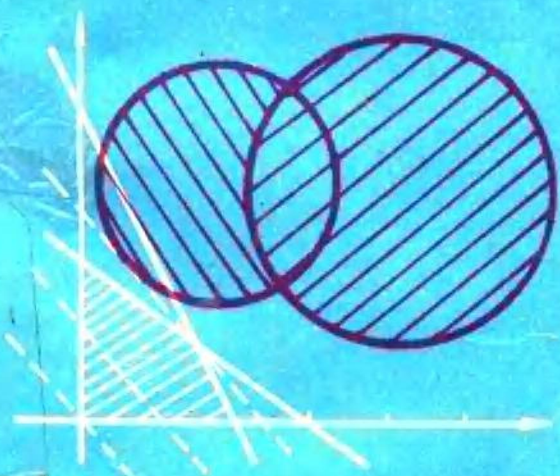
经济应用数学

（下）

周先铸　杨文兰　主编



中国商业出版社

经济应用数学

（下）

主　编　周先铸　杨文兰
副主编　马志猛　程来建
　　　　储根华　方荣珍

中国商业出版社

(京)新登字073号
责任编辑:金　贤
装帧设计:胡　卫

经济应用数学(上、下册)

周光铸
杨文兰　主编

*

中国商业出版社出版发行
(100053　北京广安门内报国寺1号)
新华书店总店科技发行所经销
蚌埠中发书刊发行有限公司激光照排
安徽省蚌埠市红旗印刷厂印刷

*

850×1168毫米　1/32　印张:22　字数:552千字
1993年12月第1版　1996年1月第2次印刷
印数:5000—10000册　定价:19.50元(上、下册)
ISBN 7—5044—2238—X/G·235

前　言

为了适应社会主义市场经济发展的需要，根据93年全国中专财经类教学大纲研讨会的精神，我们编写了经济应用数学上、下册，以便逐步适应修改大纲的要求。全书删去了“一元一次不等式组”、“二次函数”等部分内容，把“三角函数”的有关内容精减、压缩成二章，还合并“直线”、“二次曲线”为第八章平面解析几何初步，同时在第二章函数里增加了“对数”。

全书共十八章，其中第七章立体几何简介，第十五章投入产出简介，第十六章线性规划初步和第十八章数理统计初步为选学内容，可根据不同专业和教学时间的要求，确定选学部分。

本书由周先铸、杨文兰主编，马志猛、程来建、储根华、方荣珍副主编。参加编写的有沈大华（第一章，第二章1、2两节），方荣珍（第二章3、4、5三节），陈春华（第三、四、十五章），杨建平（第五章），杨庆木（第六章），周先铸（第七章，第十七章1、2、3三节，第十八章），马志猛（第八章），黄传虎（第九章，第十三章），储根华（第十、十一章），程来建（第十二章），康震华（第十四章），杨文兰（第十六章，第十七章4—9节）。最后，由周先铸、杨文兰、陈春华主审和定稿。

本书系国内贸易部教育司推荐教材。在本书编写过程中得到了国内贸易部教育司、参编人所在学校、华夏会计审计丛书编委会、安徽人民出版社和中国开发报社安徽分社蚌埠书刊发行站的大力支持，在此一并致谢。

由于编者水平有限，时间仓促，错误和疏漏实难避免，敬请读者批评指正。

编者

1994年6月

目　录

第九章　极限与连续

微积分研究的主要对象是函数，本章将在研究讨论函数的基础上，引进极限的概念，进而介绍与函数极限联系密切的函数连续问题.

§9—1　函数

函数是反映变量间依从关系的一个重要数学概念. 在上册第二章中，我们已分别介绍了函数的定义，函数的定义域、值域，函数的单调性、奇偶性、周期性、有界性等概念.

一、基本初等函数

在生产实践和科学实验中，由实际问题概括、抽象出来的函数关系有很多，其中能用公式表示而且应用最广泛的有以下五种：

幂函数　　$y = x^{\alpha}$（α 为任意实数）；

指数函数　$y = a^{x}(a > 0,\quad a \neq 1)$；

对数函数　$y = \log_{a}x(a > 0,\quad a \neq 1)$；

三角函数　$y = \sin x,\quad y = \cos x,\quad y = \mathrm{tg}x,\quad y = \mathrm{ctg}x$；

反三角函数　$y = \arcsin x,\quad y = \arccos x,$

$y = \mathrm{arctg}x,\quad y = \mathrm{arcctg}x.$

这五种函数统称为**基本初等函数**.

基本初等函数是研究更复杂的函数的基础，为了以后学习上的方便，现将五种基本初等函数的主要性质概述如下：

1. 幂函数

函数 $y = x^{\alpha}$（α 为实数）叫做**幂函数**，它的定义域随 α 的不同而异，但在这区间 $(0, +\infty)$ 内无论 α 为何值，函数总是有定义的.

幂函数的主要性质(第一象限内)：

当 $\alpha > 0$ 时，

(1) 图象通过点(0,0),(1,1)；

(2) 在区间$(0, +\infty)$上是增函数(见图 9—1).

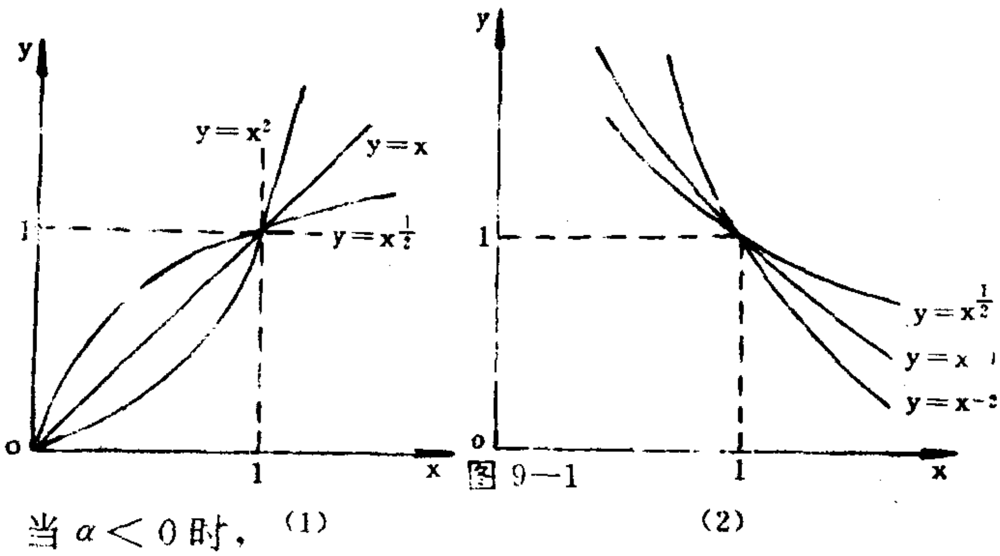


图 9—1

当 $\alpha < 0$ 时，

(1) 图象通过点(1,1)；

(2) 在区间$(0, +\infty)$上是减函数且有下界(见图 9—2).

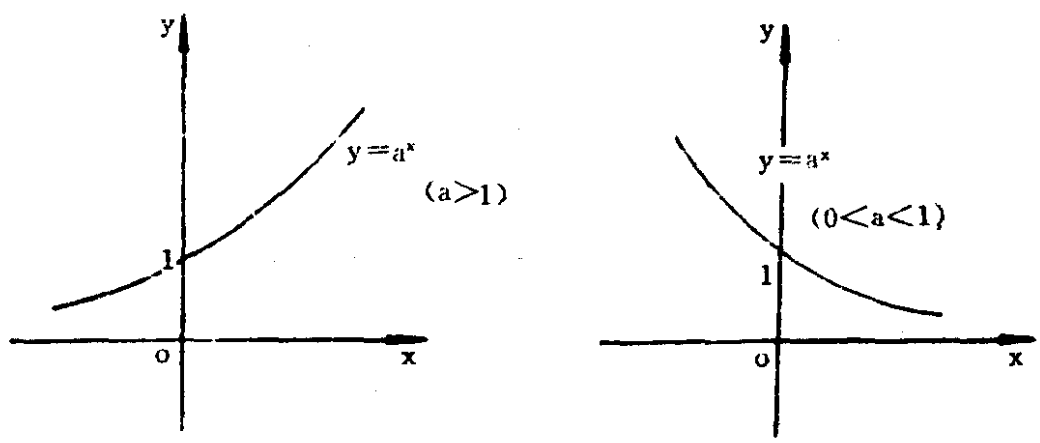


图 9—2

2. 指数函数

函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 叫做**指数函数**，它的定义域是全体实数.

图 9—2 为 $y = a^x (a > 0, \ a \neq 1)$ 的图象.

指数函数的主要性质：

(1) 恒有 $y > 0$，图象在 x 轴上方；

(2) 当 $x=0$ 时，$y=1$，图象通过点(0,1)；

(3) $a>1$ 时，$y=a^x$ 是增函数；$0<a<1$ 时，$y=a^x$ 是减函数.

3. 对数函数

函数 $y=\log_a x(a>0, a\neq 1)$ 叫做**对数函数**，它的定义域是 $(0,+\infty)$.

图 9—3 为 $y=log_a x(a>0, a\neq 1)$ 的图象.

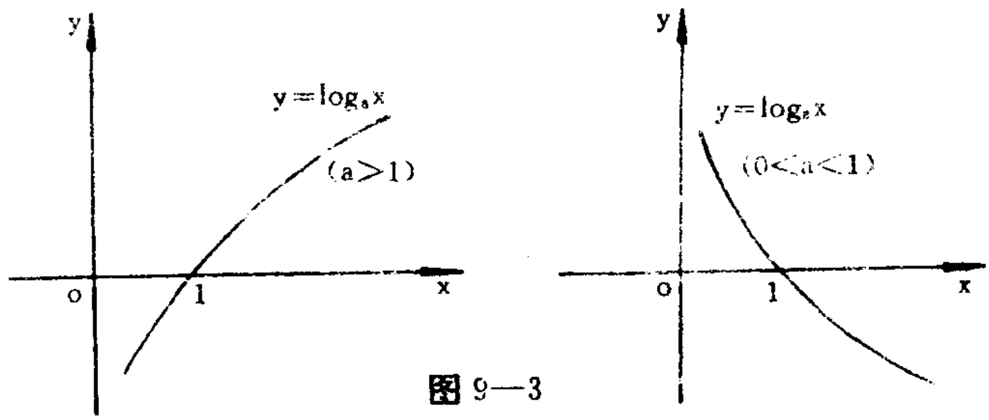


图 9—3

对数函数的主要性质：

(1) 函数的值域是 $(-\infty,+\infty)$；

(2) 图象在 y 轴的右方，通过点(1,0)；

(3) $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 是增函数；$0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 是减函数.

4. 三角函数

函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\operatorname{tg}x$，$y=\operatorname{ctg}x$ 是四个基本的三角函数.

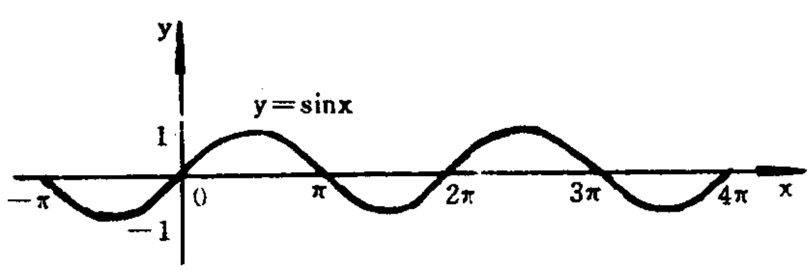


图 9—4

函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，它们具有下列性质：

(1) 值域都是 $[-1,1]$，是有界函数；

(2) 它们都是以 2π 为周期的周期函数；

(3) $y=\sin x$ 是奇函数，$y=\cos x$ 是偶函数.

图 9—4 和图 9—5 为 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的图象.

函数 $y=\mathrm{tg}x$ 的定义域是$\left\{x \mid x\in R,\ x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)\right\}$，函数 $y=\mathrm{ctg}x$ 的定义域是$\{x \mid x\in R,\ x\neq k\pi(k\in Z)\}$.

它们具有下列性质：

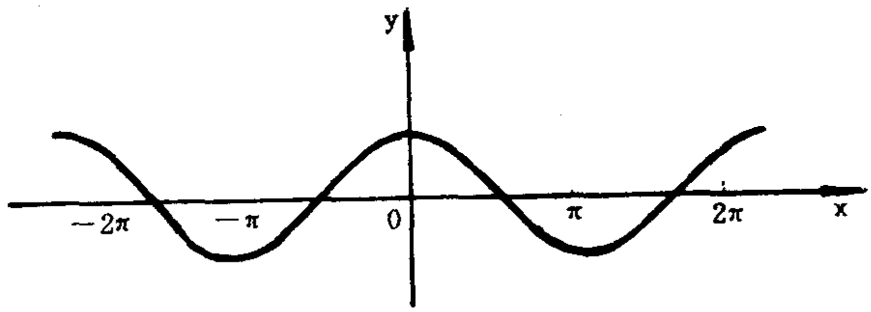


图 9—5

(1) 是奇函数，又是无界函数；

(2) 是以 π 为周期的周期函数；

(3) 图象由无数支曲线组成. $y=\mathrm{tg}x$ 在每一开区间$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$内都是递增的，$y=\mathrm{ctg}x$ 在每一开区间$(k\pi, k\pi+\pi)$内递减.

图 9—6 和图 9—7 为 $y=\mathrm{tg}x$ 和 $y=\mathrm{ctg}x$ 的图象.

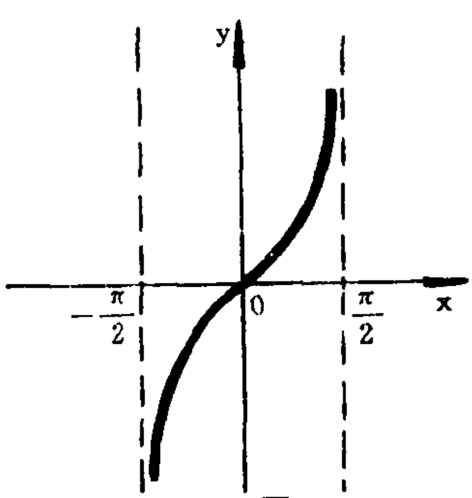


图 9—6

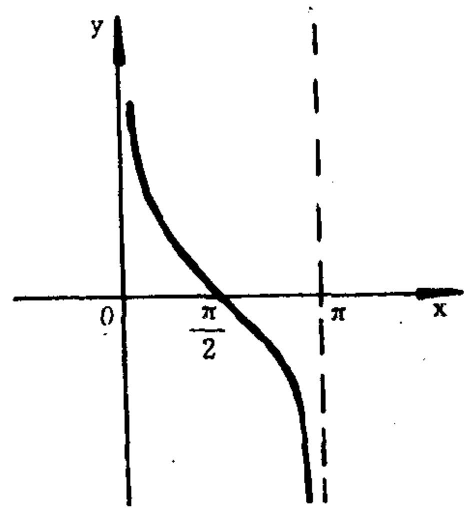


图 9—7

5. 反三角函数

函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\mathrm{arctg}x$，$y=\mathrm{arcctg}x$ 是四

基本的反三角函数.

函数 $y=\arcsin x$ 和 $y=\arccos x$ 的定义域是闭区间〔$-1,1$〕;

1. 它们具有下列性质

(1) 都是有界函数. $y=\arcsin x$ 的值域是〔$-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$〕, $y=\arccos x$ 的值域是〔$0,\pi$〕;

(2) 都是单调函数, $y=\arcsin x$ 在〔$-1,1$〕上是增函数, $y=\arccos x$ 在〔$-1,1$〕上是减函数.

图 9—8 和图 9—9 是 $y=\mathrm{arsinx}$ 和 $y=\arccos x$ 的图象.

函数 $y=\mathrm{arctg}x$ 和 $y=\mathrm{arcctg}x$ 的定义域是($-\infty,+\infty$).

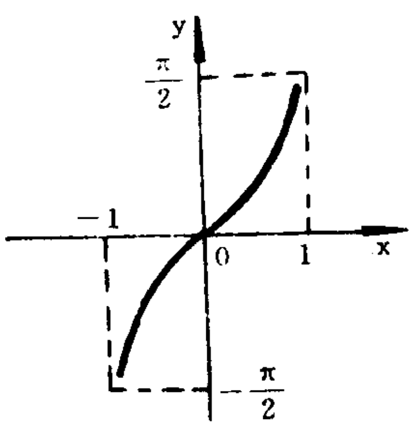


图 9—8

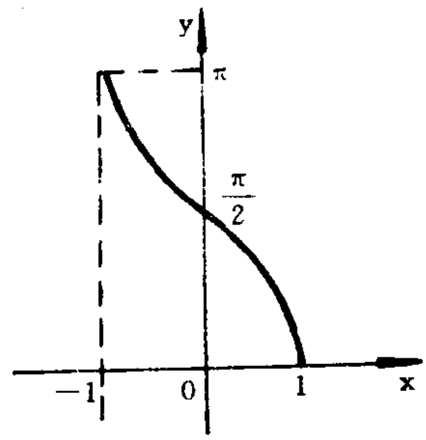


图 9—9

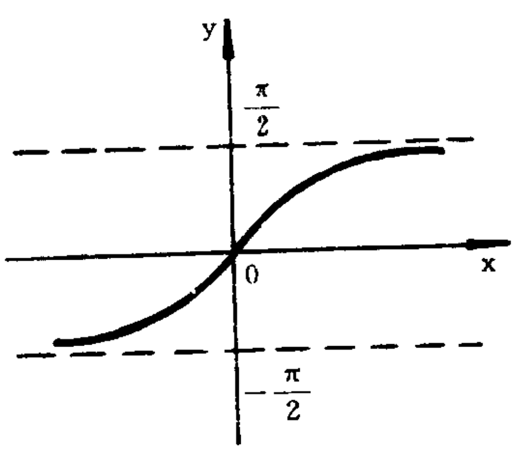


图 9—10

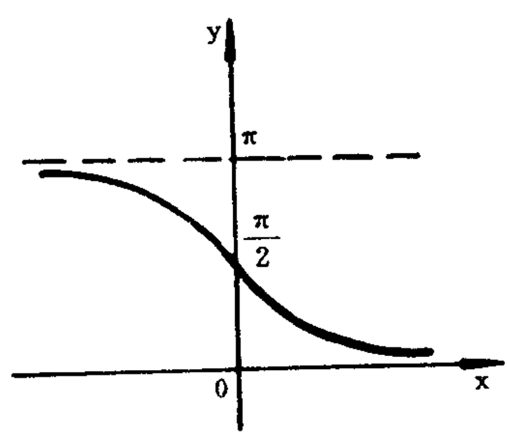


图 9—11

它们具有下列性质:

(1) 都是有界函数. $y=\mathrm{arctg}x$ 的值域是($-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$), $y=\mathrm{arcctg}x$ 的值域是($0,\pi$);

(2) 都是单调函数. $y=\mathrm{arctg}x$ 是增函数, $y=\mathrm{arcctg}x$ 是减函数.

图 9—10 和图 9—11 为 $y=\mathrm{arctg}x$ 和 $y=\mathrm{arcctg}x$ 的图象.

二、复合函数及初等函数

1. 复合函数

定义 设在某一变化过程中有三个变量 x,u,y, 且变量 y 是变量 u 的函数 $y=f(u)$, u 又是变量 x 的函数 $u=\varphi(x)$, 则把 $y=f[\varphi(x)]$ 叫做 x 的**复合函数**, 其中 u 叫做**中间变量**.

例 4 已知 $y=u^2, u=\sin x$, 试把 y 表示成 x 的函数

解 $y=u^2=\sin^2 x$

复合函数不仅可以由两个函数, 也可以由更多个函数复合而成.

例 5 已知 $y=lgu$, $u=1+v$, $v=\sqrt{Z}$, $z=1+x^2$, 试求由以上四个函数构成的复合函数.

解
$$\begin{aligned} y &= lgu \\ &= lg(1+v) \\ &= lg(1+\sqrt{Z}) \\ &= lg(1+\sqrt{1+x^2}). \end{aligned}$$

例 6 求出函数 $y=e^{\sin\frac{x}{2}}$ 是由哪几个基本初等函数复合而成

解 $y=e^{\sin\frac{x}{2}}$ 是由下列基本初等函数复合而成:

$$y=e^u$$

$$u=\sin v$$

$$v=\frac{x}{2}.$$

2. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次函数复合而形成的函数叫做**初等函数**.

由上所述, 初等函数必定为能用一解析式子表示的函数, 例如

$$y = \lg\sin x$$

$$y = \sqrt{1 + x^2} + \sin a^x$$

等都是初等函数

在本课程中讨论的函数大多数都是这类初等函数.

例 7 已知 $f(x) = x^2, \varphi(x) = 2^x$，求 $f[f(x)], f(\varphi(x)), \varphi(f(x))$

解

$$f(f(x)) = f^2(x) = (x^2)^2 = x^4,$$

$$f(\varphi(x)) = (\varphi(x))^2 = (2^x)^2 = 2^{2x} = 4^x,$$

$$\varphi(f(x)) = 2^{f(x)} = 2^{x^2}.$$

习题 9—1

1. 在同一坐标系内作出 $y = x^2, y = x, y = x^{\frac{1}{2}}$ 在第一象限内的大致图象，观察其位置关系

2. 在同一坐标系内作出 $y = x^{-2}, y = x^{-1}, y = x^{-\frac{1}{2}}$ 在第一象限内的图象，观察它们之间的位置关系

3. 在同一坐标系内作出 $y = 2^x, y = (\frac{1}{2})^x$ 的大致图象，讨论两者性质的异同

4. 在同一坐标系内作 $y = \log_4 x$，　$y = \log_{\frac{1}{4}} x$ 的大致图象，讨论两者性质的异同

5. 比较下列各组数的大小

(1)　$2^3, 2^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$；　　(2)　$(\frac{1}{\sqrt{3}})^{\pi}; (\frac{1}{\sqrt{3}})^{-3.14}$

(3)　$(\sqrt{5})^{-\frac{7}{6}}, 5^{-\frac{3}{5}}$；　　(4)　$(\frac{\sqrt{2}}{2})^{-3}, (\sqrt{3})^{4}$.

6. 比较下列各组数的大小

(1)　$2^{\sqrt{2}}, 2^{1.414}$；　　(2)　$0.7^{-\frac{21}{22}}, 0.7^{\frac{22}{23}}$；

(3)　$(\frac{3}{5})^{-2}; (\frac{3}{5})^2$；　　(4)　$(\frac{5}{9})^{\frac{3}{4}}, (\frac{9}{5})^{-\frac{4}{3}}$.

7. 比较下列各组数的大小

(1) $\log_{14}15, \log_{14}13$， (2) $\log_{\frac{\sqrt{5}}{5}}\frac{\sqrt{3}}{3}, \log_{\frac{\sqrt{5}}{5}}\frac{\sqrt{7}}{7}$

(3) $\log_4 0.5, \log_{\frac{1}{4}} 0.3$； (4) $\log_2 3, \log_{\frac{1}{2}} 3.1$.

8. 已知 $y = \sqrt{u}$， $u = x^3 + 1$，试把 y 表示为 x 的函数

9. 已知 $y = \ln u, u = 3^v$， $v = \sin x$，试把 y 表示为 x 的函数

10. 已知 $s = u^2, u = 1 + \sqrt{v}, v = t^2 + 2$，试把 s 表示 t 的函数

11. 试分析下列各函数是由哪几个基本初等函数复合而成

(1) $y = \lg \operatorname{tg} x$， (2) $y = \sin\sqrt{1 - x^2}$

(3) $y = \cos^2\sqrt{x}$， (4) $y = 4\arcsin(1 - x)^3$

(5) $y = \frac{1}{2}\sqrt{lg\sqrt{x^2 + 2x}}$

§9—2 极限

一、数列的极限

我们知道数列是按一定顺序排列起来的一列数.

例如 $\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{4}{3}, \quad \cdots, \quad \frac{n}{n+1}, \quad \cdots \qquad (1)$

$1, \quad 3, \quad 5, \quad \cdots, \quad 2n - 1, \quad \cdots \qquad (2)$

$1, \quad 0, \quad 1, \quad 0, \quad \cdots, \quad \frac{1 - (-1)^n}{2}, \quad \cdots \qquad (3)$

$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \cdots, \quad \frac{1}{n}, \quad \cdots, \qquad (4)$

$1, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4}, \quad \cdots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \quad \cdots \qquad (5)$

$a, \quad a, \quad a, \quad a, \quad \cdots, \quad a, \quad \cdots, \qquad (6)$

上面六个数列的通项公式分别是

(1) $y_n = \dfrac{n}{n+1}$, (2) $y_n = 2n - 1$,

(3) $y_n = \dfrac{1-(-1)^n}{2}$, (4) $y_n = \dfrac{1}{n}$,

(5) $y_n = (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$, (6) $y_n = a$

下面我们考察，当 n 无限增大时(记作 $n \to \infty$)，它们的项的变化趋势

(1) 数列 $\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\cdots,\dfrac{n}{n+1},\cdots$

的各项的数值随 n 增大而增大，越来越接近于 1.

(2) 数列 $1,3,5,\cdots 2n-1,\cdots$ 各项的值，随 n 增大而增大，而且无限制地增大.

(3) 数列 $1,0,1,0,\cdots \dfrac{1-(-1)^n}{2},\cdots$ 各项的值交替取得 0 与 1 两数，一直如此，不接近某数.

(4) 数列 $1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\cdots \dfrac{1}{n},\cdots$

的项随 n 的增加，各项值越来越接于 0.

(5) 数列 $1,-\dfrac{1}{2},\quad \dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{4},\cdots(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n},\cdots$

各项的值随着 n 的增大在数 0 两边跳跃，越来越接近于 0

(6) 数列 $a,a,a,\cdots,a\cdots$ 各项的值在 n 的变化过程中一直相等，都为 a.

定义 如果无穷数列的项数 n 无限地增大时，数列 y_n 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么常数 A 就叫做无穷数列的**极限**，记作

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A \qquad (\text{或} \quad n \to \infty \text{ 时}, \quad y_n \to A)$$

这里所说的 y_n 无限地趋近于一确定的常数 A，可以这样理解：

在 n 无限增大过程中，对于预先给定的任意小的正数，当 n 足够大时，$|y_n - A|$ 都能小于这个任意小的正数.

如果在 n 无限增大的过程中，数列 y_n 并不趋向于某一确定的

常数，我们就说 y_n 没有极限．如前所述数列(2)和(3)

例 1 讨论前所举数列(1)，(4)，(5)，(6)的极限

解 (1) 因为

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\frac{1}{n+1}$$

当 n 充分大时，$\frac{1}{n+1}$ 小于任何预先给定的正数，并且可以小到任意的程度，因此该数列的极限为 1，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

(4) 因为

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}$$

当 n 充分大时，$\frac{1}{n}$ 可以小于预先给定的任意小的正数，所以该数列极限为 0，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

(5) 同理可知数列 $\left\{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right\}$ 的极限为 0，即

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=0$$

(6) 因为

$$|a-a|=0$$

也就是说在项数 n 无限增大的过程中，数列 $\{a\}$ 每一项与常数 a 差的绝对值恒为 0，

当然小于预先给定的任意小的正数．所以数列 $\{a\}$ 的极限是 a，即

$$\lim_{n\to\infty}a=a$$

例 2 讨论数列(2)，(3)的极限

解 (2) 从数列(2)可以看出，当项数 n 无限增大时，数列 $\{2n-1\}$ 各项的值也无限地增大，不趋于任一确定的常数，所以