

高等学校试用教材

控制工程基础

东北重型机械学院 王益群 主编
西安交通大学 阳含和

机械工业出版社

高等学校试用教材

控制工程基础

东北重型机械学院 王益群 主编

西安交通大学 顾含和



机械工业出版社

(京) 新登字054号

本书主要介绍工程上广为应用的经典控制论中信息处理和系统分析与综合的方法。内容包括控制系统的数学模型、频率特性、稳定性分析、瞬态响应、误差分析、控制系统的综合与校正,同时还介绍了根轨迹法和时延系统、非线性系统等。对现代控制理论的基本概念和分析方法作简要介绍。在阐述上注意深入浅出,精讲多练,简洁实用。每章附有例题和习题。

控 制 工 程 基 础

东北重型机械学院 王益群 主编
西安交通大学 阳含和

责任编辑:孙祥根 张一萍 责任校对:韩 晶
责任印制:王国光 版式设计:罗文莉

机械工业出版社出版(北京阜成门外百万庄南街一号)

(北京市书刊出版业营业许可证出字第117号)

北京市密云县印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

开本 $787 \times 1092^{1/16}$ · 印张 $15^{3/4}$ · 字数 387千字

1983年11月北京第1版·1994年10月北京第3次印刷

印数: 5 001—8 200 · 定价: 9.50元

ISBN 7-111-01780-3/TH·302(课)

前 言

根据全国高等学校工科机电类1986~1990年教材编审、出版规划,全国流体传动及控制教材编审组于1983年12月和1984年12月先后两次在西安开会,起草并通过了本教材的教学大纲。1986年10月在南京召开的流体传动及控制专业教材编审组会议上,根据加强基础、增强适应性的精神,对本教材的编写内容又作了进一步讨论。本教材就是按照上述会议所通过的大纲,结合作者多年的教学实践编写而成的。

本书以介绍工程上广为应用的经典控制论为主,以期读者能够学会信息的处理和系统的分析与综合,为学习专业课程和进一步学习控制理论打下基础。鉴于频域法是经典控制论的核心,故在阐述上以频域分析法为主线展开,同时还介绍了瞬态分析法、根轨迹法、控制系统的非线性分析等,力求重点突出,又能使读者对经典控制论有较全面的了解。考虑时延环节在工程上广泛存在,故增加一章介绍时延控制系统分析。又因多数院校在大学本科教学中现代控制理论未单独设课,故又增加现代控制理论概述这一章,凡有*号的章节,属加深拓宽的内容,各校可视具体情况进行适当增减。

在论述上力求做到概念准确,层次清晰,深入浅出,精讲多练,适当结合机、电、液方面编入一些易于理解的例题和一定数量的习题,以加深对基本概念的理解。本书适于作流体传动及控制专业及其他机械类专业的教材,也可供有关科技人员参考。

本书由东北重型机械学院(秦皇岛分校)王益群教授和西安交通大学 阳含和 教授主编。阳含和 教授生前对本书的编写大纲提出过精辟、有益的见解。参加编写工作的有东北重型机械学院(秦皇岛分校)王益群(第三章、第四章、第八章、附录)、李久彤(第五章、第六章)、韩德才(第九章、第十章、第十一章);西安交通大学杨公仆(第一章、第七章)、王馨(第二章)。

本书由东北工学院周士昌教授主审。1988年8月在秦皇岛燕山大学(东北重型机械学院分校)召开了审稿会,东北工学院、北京理工大学、太原工业大学、甘肃工业大学、沈阳工业大学的代表参加了会议并提出许多宝贵意见。燕山大学徐征明教授审阅了本书的部分章节,编者和宋维公教授进行过讨论,祁晓野同志在计算机应用方面给予了积极的帮助。在此,对上述单位及有关人员一并表示衷心感谢。

由于编者水平有限,缺点和错误在所难免,恳请广大读者批评指教。

编 者

1988年10月

目 录

第一章 绪论	1
§ 1-1 “控制工程”的基本含义	1
§ 1-2 工程系统中信息传递、反馈以及反馈控制的概念	1
§ 1-3 工程中的闭环系统示例以及闭环控制系统的构成	3
第二章 控制系统的数学模型	6
§ 2-1 拉氏变换	6
§ 2-2 控制系统的微分方程及线性化方程	15
§ 2-3 传递函数的概念及基本环节的传递函数	19
§ 2-4 系统方块图及其传递函数	22
§ 2-5 信号流图及梅逊公式	27
习题	32
第三章 控制系统的频率特性	35
§ 3-1 频率特性的基本概念	35
§ 3-2 频率特性表示法	38
§ 3-3 闭环系统的频率特性	53
§ 3-4 频率特性的识别	62
§ 3-5 综合练习	71
习题	73
第四章 控制系统的稳定性分析	76
§ 4-1 控制系统稳定性的基本概念	76
§ 4-2 罗斯-赫尔维茨稳定判据	78
§ 4-3 奈魁斯特稳定判据	83
§ 4-4 对数判据	91
§ 4-5 系统稳定性储备	92
习题	96
第五章 控制系统的瞬态响应	98
§ 5-1 概述	98
§ 5-2 一阶系统的瞬态响应	101
§ 5-3 二阶系统的瞬态响应	104
§ 5-4 高阶系统的瞬态响应	110
§ 5-5 系统的瞬态响应和频率响应之间的关系	115
习题	119
第六章 误差分析	121
§ 6-1 误差与稳态误差	121
§ 6-2 系统的类型和无差度	124
§ 6-3 静态误差系数	126
§ 6-4 动态误差系数	130
§ 6-5 综合练习	132

习题	134
* 第七章 线性时延系统的分析	137
§ 7-1 有时延环节的线性控制系统	137
§ 7-2 有时延的线性控制系统的稳定性分析	137
习题	143
第八章 控制系统的综合与校正	144
§ 8-1 概述	144
§ 8-2 串联校正	147
§ 8-3 反馈校正(并联校正)	168
§ 8-4 顺馈校正	174
习题	180
第九章 根轨迹法	182
§ 9-1 根轨迹的基本概念及绘制规则	182
§ 9-2 用根轨迹法分析控制系统	190
• § 9-3 用根轨迹法设计控制系统	191
习题	195
* 第十章 非线性控制系统	197
§ 10-1 概述	197
§ 10-2 描述函数法及典型非线性的描述函数	200
§ 10-3 非线性系统的描述函数分析	207
习题	216
* 第十一章 现代控制理论概述	218
§ 11-1 引言	218
§ 11-2 状态空间法	218
§ 11-3 线性定常系统的可控性与可观性	230
§ 11-4 基于二次型性能指标的最优控制	235
习题	239
附录 I 典型环节(机、电、液)	241
附录 II 机械网络的传递函数	242
附录 III 电气校正网络	244
参考文献	248

第一章 绪 论

§1-1 “控制工程”的基本含义

控制工程是一门研究“控制论”在工程中的应用的科学。

控制论是第二次世界大战中，在电子技术、武器火力控制技术、航空自动驾驶等科学技术，以及大战后在生产自动化、电子计算机的实践基础上总结有关学科的成果而形成的。实践证明，它不仅具有重大的理论意义，而且对生产力的发展、生产率的提高、尖端技术的研究与尖端武器的研制，以及对社会管理的某些方面都发生了重大的影响。

1948年维纳发表《控制论——关于动物和机器中控制和通讯的科学》一文奠定了控制论的基础。维纳发现，机器系统、生命系统甚至社会和经济系统都有一个共同特点，即通过信息的传递，加工处理和反馈来进行控制。这就是控制论的中心思想。因此，控制论在它建立后很短时期内便迅速地渗透到许多科学技术领域，除生物科学外，还有许多工程科学技术及其它科学技术，如经济管理和社会管理等，从而大大推动了近代科学技术的发展，并派生出许多新型的边缘学科。例如，生物控制论——运用控制论研究生命系统的控制与信息处理；经济控制论——研究经济计划、财贸信贷等经济活动及其控制；社会控制论——运用控制论研究社会管理及社会服务等。最后，还有工程控制论——控制论与工程技术的结合。此外，还有仿生学、系统工程等等。

现代工业生产趋向于实现最佳控制，亦即要求利用最少的能源和原材料消耗、最低成本，以取得最大的生产成效、最高的生产率、最好的产品质量等等。因此，在能源、国防、运输、机械、化工、轻工等各个工业生产领域中，都对控制工程提出了范围极大、内容极其深刻而复杂的理论性问题，促使控制工程不断向更深入的方向发展。

在工业生产以及交通运输等领域中，机械系统、电气系统和液压系统都被广泛采用，而且常常互相渗透，相互配合，向着机电液一体化发展，有力地促进了自动化水平的提高，这就需要结合机电液系统阐述工程上共同遵循的基本控制规律，即“控制工程基础”。

控制理论按其发展的进程和研究方法，可分经典控制理论和现代控制理论。经典控制理论以传递函数为基础，研究单输入、单输出一类控制系统的分析和设计问题。现代控制理论以状态空间法为基础，研究多输入、多输出、变参数、高效能等控制系统的分析和设计问题。计算机的发展大大推动了现代控制论的发展，但是，必须指出经典控制论在实际工程中仍是极为重要的，相当多的工程问题用它解决仍然非常有效，并且现代控制论是从经典控制论中蜕变出来的，因之，本书将主要介绍经典控制理论。

§1-2 工程系统中信息传递、反馈以及反馈控制的概念

控制论的一个极其重要的概念就是信息的传递、反馈以及利用反馈进行控制的概念，任何工程系统中都存在信息的传递与反馈，并可利用反馈进行控制，以使系统按一定的“目的”

进行运动。在科学史上，控制论和信息论第一次把所有能表达一定含义的信号、密码、情报和消息概括为信息的概念，把它视为和能量与质量同等重要的科学概念，并从量上揭示了不同系统关于信息加工与控制过程的共同规律。

所谓信息的反馈，就是把一个系统的输出信号（或作用）不断地直接或经过中间变换传递后全部或部分地返回，再输入到系统中去。如果反馈信号（或作用）与原系统的输入信号（或作用）的方向相反，则称为“负反馈”；如果方向相同，则称之为“正反馈”。

人类最简单的活动，如走路、取物等，都是利用了反馈控制的原理，才得以保持正常准确的动作。例如，人伸手取物时，手相对于待取物的位置以及速度等信息不断地反馈到大脑，以保证准确而适当地趋近并抓住待取之物。其它动物也是一样，并且在一切生物系统、社会及经济系统也都存在着或利用着上述反馈控制的作用，以维持正常的机能。

人们早就知道利用反馈控制原理设计和制造仪表、机器或其它工程系统。我国早在北宋时代（约在1086~1089年）就发明了具有反馈控制原理的自动调节系统——水运仪象台。通常我们把具有反馈回路的系统称为“闭环系统”，把没有反馈回路的系统称为开环系统。例如，我们日常使用的最简单的贮水槽液面自动调节器（图1-1 a）就是一个简单的闭环系统。浮子测出液面实际高度 h 与要求高度 H_0 之差，并推动杠杆控制进水阀门放水，直到实际液面高度 h 与要求液面高度 H_0 相等时，关闭进水阀。其中信息的传递关系可用图1-1 b表示。这里作为反馈信息的是实际液面高 h ，它与期望液面高 H_0 相比较而形成一个闭环系统。

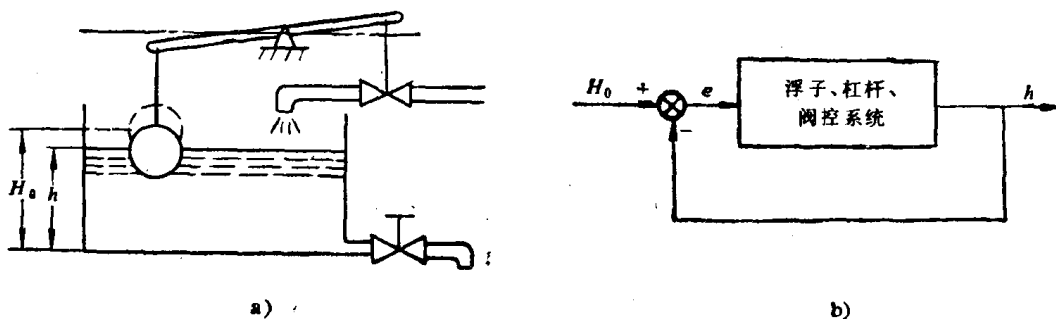


图1-1 贮水槽液面自动调节系统

直接取自输出端的反馈叫主反馈。除主反馈外，有些系统还存在局部反馈，这往往是为了对系统进行补偿而设计的。应当指出，有些反馈信号并非人为的，而是元件或系统中存在着相互耦合作用而构成的固有反馈，即内在反馈。例如，机械系统中作用力与反作用力相互耦合而形成内在反馈。又如在金属切削加工过程中有自激振动产生时，则必定存在内在反馈，使能量在内部循环，使振动持续进行。这样的例子举不胜举。

为了说明内在反馈的意义，观察图1-2 a所示的具有二个自由度的机械系统。从表面上看，它是一个开环系统。但是，当我们把它的动态微分方程列出后，可知它存在着内在反馈。当给予质量 m_2 一个小位移 x_2 后，质量 m_1 也产生一个位移 x_1 。其动力方程为

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 = k_2 x_2 \quad (1-1)$$

而质量 m_2 受到 x_1 的反作用后，动力方程为

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 = k_2 x_1 \quad (1-2)$$

信息量 x_1 与 x_2 的传递关系式(1-1)及(1-2)可以表示为图1-2 b所示的闭环系统。

由于有反馈，闭环系统的精确度及灵敏度都比开环系统要高得多。但另一方面，它却也

孕育着不稳定的因素，即系统在一定条件下，会发生持续的或扩散的振动。控制工程的一个重要内容，就是运用控制论有关的系统稳定性理论，研究工程系统的运动稳定性问题。

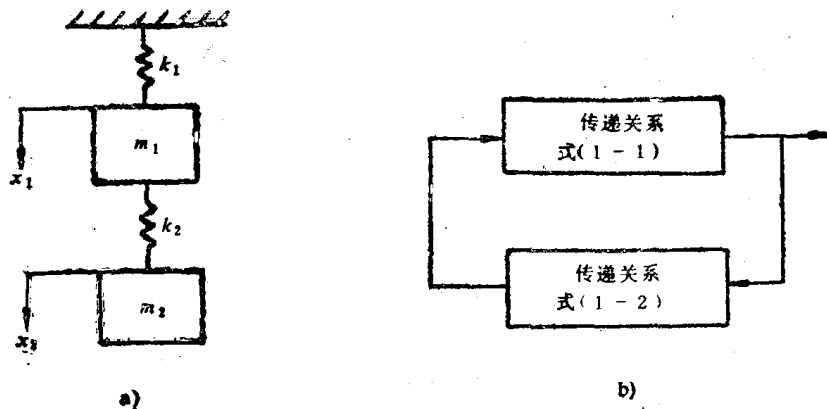


图1-2 两个自由度的机械系统

§1-3 工程中的闭环系统示例以及闭环控制系统的构成

在工业中，应用反馈控制原理控制一个系统，以使其按一定的规律运行的实例是非常多的。控制对象可以是一个机械实体（例如，机床工作台、轧钢机的轧辊、炮身或火箭体等等），也可以是一个生产过程（例如，切削过程、锻压过程或冶炼过程等等）。

图1-3所示为一台反馈控制的液压压下板带轧机原理图。由于板带轧制的速度和精度要求愈来愈高，现代化轧机的压下机构已经由电液伺服系统代替了旧式的机械式压下机构。图中，板带出口厚度信息 h 或工作辊辊缝信息 h_0 （或者 h_0 与 h 两者同时）由检测元件3测出并反馈到电液伺服系统2中，发出控制信号以驱动油缸1，从而调节轧制辊缝 h_0 ，使得板带出口厚度 h 保持在要求的公差范围内。

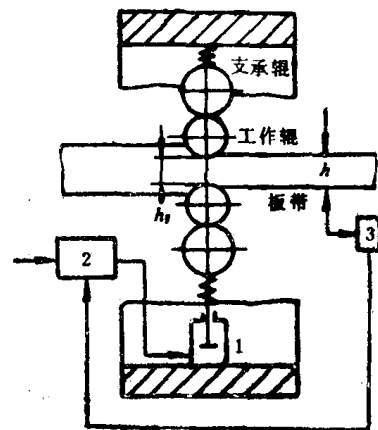


图1-3 板厚控制简图

图1-4 a 所示为一个薄膜反馈式径向静压轴承。当轴受到负荷 W 后产生偏移量 e ，因而使下油腔压力 p_2 增加 Δp ，而上油腔压力 p_1 则减少 Δp 。这样，与之相通的薄膜反馈机构的下油腔压力和上油腔压力亦分别增加和减少 Δp ，从而使薄膜发生向上弯曲变形。因此薄膜下半部高压油输入轴承的流量增加，而上半部减少，使轴承下部油腔产生反作用力 F （ F 正比于压力差 $2\Delta p$ ），与负荷 W 相平衡，以减小或完全消除偏移量 e 。上述有关静压轴承内部信息的传递关系可如图1-4 b 那样表示为一个闭环系统。应用控制论中有关动态特性分析的理论，即可对该种轴承的设计与分析提供更为有效的途径。

图1-5 a 所示为闭环速度控制系统的原理图；图1-5 b 为其方块图。液压马达驱动负载运动（旋转），测速发电机测出实际转速并将此信号反馈到输入端，以与给定信号（即控制信号）作比较而得到误差信号。电液伺服阀即根据此误差信号，提供一定的流量给液压马达，使之驱动负载按指令的规律而运动。

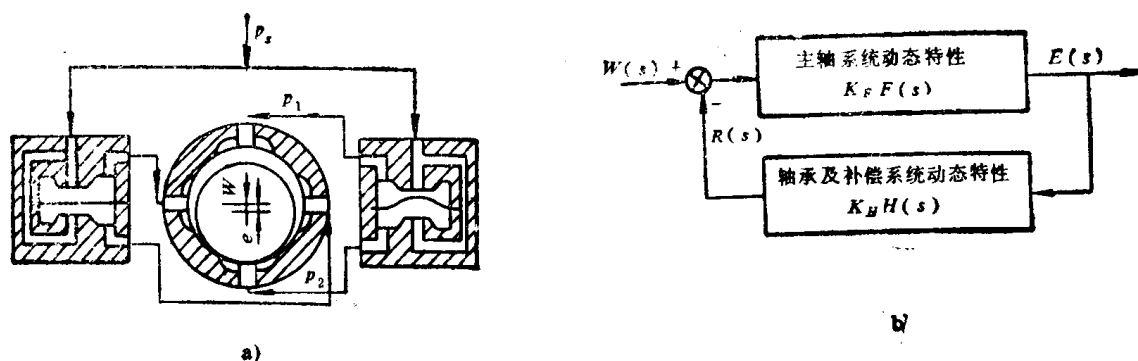


图1-4 静压轴承简图

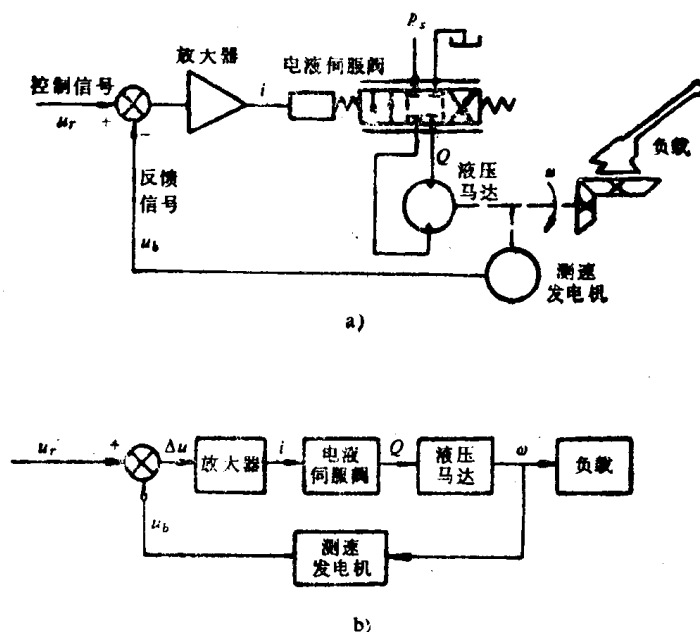


图1-5 速度控制系统

由以上几个例子可以看出：任何闭环控制系统的基本构成均可表示为图 1-6 所示的方块图。其中，被控制的对象如图 1-3 中的轧辊、图 1-4 中的轴、或图 1-5 中的负载（炮塔）。它的输出量即为系统的被控制量或输出量。控制器（控制装置）则由放大、能量变换、执行等元件所组成。例如，电液伺服阀就是一种兼有变换和放大作用的、根据弱电信号来控制驱动元件（例如液压马达）的装置。检测反馈装置的作用是测出被控制量（输出量）的实际值，并转换成反馈信号。这种反馈信号可以是被控制量本身，也可以是它的函数或导数。但无论如何，反馈信号应与控制输入信号属于同一种能量形式，才能进行比较。比较元件是将控制输入和反馈信号进行比较，以产生偏差信号。

近年来，随着科学技术的飞速发展，生产中对于改进产品质量、降低生产成本、改善劳动条件以及提高劳动生产率等方面的要求日益提高。在这种形势下，大多数工程技术人员都必须具备一定的控制工程方面的知识。这至少是为了以下两个目的：（1）对生产过程中所存在的问题，能够以系统的，而不是孤立的、相互割裂的观点；以动态的，而不是静态的观点和思想方法进行科学分析，以找出问题的本质和有效的解决办法；（2）知道如何控制一个系统，使之按预定的规律运动，以达到预定的技术经济指标，为实现最佳控制打下基础，可以肯

定，随着工农业生产和科学技术的不断发展，控制工程这门科学也一定能够迅速发展，并对我们实现四个现代化，早日把我国建设成为强大的社会主义国家起重要作用。

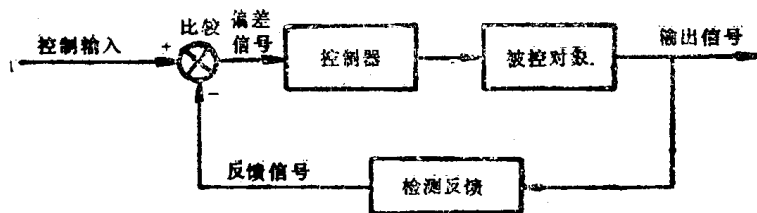


图1-6 闭环系统的构成方块图

第二章 控制系统的数学模型

§2-1 拉氏变换

一、拉氏变换及其特性

(一) 拉氏变换的定义

时间函数 $f(t)$, 当 $t < 0$ 时, $f(t) = 0$, $t \geq 0$ 时, $f(t)$ 的拉氏变换记为 $L[f(t)]$ 或 $F(s)$, 且定义为:

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (2-1)$$

式中 $s = \sigma + j\omega$

若式 (2-1) 的积分收敛于一确定值, 则函数 $f(t)$ 的拉氏变换 $F(s)$ 存在, 这时 $f(t)$ 必须满足:

- (1) 在任一有限区间内, $f(t)$ 分段连续, 只有有限个间断点。
- (2) 当时间 $t \rightarrow \infty$, $f(t)$ 的增长速度不超过某一指数函数, 即满足:

$$|f(t)| \leq Me^{at} \quad (2-2)$$

式中 M, a ——实常数。

在复平面上, 对于 $\text{Res} > a$ 的所有复数 s (Res 表示 s 的实部) 都使方程 (2-1) 的积分绝对收敛, 故 $\text{Res} > a$ 为拉氏变换的定义域。

例2-1 单位阶跃函数的拉氏变换。单位阶跃函数定义为

$$1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

如图2-1 a 所示。

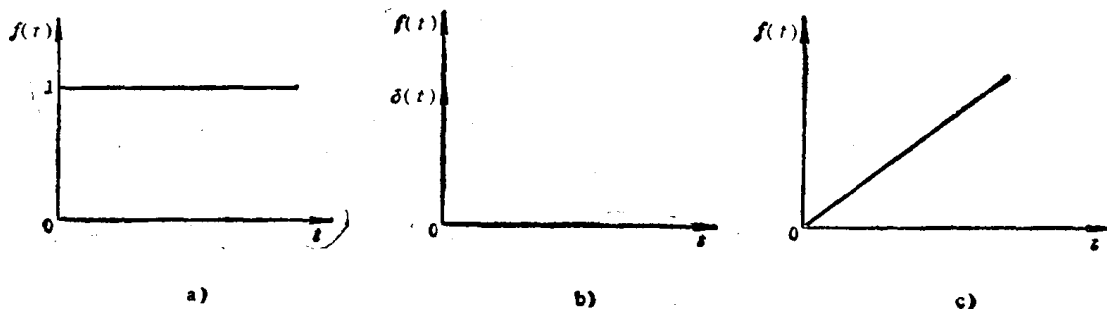


图2-1 函数图象

a) 单位阶跃函数 b) 单位脉冲函数 c) 单位斜坡函数

由式 (2-1) 可求得

$$L[1(t)] = \int_0^{\infty} 1(t) e^{-st} dt = \left. -\frac{e^{-st}}{s} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

例2-2 单位脉冲函数的拉氏变换：单位脉冲函数 $\delta(t)$ 如图2-1 b 所示，定义为

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

而且 $\delta(t)$ 有如下特性

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$$

式中 $f(0)$ —— $t = 0$ 时刻的 $f(t)$ 的函数值。

根据式 (2-1) 求得 $\delta(t)$ 的拉氏变换为

$$L[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-st} \Big|_{t=0} = 1$$

例2-3 单位斜坡函数的拉氏变换。单位斜坡函数如图2-1 c 所示，定义为

$$t = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}$$

$$L[t] = \int_0^{\infty} t e^{-st} dt = -t \frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left(-\frac{e^{-st}}{s} \right) dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{s} dt = -\frac{1}{s^2} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s^2}$$

常用函数的拉氏变换列于表2-1。

表2-1 拉氏变换对照表

	$f(t)$	$F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$I(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
5	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
6	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
7	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
8	$t^n (n=1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
9	$t^n e^{-at} (n=1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	$\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
11	$\frac{1}{b-a} (be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$

(续)

	$f(t)$	$F(s)$
12	$\frac{1}{ab} \left[1 + \frac{1}{a-b} (be^{-at} - ae^{-bt}) \right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
13	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
14	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
15	$\frac{1}{a^2} (at - 1 + e^{-at})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
16	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$
17	$\frac{-1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin (\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t - \phi)$ $\phi = \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$	$\frac{s}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$
18	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin (\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t - \phi)$ $\phi = \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2)}$

(二) 拉氏变换的特性

1. 线性性质

拉氏变换是一个线性变换, 若有常数 k_1 、 k_2 , 函数 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$, 则:

$$L[k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)] = k_1 L[f_1(t)] + k_2 L[f_2(t)] = k_1 F_1(s) + k_2 F_2(s) \quad (2-3)$$

这可由拉氏变换的定义直接求证。

2. 实数域的位移定理

设 $f(t)$ 的拉氏变换为 $F(s)$, 对任一正实数 a 有

$$L[f(t-a)] = e^{-as} F(s) \quad (2-4)$$

式中 $f(t-a)$ ——函数 $f(t)$ 的时延函数, 时延时间为 a , 如图2-2所示。

证明:

$$\begin{aligned}
 L[f(t-a)] &= \int_0^{\infty} f(t-a) e^{-st} dt \\
 &= \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s(\tau+a)} d\tau \quad (t-a=\tau) \\
 &= e^{-as} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\
 &= e^{-as} F(s)
 \end{aligned}$$

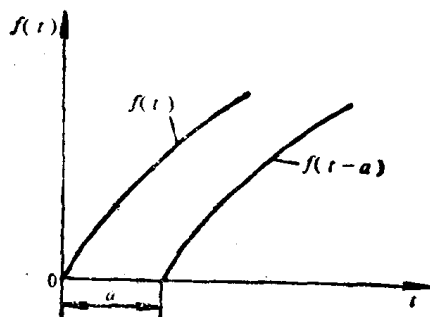


图2-2 时延函数

3. 复数域的位移定理

$f(t)$ 的拉氏变换为 $F(s)$, 对任一常数 a (实数或复数) 有

$$L[e^{-at} f(t)] = F(s+a) \quad (2-5)$$

证明:

$$L[e^{-at} f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-at} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(s+a)t} dt = F(s+a)$$

4. 相似定理

$f(t)$ 的拉氏变换为 $F(s)$, 有任意常数 a , 则

$$L[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (2-6)$$

证明

$$\begin{aligned} L[f(at)] &= \int_0^{\infty} f(at) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-\left(\frac{s}{a}\right)\tau} \frac{1}{a} d\tau \quad (at = \tau) \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-\left(\frac{s}{a}\right)\tau} d\tau = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \end{aligned}$$

5. 微分定理

设 $f^{(n)}(t)$ 表示 $f(t)$ 的 n 阶导数, $n = 1, 2, \dots$ 正整数, $f(t)$ 的拉氏变换为 $F(s)$, 则

$$L[f^{(1)}(t)] = sF(s) - f(0^+) \quad (2-7)$$

式中 $f(0^+)$ 表示当 $t \rightarrow 0^+$ 时的 $f(t)$ 值。

证明 根据分部积分法

$$\int u dv = uv - \int v du$$

令 $e^{-st} = u$, $f(t) = v$, $dv = f^{(1)}(t) dt$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad L[f^{(1)}(t)] &= \int_0^{\infty} f^{(1)}(t) e^{-st} dt = e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) (-se^{-st}) dt \\ &= s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt - f(0^+) = sF(s) - f(0^+) \end{aligned}$$

可进一步推出 $f(t)$ 的各阶导数的拉氏变换为

$$L[f^{(2)}(t)] = s^2 F(s) - sf(0^+) - f^{(1)}(0^+) \quad (2-8)$$

$\vdots$

$$\begin{aligned} L[f^{(n)}(t)] &= s^n F(s) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f^{(1)}(0^+) \dots \\ &\quad - sf^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+) \end{aligned} \quad (2-9)$$

式中 $f^{(i)}(0^+)$ ($0 < i < n$) —— $f(t)$ 的第 i 阶导数当 $t \rightarrow 0^+$ 时的取值。

6. 积分定理

$f(t)$ 的拉氏变换为 $F(s)$, 则

$$L\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s} f^{(-1)}(0^+) \quad (2-10)$$

式中 $f^{(-1)}(0^+)$ —— $\int_0^t f(t) dt$ 当 $t \rightarrow 0^+$ 时的值。

证明 由分部积分公式得

$$dv = e^{-st} dt, \quad u = \int_0^t f(t) dt$$

$$v = -\frac{1}{s} e^{-st}, \quad du = f(t) dt$$

$$\begin{aligned}
L\left[\int_0^t f(t)dt\right] &= \int_0^\infty \left[\int_0^t f(t)dt\right] e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \int_0^t f(t)dt \Big|_0^\infty \\
&\quad - \int_0^\infty \left[-\frac{1}{s} e^{-st}\right] f(t)dt = \frac{1}{s} F(s) + \frac{1}{s} \left(\int_0^t f(t)dt\right) \Big|_{t=0^+} \\
&= \frac{1}{s} F(s) + \frac{1}{s} f^{(-1)}(0^+)
\end{aligned}$$

依次可推导出

$$L\left[\int_0^t \int_0^t f(t)(dt)^2\right] = \frac{1}{s^2} F(s) + \frac{1}{s^2} f^{(-1)}(0^+) + \frac{1}{s} f^{(-2)}(0^+) \quad (2-11)$$

⋮

$$\begin{aligned}
L\left[\int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t f(t)(dt)^n\right] &= \frac{1}{s^n} F(s) + \frac{1}{s^n} f^{(-1)}(0^+) + \frac{1}{s^{n-1}} f^{(-2)}(0^+) \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{s} f^{(-n)}(0^+)
\end{aligned} \quad (2-12)$$

式中 $f^{(-1)}(0^+)$ 、 $f^{(-2)}(0^+)$... $f^{(-n)}(0^+)$ —— $f(t)$ 的积分及其各重积分在 $t \rightarrow 0^+$ 时的取值。

7. 初值定理

设 $f(t)$ 及其一阶导数均为可拉氏变换的, 则 $f(t)$ 的初值为

$$f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (2-13)$$

证明 由微分定理得知

$$\int_0^\infty f^{(1)}(t) e^{-st} dt = sF(s) - f(0^+)$$

令 $s \rightarrow \infty$, 对上式两边取极限

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left[\int_0^\infty f^{(1)}(t) e^{-st} dt \right] = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0^+)]$$

当 $s \rightarrow \infty$ 时, $e^{-st} \rightarrow 0$, 则

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0^+)] = 0$$

即

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$$

8. 终值定理

设 $f(t)$ 及其一阶导数均为可拉氏变换的, 则 $f(t)$ 的终值为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (2-14)$$

证明 由微分定理

$$\int_0^\infty f^{(1)}(t) e^{-st} dt = sF(s) - f(0^+)$$

令 $s \rightarrow 0$, 对上式两边取极限

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left[\int_0^\infty f^{(1)}(t) e^{-st} dt \right] = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0^+)]$$

上式左边

$$\begin{aligned}\lim \left[\int_0^{\infty} f^{(1)}(t) e^{-st} dt \right] &= \int_0^{\infty} f^{(1)}(t) \lim_{s \rightarrow 0} e^{-st} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f^{(1)}(t) dt \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t d[f(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} [f(t) - f(0^+)]\end{aligned}$$

与前式右边比较, 消去 $f(0^+)$ 可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

注意: 终值定理不适用于周期函数, 如正弦函数 $\sin \omega t$ 等, 因为周期函数没有终值。

9. $tf(t)$ 的拉氏变换:

$$L[tf(t)] = -\frac{d}{ds} F(s) \quad (2-15)$$

证明 因为

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

对上式两边微分得

$$-\frac{d}{ds} F(s) = \int_0^{\infty} f(t) (-t) e^{-st} dt = - \int_0^{\infty} tf(t) e^{-st} dt = -L[tf(t)]$$

10. $\frac{f(t)}{t}$ 的拉氏变换

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} F(s) ds \quad (2-16)$$

证明

$$\begin{aligned}\int_s^{\infty} F(s) ds &= \int_s^{\infty} \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt ds = \int_0^{\infty} f(t) dt \int_s^{\infty} e^{-st} ds \\ &= \int_0^{\infty} f(t) dt \left[-\frac{1}{t} e^{-st} \right]_s^{\infty} = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt = L\left[\frac{f(t)}{t}\right]\end{aligned}$$

11. 卷积定理

设 $F(s) = L[f(t)]$; $G(s) = L[g(t)]$

$$\text{则 } L\left[\int_0^t f(t-\lambda) g(\lambda) d\lambda\right] = F(s) G(s) \quad (2-17)$$

式中, 积分 $\int_0^t f(t-\lambda) g(\lambda) d\lambda = f(t) * g(t)$ 称作 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的卷积。

令 $t - \lambda = \tau$, 则

$$\int_0^t f(t-\lambda) g(\lambda) d\lambda = -\int_t^0 f(\tau) g(t-\tau) d\tau = \int_0^t f(\lambda) g(t-\lambda) d\lambda$$

则 $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$

证明 为了证明卷积定理, 引入图2-3所示的阶跃函数 $1(t-\lambda)$

$$f(t-\lambda) 1(t-\lambda) = \begin{cases} 0 & t < \lambda \\ f(t-\lambda) & t > \lambda \end{cases}$$

$$\text{则 } \int_0^t f(t-\lambda) g(\lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} f(t-\lambda) 1(t-\lambda) g(\lambda) d\lambda$$

对上式求拉氏变换