理 论 力 学

（上）

朱照宣 周起钊 殷金生 编

北京大学出版社

理 论 力 学（上）

北京大学出版社出版
（北京大学校内）
北京新华印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行
850×1168毫米 32开本 12.5 ·印张 313千字
1982年2月第一版 1982年2月第一次印刷
印数：40000册

统一书号：13209·30 定价：1.50元

内 容 提 要

本书前七章是基础部分，包括静力学、运动学、质点和质点系动力学；后三章是专题部分，其中包括分析力学初步。共配有二百多个例题，五百多道习
并附有答案。全书需两学期或三学期讲完。

本书可供综合大学或理工科大学力学专业理论力学课程用作教材，也可作为高等工业院校有关专业的教学参考书。

符 号 表

$\boldsymbol{a}$ 加速度

$\boldsymbol{b}$ 副法向单位向量

C 质心，重心，阻力系数

c 光速，阻尼系数

E 总机械能

e 偏心率，偏心距，碰撞恢复系数

$\mathbf{e}$ 向量基$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$

$\boldsymbol{F}$ 力

f 摩擦力，频率

$\boldsymbol{G}$ 动量矩

g 重力加速度

$\mathbf{H}$ 拉梅系数矩阵

H 哈密顿函数

$\mathbf{I}$ 单位矩阵

$\boldsymbol{I}$ 冲量

$\mathbf{i}$ 正交单位向量基$(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$

$\mathbf{J}$ 惯量张量，惯量矩阵

k 弹性系数，回转半径

$\boldsymbol{L}$ 主矩

L 拉格朗日函数

M，m 质量

$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})$ 力$\boldsymbol{F}$对O点的矩

$\boldsymbol{N}$ 正压力，约束力

$\boldsymbol{n}$ 法向单位向量

$\mathbf{P}$ 变换矩阵

$\boldsymbol{p}$ 动量

p 正焦弦

$\mathbf{Q}$ 正交变换矩阵

Q 广义力

(q_1,q_2,q_3) 曲线坐标

$\boldsymbol{R}$ 主向量

$\boldsymbol{r}$ 向径

s 弧长

T 动能，绳中张力，振动周期，矩阵转置符号

U 有效势能

V 势能，体积

$\boldsymbol{v}$ 速度

W 功，重量

γ 万有引力常数，重度

δ 静伸长，δ函数

$\boldsymbol{\varepsilon}$ 角加速度

ε 摩擦角

λ 特征值，纬度，不定乘子

μ 摩擦系数，流体粘度，折合质量

ρ 密度，极坐标

$\boldsymbol{\tau}$ 切向单位向量

τ 特征时间

ψ, θ, φ 欧拉角

$\boldsymbol{\omega}$ 角速度矩阵

$\boldsymbol{\omega}$ 角速度

ω 角速度，(圆)频率

下 标 符 号

a 绝对的

c 科氏的

e 牵连的

max 极大

min 极小

r 相对的

编 者 的 话

理论力学是力学专业的一门基础课，本书是作为这门课的教材而编写的。与数学、物理类同一课程的教材相比，注意了应用方面，并将静力学和运动学单独成章；与工科的理论力学教材相比，则又注意了理论深度，在部分章节使用了矩阵工具。书中通过具体例子介绍了力学工作中的一些方法，诸如选取力学模型、量纲和数量级分析、近似计算和逐次逼近法、数学结果的物理解释等。

北京大学力学专业自1952年成立以来，周培源、吴林襄等许多同志讲授过理论力学这门课程，积累了不少教学经验，编者力图在书中吸收这些经验。另外，编者也考虑了工科理论力学教学中的一些特点，以便本书能适合工科教学中的参考。

本书分上下两册，共十章。前七章包括静力学、运动学以及质点动力学、质点系动力学的几个基本定理，它们组成课程的基本部分；以后的三章则带有专题的性质。在讲授时教师可根据需要和学时数省略某些章节。考虑到力学专业基础课的特点，本书对分析力学只作初步介绍，对相对论力学基本上沒有提及。连续介质力学的共同理论基础应该属于理论力学的范围，但根据以往的习惯，暂时也沒有包括在内。

为了便于教学，书中有例题、思考题、习题和习题答案。例题并不全是示范性的习题，其中有的是为配合正文中某些概念而编写的，有的则本身也有一定的意义。

本书的油印稿曾在北京大学力学系1978和1979年两年入学的班级中用作教材。参加教学工作的教师叶以同、鲍慧芸、于年才、孟志华等同志指出了其中一些问题和错误；有些同学对习题作了校正；兄弟院校的一些同行也对油印稿提出了不少宝贵的意见。本书由丁中一、邱淑清和陈滨三位同志作了详细审校。编者谨对以上同志表示感谢。限于编者水平，定稿后遗留下的错误和问题一定还有，恳切希望读者指正。

编　者

1981年3月于北京大学

上 册 目 录

绪言 …… 1

第一章 静力学 …… 5

1-1 力、力系的主向量 …… 5
1-2 坐标变换和不变量 …… 10
1-3 力矩、力系的主矩 …… 18
1-4 等效力系 …… 24
1-5 力系的简化 …… 29
1-6 受力分析与简单的平衡问题 …… 39
1-7 平面力系的平衡 …… 52
1-8 空间力系的平衡 …… 61
1-9 摩擦 …… 66
1-10 绳索 …… 73
习题 …… 79

第二章 点的运动学 …… 101

2-1 参考系、速度、加速度 …… 102
2-2 直角坐标描述法 …… 113
2-3 极坐标和柱坐标描述法 …… 128
2-4 曲线坐标、球坐标描述法 …… 139
习题 …… 157

第三章 刚体运动和复合运动 …… 164

3-1 刚体的两种基本运动 …… 164
3-2 刚体的平面运动 …… 174
3-3 刚体的定点运动 …… 188
3-4 角速度向量、欧拉角 …… 196
3-5 刚体的一般运动 …… 209

3-6 复合运动 ……213
习题……226
第四章 质点动力学 ……241
4-1 牛顿定律 ……241
4-2 质点的运动微分方程 ……251
4-3 质点的一维运动 ……257
4-4 二维和三维运动 ……276
4-5 初积分和守恒定理 ……284
4-6 相平面方法 ……302
4-7 有心力运动 ……313
4-8 有约束时的运动 ……330
习题……346
习题答案 ……363
索引 ……380

绪　言

力学是研究物质机械运动规律的科学。物体的机械运动是指物体的空间位形随时间的变化，它包括移动、转动、流动和变形等等，也包括静止。静止或平衡是运动的一种特殊情况。“力学”在英语中叫 mechanics，起源于希腊文 $\mu\eta\chi\alpha\nu\eta$，有机械①或工具的意义；汉语中的“力学”一词字面上是力的科学，已沒有机械的意义了②。

机械运动是自然界最普遍、最基本的运动形态。在物质的复杂运动或高级运动形态中，如物理的、化学的、甚至是生物的运动形态中，都包含着机械运动的内容。力学的研究为揭示大自然中和机械运动有关的规律提供了有效的武器。研究天体的运行和演化需要天体力学、流体力学等的帮助；研究地幔、地壳的运动和发展需要地球构造动力学等的帮助；近年来，连生命现象中的力学问题也越来越受到重视，从而形成了“生物力学”这样的分支。至于物理学、化学等更是与力学有着密切的联系。力学本来是物理学的一个分支，后来才和物理学有了不同的分工。所以，力学是一门基础学科。

力学同时又是和工程技术联系极为广泛的一门技术学科，它是近代工程技术的重要理论基础之一。由于空气动力学的发展，才使现代航空航天技术有今天这样的水平；由于结构力学、弹性力学等的发展，使得大型建筑结构、重型机械设备的设计有了可

---

① 力学的，机械的在英语中都是mechanical.

② 西方的 mechanics 在十七世纪传入中国，译为“重学”，经历了二百多年，到十九世纪末才改叫“力学”，如我国最早的力学专著是李善兰（1810—1882）译的《重学》一书（1858年）.

靠的力学根据。其他如材料力学性能的研究促进了新型材料的创造和使用；地下渗流的研究有助于提高石油的开采效率等等。正因为这样，力学课程始终是各种工科专业的重要基础课程。

力学科学的发展始终是和人类的生产活动紧密联系的。在古代，人类就在农田灌溉、建筑、运输等方面逐渐积累了一些初步的力学知识。例如，在我国的墨翟（公元前468—382）及其学派的著作《墨经》里，就有了关于力、重心等概念的叙述，这可以说是世界上最早的有关力学的论述。古希腊的亚里士多德（公元前 384—322）、阿基米德（公元前 287—212）等也总结了不少关于杠杆平衡等力学规律。以后，人类在生产实践中不断地总结了一些动力学的规律，但比较零星和粗糙。力学作为一门“精确”科学，则是由牛顿（Newton, I., 1642—1727）奠基的。牛顿在他的名著《自然哲学的数学原理》[①] 中，系统地总结了那时所了解到的力学规律。在牛顿以后的二、三百年间，力学科学有了很大的发展，逐步地使力学成为一门精确的科学。

人类认识力学规律，同认识其他规律一样，是从实践出发，抽象上升为理性的认识，而后又在实践过程中进行检验，是一个由粗取精，由表及里的过程。就牛顿总结万有引力定律来说，它们是从开普勒（Kepler, J., 1571—1630）的行星规律和其他天文观测资料归纳出来的，而开普勒的定律则又是以哥白尼（Copernicus, N., 1473—1543）的工作和第谷·布拉赫（Tycho Brache 1546—1601）所积累的二十多年天文观测资料为依据的。没有这种第一性的资料，什么理论也不可能得到，而理论的正确与否，还得由实践来证明。例如，法国青年科学家勒威耶（Leverrier, U. J. J., 1811—1877）根据当时的资料，运用万有引力定律和微分方程，经过计算发现太阳系中除了七大行星外，还应该有一颗大行星（就是海王星），在1846年公布了他的结果。过后不久，果

① 1687年出版，原文是拉丁文，有郑太朴的汉译本《自然哲学之数学原理》，商务印书馆，1931年版.

然在他指出的方位上伽勒（Galle, J. G., 1812—1910）观测到了海王星。这就有力地证明了万有引力定律的正确性。

力学的研究需要实验、计算和理论三方面的配合。在探索力学规律时，无论在哪一方面，都需要精确地测量和计算（或者描述）力学量及其变化。这一特点决定了力学与数学之间有着密切的联系。比如弹性力学、流体力学的研究是和数学分析、微分方程的发展紧密相关的。现代电子计算机的出现，又为数学在力学中的应用提供了更好的工具，从而促进了力学理论的发展。我们在这门课程中所学的是一些成熟的、经典性的结果，着重于数学推理这一方面，但是应该牢记实践是检验眞理的唯一标准。力学理论是否正确，都得经过实验室中的实验，或对自然现象的直接观测，或在工业技术中的应用，归根到底都得经过实践的检验。

实际的研究对象往往是相当复杂的，但在力学的理论工作中，常常是抓住一些带本质性的主要因素，而撇开一些影响不大的次要因素，从而提炼出所谓**力学模型**作为研究的对象。当物体运动的范围比它本身的尺寸要大得多时，我们就把物体当作是只有质量而沒有大小的一个**质点**。任何固体在受到外力作用或溫度变化时都要变形，如果这种变形在我们所研究的问题中可以不考虑或者暂时不考虑，我们就把物体当作不可变形的**刚体**来处理。质点和刚体是两种最基本的力学模型。从原则上说，任何物体都可以认为是由许多质点组成的，即当作**质点系**来处理。比如刚体就是任意两点之间的距离保持不变的一个质点系。眞实的物体是由许多粒子（原子、分子等）组成的，但在力学中往往把物质或者材料当作连续分布的。如果物体中每一点的力学性能反映了这点附近千千万万个眞实粒子的平均性能，则这种物体就可以被当作连续体（continuum）。在分析流体（气体、液体）的流动，固体的变形时，往往采用连续体这种力学模型。对于一个眞实的物体采用什么样的力学模型，这决定于问题的性质。以地球为例，在考虑地球在太阳系中的运动轨道时，地球的大小（半径约为

6370公里）比其轨道半径的大小（半径为一个天文单位，即约1.5×10^8公里）要小得多，我们就可把地球理想化为一个质点。在研究人造卫星的运行轨道时，地球的大小就不能不考虑，但它的变形可忽略，于是把地球理想化为一个刚体（球，精确一些当作椭球体甚至更复杂的几何形状）。至于在考虑地震的起因或者地球的演化问题时，必须考虑地球本身各部分的变形和流动，那时通常采用连续体这样的力学模型。

理论力学研究关于质点、刚体、质点系和连续体等等力学模型的基本规律。本书只讲质点、刚体及质点系的一般力学规律，而不讨论连续体中的力学规律。在理论力学中所讲的力学规律，通常只限于以牛顿运动规律为根据的经典力学。它只考虑宏观的物体，而不考虑原子、电子等微观结构所遵循的量子力学规律，只考虑运动速度远远小于光速（3×10^8米/秒）的情况，而不考虑相对性效应。这样的理论对于解决自然界和工业技术中相当一部分问题是行之有效的，这已为无数的事实所证实。

作为一门基础课，学习理论力学务必在以下三个方面达到要求：准确地理解基本概念；熟悉基本定理与公式，并能在正确条件下灵活应用；最后是学会一些处理力学问题的基本方法。为了达到这一目标，就需要在钻研理论方面和解算例题与习题之间反复交替，使认识逐步深化。

第一章 静 力 学

静力学是力学中发展较早的一部分，它研究物体的静止和力系平衡的规律。任何静止和平衡都是相对的，即是相对于某一个**参考体**（也叫**参照体**）的。在静力学中所谓物体处于静止状态，通常是把地球当作一个参考体，而许多力的平衡就是指地球上静止的物体在附加上这些力后能够继续保持静止。我们把作用于同一个物体上的许多力叫做一个**力系**。在本章中我们要讨论物体（主要是质点和刚体）上力系的平衡条件，这就要先分析力系的特征以及研究力系的简化问题。

1-1 力、力系的主向量

力的概念来自实践。人类在最早的劳动中就使用体力①，《墨经》中把力说成物体由静止进入运动的原因："力,形之所以奋也"。这是人们早期对力的认识②。从现代科学看，力总是一个物体对另一个物体的作用，是造成运动变化的原因。在宏观表现上，这种力可以是超距离的，也可以是由接触而产生的。一个物块放在桌子上，物块受到地球的引力（也就是重力）的作用，这是一个超距离的力。物块受到桌面的托力，这是一个由接触产生的力。

为了要确定一个力，必须说明它的**大小**、**方向**和**作用点**，即一个力有三个要素。实践证明，力是可以按照**平行四边形法**则进

① 力的篆文是𠠲．有人研究，它象形手臂（右臂）向下用劲（见丁福保《说文诂林》）．

② 在古代的欧洲，人们普遍地认为力是造成速度的原因，物体不受力就没有速度．这种错误的认识以当时著名学者亚里士多德为代表．到了伽里略和牛顿时代人们才建立起正确的认识．

行合成的。就是说，如果有两个力作用在一个物体的同一点M上(图1.1)，其大小和方向分别由有向线段$\overrightarrow{MA}$和$\overrightarrow{MB}$表示，则这两个力和另外一个力对物体的作用效果是一样的：这个力的作用点也在M点，其大小和方向由有向线段$\overrightarrow{MC}$表示，而MC是平行四边形$MACB$的对角线。这样，我们就简单地说两个力合成了一个力。有大小，有方向，且满足以平行四边形法则作加法的物理量是向量或矢量①。因此，力是向量。向量用黑斜体字母表示，如$\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{p}$ 等，或在字母上加箭头，如$\vec{F}$, $\vec{R}$等。零向量用$\mathbf{0}$表示。

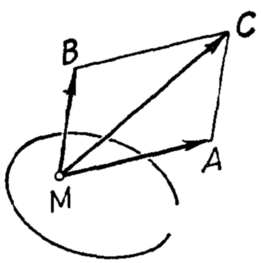

图1.1 力的平行四边形法则

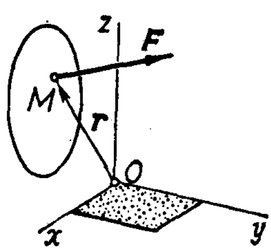

图1.2 $\boldsymbol{F}$的作用点是M

力是向量，但是单用一个向量符号$\boldsymbol{F}$还不能说明力的全部三个特征。因为$\boldsymbol{F}$只说明大小和方向。为了完全确定一个力，还要说明力的作用点。如$\boldsymbol{F}$作用于物体上的M点，我们可以在选定的参考体上任意取定一个点O用**向径** $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 来表明作用点的位置(图1.2)。有了两个向量$\boldsymbol{F}$和$\boldsymbol{r}$，这个力才完全被确定下来。

每一个物理量都有确定的量纲，在计算时要采用一定的单位制。在**国际单位制**(SI)②中，力的基本单位是牛顿(N)，在工程中常用千牛顿(kN)，长度的单位是米(m)。在我国，国际单位制

① 汉字“矢”象形是⇞，画的是一支箭。

② 详见国际计量局：《国际单位制(SI)》，科学出版社，1975．第九届国际计量大会(1948年)决议7中规定，在CGS制中力的基本单位是达因(dyne)，1达因$=10^{-5}$牛顿．国际计量委员会认为，CGS制最好不与SI并用．但是，由于大家对CGS制比较熟悉，所以目前实际上还是在并用着．

已在推行，但工程界和日常生活中还经常采用**工程单位制**，其中力的单位是公斤[①] (kg)或吨(t)，一吨＝1000公斤。一公斤(力)等于9.80665牛顿。本书以SI为主，适当照顾工程单位制。

假设作用在物体上的力系中有n个力$\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n$，作用点分别为$M_1, M_2, \cdots, M_n$，其向径为$\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_n$；或者简写为力系$\boldsymbol{F}_i$，作用点向径为$\boldsymbol{r}_i=\overrightarrow{OM}_i (i=1,2,\cdots,n)$。在最简单的情况下，这个力系中各个力作用在同一点$M$上，即$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_2=\cdots=\boldsymbol{r}_n$，它称为**共点力系**。

按照力的平行四边形法则，可以把$\boldsymbol{F}_1$和$\boldsymbol{F}_2$合成为一个力$\boldsymbol{F}_{12}$，$\boldsymbol{F}_{12}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$，且作用在$M$点（图1.3)。接着再用平行四边形法则求出$\boldsymbol{F}_{12}$与$\boldsymbol{F}_3$的合力$\boldsymbol{F}_{123}$，$\boldsymbol{F}_{123}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3$，作用点仍在$M$。一直下去，最后求得一个力$\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\cdots+\boldsymbol{F}_n$，这个力称为共点力系的**合力**。合力的作用点在公共作用点M上，所以

> 共点力系($\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2$，…，$\boldsymbol{F}_n$)的合力
> $$\boldsymbol{F}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i,$$
> 作用点在公共点上。

作用在质点上的力系，因各个力的作用点都在这个质点上，一定是共点力系。所以对于质点来说力系一定有合力$\boldsymbol{F}$。

一般说来，一个物体上所受的各个力的作用点并不一定是相同的。设有力系$\boldsymbol{F}_i$，作用点分别为M_i ($i=1,2,\cdots,n$)(图1.4(a))。我们不能直接用平行四边

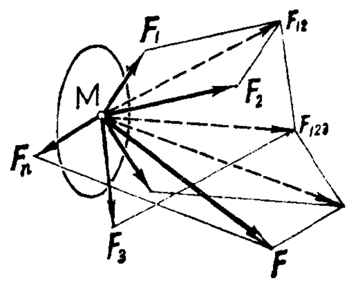

图1.3 共点力系的合力

---

① kilogram 作为质量单位时译为千克，作为力单位时译为公斤。

形法则对力进行合成以求出合力，因为只有作用在同一个点的两个力才能这样做。但是$\boldsymbol{F}_1$，$\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n$既然是向量，我们仍然可以求出它们的向量和$\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\cdots+\boldsymbol{F}_n$，这个向量和我们用符号$\boldsymbol{R}$表示（图1.4(b)），叫做力系的**主向量**：

任意力系 $\boldsymbol{F}_i(i=1,2\cdots,n)$ 的主向量 $$\boldsymbol{R}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i.$$

(1.1)

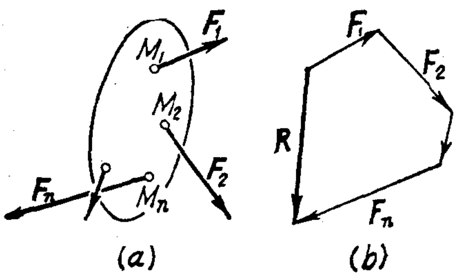

图1.4 主向量$\boldsymbol{R}$

要注意的是，主向量和合力在概念上是两件事。因为在主向量中，并沒有包含作用点的因素。对于上面所说的共点力系这个特殊情况，它有一个主向量$\boldsymbol{R}$（我们只说出了它的大小和方向，并不去管这个向量的作用点），又有一个合力$\boldsymbol{F}$（我们必须说明它的作用点才有意义）。虽然在这种情况下，主向量$\boldsymbol{R}$与合力$\boldsymbol{F}$，作为向量，它们的大小和方向是一样的，但是毕竟它们是两个概念。以后我们会看到，有些力系根本沒有合力，但是仍然可以求出主向量。实际上主向量是合力概念的一种推广。主向量是整个力系的一个特征量，这个特征量和下一节将要讲到的另一个特征量一起，能刻划力系改变物体整体运动（包括平衡）的性能。这一点在学完动力学后会更清楚。

只要知道力系中各个力的大小和方向（暂且不管其作用点）就一定可以求出主向量$\boldsymbol{R}$。现在来作具体计算。通常我们在参考体上取一个固定的直角坐标架$Oxyz$（与参考体固连在一起），它的原点在O，它沿x,y,z轴方向的单位向量为$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$。[$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$] 称为一组基向量。只要原点和基向量选定，就是选定了直

角坐标架。所以以后总是把一个直角坐标架写成 $[O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}]$。任何一个向量 $\boldsymbol{F}$ 总可以沿基向量的方向分成三个分向量(图1.5)，它们分别由 $F_x\boldsymbol{i}, F_y\boldsymbol{j}, F_z\boldsymbol{k}$ 表示，即

$$\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k},$$

其中 $F_x F_y, F_z$ 是代数量。它们可以是正或负，比如 $F_x>0$ 表示 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{i}$ 方向的分向量与 $\boldsymbol{i}$ 方向相同；反之，当 $F_x<0$ 时，则方向相反。我们称 F_x, F_y, F_z 为 $\boldsymbol{F}$ 的三个分量①（有时也说在基向量组 $[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}]$ 中的坐标）。由于 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 是正交的单位向量，F_x, F_y, F_z 就是 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 方向的投影。它们可以根据向量投影的定义求出。所以有

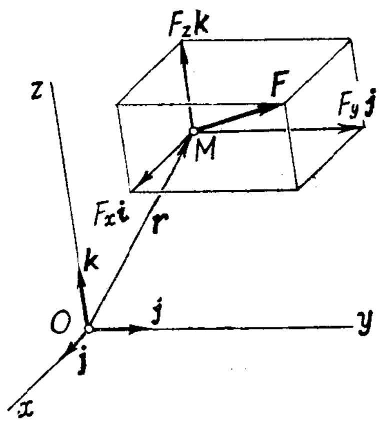

图1.5 向量的分解

$$\boxed{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{i}=F_x, \quad \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{j}=F_y, \quad \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{k}=F_z.}$$

就是说，在正交单位向量基中，一个向量的分量（或坐标）等于相应的投影②。

现在来写出主向量 $\boldsymbol{R}$ 的分量表达式。设

$$\boldsymbol{R}=R_x\boldsymbol{i}+R_y\boldsymbol{j}+R_z\boldsymbol{k}.$$

根据式(1.1)将

$$\boldsymbol{F}_i=F_{ix}\boldsymbol{i}+F_{iy}\boldsymbol{j}+F_{iz}\boldsymbol{k}$$

---

① 严格一些说，$F_x\boldsymbol{i}, F_y\boldsymbol{j}, F_z\boldsymbol{k}$ 这三个分向量的大小，即模（绝对值）分别为 $|F_x|$, $|F_y|$, $|F_z|$，而不是 F_x, F_y, F_z。所以分量不是分向量的大小，而是分向量大小添上适当的正负号.

② 对于非正交向量基没有这样的结论。