重论述场在内部空间的规范不变性，论述对称性的破缺和使场获得质量的 Higgs 机制。为了便于理解对称理论的观点和方法，我们先介绍场在时空空间连续变换下的不变性，然后再进入主题。

§1. 时空连续变换下的不变性

时空连续变换下的不变性，包括平移不变性和洛仑兹不变性。平移不变性反映时空空间的均匀性，是能量、动量守恒定律的基础。洛仑兹不变性是四维时空转动下的不变性，反映四维时空的各向同性。它包括的三维空间转动下的不变性，是角动量守恒的基础。

时空平移　指时空坐标 x^μ 的平移变换，定义为

$$x^\mu \to x^{\mu\prime} = x^\mu + a^\mu,$$
$$\delta x^\mu \equiv x^{\mu\prime} - x^\mu = a^\mu。 \tag{1-1}$$

a^μ 是与 x^μ 无关的常数，$\mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3$。

在这变换下，场量 $\phi_\sigma(x)$ 也要发生相应的变化。人们认为：变换前后的场量相等，即

$$\phi_\sigma(x) \to \phi'_\sigma(x') = \phi_\sigma(x), \tag{1-2}$$

$\sigma = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 是场的分量指标。$\phi'_\sigma(x')$ 由两重变化而成：作为 x 的函数，它随 x 变为 $\phi_\sigma(x')$；由于场本身的性质，它变换为

$\phi'_\sigma(x)$，而且定义本征变换为

$$\delta\phi_\sigma(x)\equiv\phi'_\sigma(x)-\phi_\sigma(x)。$$

由(1-2)式得

$$\phi'_\sigma(x)=\phi_\sigma(x-a)=\phi_\sigma(x)-a^\mu\partial_\mu\phi_\sigma(x)。$$

在后一个等式中，我们假定了 a^μ 是小量，并且只取一级近似。因此，场量的本征变化为

$$\delta\phi_\sigma(x)=-a^\mu\partial_\mu\phi_\sigma(x)。\tag{1-3}$$

平移不变性 人们认为：时空空间是均匀的，在时空空间各点发生的物理规律应该是相同的。因此，用来描述物理规律的拉格朗日密度 $\mathscr{L}$ 或运动方程，在不同的时空点应该具有相同的形式。换句话说，在上述的平移变换下，拉格朗日密度 $\mathscr{L}$ 是不变的，即

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\phi_\sigma(x),\ \partial_\mu\phi_\sigma(x))\to\mathscr{L}'(\phi'_\sigma(x'),\ \partial_\mu\phi'_\sigma(x'))\\ =\mathscr{L}(\phi'_\sigma(x'),\ \partial_\mu\phi'_\sigma(x'))\\ =\mathscr{L}(\phi_\sigma(x),\ \partial_\mu\phi_\sigma(x)),\end{aligned}\tag{1-4}$$

这是我们在本书中采用的不变性的数学表达式。它不仅表示时空平移不变下的不变性，也表示其它变换下的不变性。当然，对于不同的变换，$\phi'_\sigma(x')$有不同的意义。(1-4) 式中的第一个等号表示变换前后的拉格朗日密度的泛函形式一样，第二个等号表示变换前后的拉格朗日密度的大小一样。

能量、动量守恒定律 从以上所述的时空均匀性、平移不变性，可以导出能量、动量守恒定律。由(1-4)式得

$$\mathscr{L}(\phi'_\sigma(x),\ \partial_\mu\phi'_\sigma(x))-\mathscr{L}(\phi_\sigma(x-a),\ \partial_\mu\phi_\sigma(x-a))=0,$$

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(\phi'_\sigma(x),\ \partial_\mu\phi'_\sigma(x))-\mathscr{L}(\phi_\sigma(x),\ \partial_\mu\phi_\sigma(x))\\ &\quad+\mathscr{L}(\phi_\sigma(x),\ \partial_\mu\phi_\sigma(x))-\mathscr{L}(\phi_\sigma(x-a),\ \partial_\mu\phi_\sigma(x-a))\\ &=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\sigma(x)}\delta\phi_\sigma(x)+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\sigma(x)}\delta\partial_\mu\phi_\sigma(x)+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu\end{aligned}$$

$$
=\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi_\sigma(x)}\delta\phi_\sigma(x)+\mathscr{L}\delta x^\mu\right]
$$

$$
=\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_\mu \phi_\sigma(x)}(-a^\nu\partial_\nu\phi_\sigma(x))+\mathscr{L}g^\mu_\nu a^\nu\right]
$$

$$
=0。
$$

由于 a^ν 是任意的小量，所以从上式得到

$$
\frac{\partial}{\partial x^\nu}T^{\mu\nu}=0, \tag{1-5}
$$

$$
T^{\mu\nu}=\mathscr{L}g^{\mu\nu}-\partial^\mu\phi_\sigma(x)\cdot\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\partial_\nu\phi_\sigma(x)}. \tag{1-6}
$$

(1–5)式表示的连续性方程，就是能量、动量守恒的微分形式。(1–6)式表示的 $T^{\mu\nu}$，就是场的能量、动量张量。对(1-5)式取体积积分，得

$$
\int_V\left(\frac{\partial T^{\mu1}}{\partial x_1}+\frac{\partial T^{\mu2}}{\partial x_2}+\frac{\partial T^{\mu3}}{\partial x_3}\right)dV+\int_V\frac{\partial T^{\mu0}}{\partial t}dV=0。
$$

应用高斯定理，上式变成

$$
\oint_S T^{\mu i}dS_i+\frac{\partial}{\partial t}\int_V T^{\mu0}dV=0. \tag{1-7}
$$

这就是能量、动量守恒定律的积分形式。

能量和动量 把(1–7)应用到场所占有的整个空间，在包围整个场的表面上 $T^{\mu i}=0$，则(1–7)式成为

$$
\frac{\partial}{\partial t}\int_V T^{\mu0}dV=0.
$$

由此可知

$$
P^\mu=\int_V T^{\mu0}dV
$$

是守恒量。我们把它叫做场的四维动量。而

$$
-E=\int_V T^{00}dV=\int_V[\mathscr{L}-\dot{\phi}_\sigma(x)\pi_\sigma(x)]dV \tag{1-8}
$$

是场的能量。

$$
P^i=\int_V T^{i0}dV=-\int_V\pi_\sigma(x)\partial^i\phi_\sigma(x)dV \tag{1-9}
$$

是场的动量。以上诸式中的

$$\pi_\sigma(x) \equiv \frac{\delta \mathscr{L}}{\delta \dot{\phi}_\sigma(x)}$$

是和场量 $\phi_\sigma(x)$ 相应的正则动量(密度)。

洛仑兹变换 时空坐标作变换

$$x^\mu \to x^{\mu\prime} = a^{\mu\nu} x_\nu,$$

且满足条件

$$x^{\mu\prime} x'_\mu = x^\nu x_\nu,$$

则称为洛仑兹变换。$a^{\mu\nu}$ 是和 x^μ 无关的变换系数。由上式可知它应该满足条件

$$a^{\mu\nu} a_{\mu\lambda} = g^\nu_\lambda。$$

如果

$$a^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \epsilon^{\mu\nu},$$

且 $\epsilon^{\mu\nu}$ 是一小量,并满足反对称条件

$$\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}, \tag{1-10}$$

那么就是无穷小洛仑兹变换。这时

$$\delta x^\mu = x^{\mu\prime} - x^\mu = \epsilon^{\mu\nu} x_\nu。 \tag{1-11}$$

在无穷小洛仑兹变换下，场量 $\phi_\sigma(x)$ 也应该作一个无穷小变换,即

$$\phi_\sigma(x) \to \phi'_\sigma(x') = \left(\delta_{\sigma\rho} + \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu} S_{\mu\nu,\sigma\rho}\right)\phi_\rho(x)。 \tag{1-12}$$

(1–12)式中的 $S_{\mu\nu,\sigma\rho}$ 是由场量 $\phi_\sigma(x)$ 的性质确定的变换系数,实际上是由相应粒子的自旋确定的变换系数。$\frac{i}{2}$ 是为了使 $S_{\mu\nu,\sigma\rho}$ 的意义更明确而引进的。$\phi'_\sigma(x')$ 也包含两重变换,它的本征变化为

$$\delta\phi_\sigma(x) = \phi'_\sigma(x) - \phi_\sigma(x)。$$

由(1–12)式可知

$$\begin{aligned}
\phi'_\sigma(x) &= \phi_\sigma(x - \epsilon x) + \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu} S_{\mu\nu,\sigma\rho}\phi_\rho(x - \epsilon x) \\
&= \phi_\sigma(x) - \epsilon^{\mu\nu} x_\nu \partial_\mu \phi_\sigma(x) + \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu} S_{\mu\nu,\sigma\rho}\phi_\rho(x) \\
&= \phi_\sigma(x) + \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}\left[(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)\delta_{\sigma\rho} + i S_{\mu\nu,\sigma\rho}\right]\phi_\rho(x),
\end{aligned}$$

代入上式得

$$\delta\phi_\sigma(x)=\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}[(x_\mu\partial_\nu-x_\nu\partial_\mu)\delta_{\sigma\rho}+iS_{\mu\nu,\sigma\rho}]\phi_\rho(x)。\quad (1\text{-}13)$$

角动量守恒 在洛仑兹变换下的不变性，可以用

$$\mathscr{L}(\phi'_\sigma(x'),\ \partial'_\mu\phi'_\sigma(x'))=\mathscr{L}(\phi_\sigma(x),\ \partial_\mu\phi_\sigma(x))$$

表示，它反映时空空间的各向同性。由它可知

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(\phi'_\sigma(x),\ \partial_\mu\phi'_\sigma(x))-\mathscr{L}(\phi_\sigma(x-\epsilon x),\ \partial_\mu\phi_\sigma(x-\epsilon x))\\&=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\sigma(x)}\delta\phi_\sigma(x)+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\sigma(x)}\delta\partial_\mu\phi_\sigma(x)+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu\\&=\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\sigma(x)}\delta\phi_\sigma(x)+\mathscr{L}g^{\mu\nu}\delta x_\nu\right]=0。\end{aligned}$$

把(1-11)式和(1-13)式代入上式得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\sigma(x)}\frac{1}{2}\epsilon^{\nu\lambda}[(x_\nu\partial_\lambda-x_\lambda\partial_\nu)\delta_{\rho\sigma}\right.\\&\qquad\left.+iS_{\nu\lambda,\sigma\rho}]\phi_\rho(x)+\mathscr{L}g^{\mu\nu}\epsilon_{\nu\lambda}x^\lambda\right\}\\&=\frac{1}{2}\epsilon^{\nu\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left\{x_\lambda\left(g^\mu_\nu\mathscr{L}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\sigma(x)}\partial_\nu\phi_\sigma(x)\right)\right.\\&\qquad-x_\nu\left(g^\mu_\lambda\mathscr{L}-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\sigma(x)}\partial_\lambda\phi_\sigma(x)\right)\\&\qquad\left.+i\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\sigma(x)}S_{\nu\lambda,\sigma\rho}\phi_\rho(x)\right\}=0。\end{aligned}$$

$\epsilon^{\nu\lambda}$ 是任意的，因而将(1-6) 式代入就得

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}M_{\lambda\nu,\mu}=0,\quad (1\text{-}14)$$

$$M_{\lambda\nu,\mu}=x_\lambda T_{\nu\mu}-x_\nu T_{\lambda\mu}+i\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial^\mu\phi_\sigma(x)}S_{\nu\lambda,\sigma\rho}\phi_\rho(x)\quad (1\text{-}15)$$

这就是四维角动量守恒定律和四维角动量张量。而守恒的四维角动量就是

$$J_{\lambda\nu}=\int_V M_{\lambda\nu,0}\,dV。$$

当 $\lambda、\nu=i、j=1,\ 2,\ 3$ 时，就是普通的角动量

$$J_{ij}=\int_V[x_i T_{j0}-x_j T_{i0}+i\pi_\sigma(x)S_{ji,\sigma\rho}\phi_\rho(x)]dV。$$

显然
$$-i\int_V \pi_\sigma(x)S_{ij,\sigma\rho}\phi_\rho(x)dV$$
是自旋角动量。

从以上的论述可知，对称性、不变性和守恒定律是紧密联系着的。Noether 定理早就指出了这种联系。这种联系使对称理论在物理学中占有重要的作用和地位。

§2. 整体规范不变性

作为导引，我们在上一节中讨论了场在时空空间的连续不变性。在讨论中没有使用群论语言。现在，我们开始讨论场在内部空间的对称性，并采用群论方法。内部空间是为了描述粒子场的内部性质，如电荷、重子数、轻子数、同位旋、味道、颜色等，而引入的抽象空间。

规范群 在规范理论中，内部空间的“转动”，用规范群 G 来表示。规范群的元素写作

$$u(\theta)=\exp[-i\theta^\alpha T^\alpha]。\tag{1-16}$$

T^α 是群 G 的生成元，满足对易关系

$$[T^\alpha,\ T^\beta]=if^{\alpha\beta\gamma}T^\gamma。\tag{1-17}$$

$f^{\alpha\beta\gamma}$ 是群 G 的结构常数。$\alpha,\ \beta,\ \gamma=1,\ 2,\ \cdots,\ N$。$N$ 是群 G 的维数，它等于生成元的个数。θ^α 是群 G 的参数，叫做群参数，也有 N 个。

如果规范群是 SU(n) 群，那末 $N=n^2-1$，就有 n^2-1 个生成元 T^α，$\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ n^2-1$。群元素的表示 $u(\theta)$ 就是幺正、幺模的矩阵。生成元的表示就是厄密、无迹的矩阵。而且，在 n^2-1 个生成元中，有 $n-1$ 个是可以同时对角化的。

如果规范群是 n 维实空间的转动群，那末 $N=\frac{1}{2}n(n-1)$，就有 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 个生成元。它的表示 T^{α}，$\alpha=1, 2, \cdots, \frac{1}{2}n(n-1)$，就是厄密、纯虚、反对称的矩阵。它的基本表示可以写作

$$
\begin{aligned}
&L_{ij}=-i(E_{ij}-E_{ji}),\\
&(E_{ij})_{kl}=\delta_{ik}\delta_{jl},\\
&i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n。
\end{aligned}
\tag{1-18}
$$

群的生成元可以用作描写场粒子性质的算符。在具体问题中，要选择什么样的规范群，归根到底要由场粒子的具体性质来确定，要由粒子之间的相互作用规律来确定。例如，在量子电动力学(QED)中，采用 U(1) 群，生成元 $T=Q$ 是电荷算符；在 GWS 弱电统一规范理论中，采用 SU(2)×U(1) 群，生成元 $T^{i}(i=1, 2, 3)$ 是同位旋算符，生成元 Y 是超荷算符；在量子色动力学(QCD)中，采用 SU(3) 群，生成元 $G^{\alpha}(\alpha=1, 2, \cdots, 8)$ 是颜色算符；在大统一理论中，采用 SU(5) 群，生成元除同位旋算符 $T^{i}(i=1, 2, 3)$、超荷算符 Y、颜色算符 $G^{\alpha}(\alpha=1, 2, \cdots, 8)$ 外，还有十二个既有颜色又有味道的算符 T^{α}_{r} 和 $T^{r}_{\alpha}(\alpha=1, 2, 3; r=4, 5)$。

规范变换　在内部空间的转动下，场量 $\phi_{\sigma}(x)$ 作变换

$$
\phi_{\sigma}(x)\to\phi'_{\sigma}(x)=\exp[-i\theta^{\alpha}T^{\alpha}_{\sigma\rho}]\phi_{\rho}(x),
\tag{1-19}
$$

这种变换叫做规范变换。当群参数 θ^{α} 是与时空坐标 x 无关的常数时，叫做整体规范变换。当群参数 θ^{α} 是时空坐标 x 的函数 $\theta^{\alpha}(x)$ 时，叫做定域规范变换。整体的意思是说时空各点的场量都作同样的变换；定域的意思是说时空各点作各自不同的变换。在这一节中，我们只讨论 θ^{α} 与 x 无关的整体规范变换。σ、$\rho=1, 2, \cdots, n$ 是场在内部空间的分量指标。n 是内部空间的表示的维数。$T^{\alpha}_{\sigma\rho}$ 是生成元 T^{α} 的 n 维表示，是 $n\times n$ 矩阵的矩阵元。n 维表示空间的矢量 $\phi(x)$ 的 n 个分量 $\phi_{\sigma}(x)(\sigma=1, 2, \cdots, n)$ 可以写成

$$\phi(x)=\begin{vmatrix}\phi_1(x)\\\phi_2(x)\\\vdots\\\phi_n(x)\end{vmatrix},$$

它在内部空间"转动"下的变换,即规范变换(1-19)式,可以写成

$$\phi'(x)=\exp[-i\theta^\alpha T^\alpha]\phi(x)。\qquad(1\text{-}20)$$

由于 θ^α 是与时空坐标 x 无关的常数,场量的时空导数 $\partial_\mu\phi(x)$ 就象场量 $\phi(x)$ 一样变换,即

$$\partial_\mu\phi(x)\to\partial_\mu\phi'(x)=\exp[-i\theta^\alpha T^\alpha]\partial_\mu\phi(x)。\qquad(1\text{-}21)$$

这是整体规范变换的一个重要特点。

对称、不变和守恒 物理系统在内部空间的对称性,用它的拉格朗日密度在以(1-20)、(1-21)式表示的规范变换下的不变性,即

$$\mathscr{L}(\phi'(x),\ \partial_\mu\phi'(x))=\mathscr{L}(\phi(x),\ \partial_\mu\phi(x))\qquad(1\text{-}22)$$

来描写。和上节一样,我们可以从它导出相应的守恒定律和守恒量。在无穷小变换下,群参数 θ^α 是无穷小量,(1-20)式表示的变换为

$$\phi'(x)=(1-i\theta^\alpha T^\alpha)\phi(x),$$
$$\delta\phi(x)=\phi'(x)-\phi(x)=-i\theta^\alpha T^\alpha\phi(x)。$$

由(1-22)式得

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(\phi'(x),\ \partial_\mu\phi'(x))-\mathscr{L}(\phi(x),\ \partial_\mu\phi(x))\\&=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi(x)}\delta\phi(x)+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi(x)}\delta\partial_\mu\phi(x)\\&=\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi(x)}\delta\phi(x)\right]=0。\end{aligned}$$

将 $\delta\phi(x)$ 代入,并考虑到 θ^α 的任意性,就得到

$$\partial^\mu J_\mu^\alpha=0,$$
$$J_\mu^\alpha=-i\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial^\mu\phi(x)}T^\alpha\phi(x)。$$

这就是和所论内部对称性相应的守恒定律。J_μ^α 是守恒流,相应的