研究生教材

分析拓扑引论

寿纪麟 王绵森

西安交通大学出版社

研究生教材

分析拓扑引论

寿纪麟　王绵森

西安交通大学出版社

内 容 简 介

本书共分两篇六章。第一篇简要介绍点集拓扑的基本知识，包含三章：拓扑空间及其基本概念；分离性、可数性、度量化定理；紧性、连通性与乘积不变性。第二篇介绍线性拓扑空间常用的基础理论，也包含三章：线性拓扑空间；局部凸线性拓扑空间；对偶空间。每章后均配备了一定数量的习题。

本书以较短的篇幅介绍了现代分析方面的一些基础理论，内容简明，重点突出，可以作为高等院校数学系各专业高年级学生、研究生的教材或教学参考书，也可作为数学教师、应用数学工作者以及从事自然科学和工程技术理论研究的有关人员的学习参考书。

分 析 拓 扑 引 论

寿纪麟　　王绵森

责任编辑　　李慧芳

*

西安交通大学出版社出版

（西安市咸宁路28号）

西安交通大学出版社印刷厂印装

陕西省新华书店发行　各地新华书店经售

*

开本850×1168　1/32　印张 7.5　字数：186 千字

1988年12月第1版　　1988年12月第1次印刷

印数：1——3000

ISBN7-5605-0169-9/O·34　　定价：2.00元

《研究生教材》总序

研究生教育是我国高等教育的最高层次，是为国家培养高层次的人才。他们必须在本门学科中掌握坚实的基础理论和系统的专门知识，以及从事科学研究工作或担负专门技术工作的能力。这些要求具体体现在研究生的学位课程和学位论文中。

认真建设好研究生学位课程是研究生培养中的重要环节。为此，我们组织出版这套《研究生教材》，以满足当前研究生教学，主要是公共课和一批新型的学位课程的教学需要。教材作者都是多年从事研究生教学工作，有着丰富教学和科学研究经验的教师。

这套教材首先着眼于研究生未来工作和高技术发展的需要，充分反映国内外的最新学术动态，使研究生学习之后，能迅速接近当代科技发展的前沿，以适应“四化”建设的要求；其次，也注意到研究生公共课程和学位课程应有它最稳定、最基本的内容，是研究生掌握坚实的基础理论和系统的专门知识所必要的。因此，在研究生教材中仍应强调突出重点，突出基本原理和基本内容，以保持学位课程的相对稳定性和系统性，内容有足够的深度，而且对本门课程有较大的覆盖面。

这套《研究生教材》虽然从选题、大纲、组织编写到编辑出版，都经过了认真的调查论证和细致的定稿工作，但毕竟是第一次编辑这样高层次的教材系列，水平和经验都感不足，缺点与错误在所难免。希望通过反复的教学实践，广泛听取校内外专家学者和使用者的意见，使其不断改进和完善。

西安交通大学研究生院

西安交通大学出版社

1986年12月

前　　言

点集拓扑与线性拓扑空间理论是现代数学(特别是现代分析)的重要基础，现已发展成为内容丰富的独立学科。它们的概念、理论和方法不但已经渗透到纯粹数学与应用数学的许多分支中，而且在自然科学和工程技术理论的不少学科（诸如理论物理、现代控制理论等）中得到日益广泛的应用。特别是线性拓扑空间理论，由于其中的拓扑结构与代数结构的相互协调性，因此在处理数学物理问题中更为有用。

本书是在作者以前编写并讲授的两本讲义的基础上修改而成的，作者力求用较小的篇幅介绍点集拓扑和线性拓扑空间理论中常用的基本概念和方法，使主要关心应用的读者用不长的时间就能获得这方面的基础知识，而对于那些有志于理论研究的读者也不难在此基础上再进一步提高。

本书分两篇共六章。第一篇中扼要介绍了点集拓扑的基本内容，包括拓扑空间的基本概念、分离性、可数性、紧性、连通性以及乘积不变性等，采用由一般到特殊的方法，并用网收敛来刻画拓扑性质。它既为学习第二篇作了必要的准备，又为不具备这方面知识的读者提供了一个简明而系统的学习材料。第二篇介绍线性拓扑空间理论。我们首先引进线性拓扑空间的基本概念和性质，在此基础上，着重讨论了局部凸空间，包括 Hahn-Banach 定理的分析形式与几何形式，凸集的分离定理，Крейн-Мильман 端点定理以及两类特殊的局部凸空间——桶空间与囿空间。在讨论对偶理论时，从线性空间对偶系出发，逐步介绍局部凸空间的对偶理论与巴拿赫空间的对偶空间，讨论了原空间的弱拓扑以及

对偶空间的弱*拓扑、强拓扑的一些重要结论，最后还介绍了巴拿赫空间中两个很有用的定理——Jemes 定理与 Bishop-Phelps 定理。每章后均配有习题，供读者选做，以便巩固并加深对基本内容的理解。

本书内容简明，重点突出，只要具备泛函分析的基本知识就能阅读。本书可以作为高等院校数学系各专业高年级学生、研究生的教材或教学参考书，也可作为数学教师、应用数学工作者以及从事自然科学和工程技术理论研究的有关人员的学习参考书。

承蒙四川大学数学研究所孙顺华教授审阅书稿的全文，并提出许多宝贵的意见，作者在此深表谢意！

作者衷心希望专家与读者对书中的错误与不妥之处给予批评指正。

编 者　　1988年6月

目　录

第一篇　点集拓扑基础

点集拓扑学是现代数学(特别是现代分析)的重要基础之一，它的观点和方法已渗透到现代数学的许多重要分支中。点集拓扑对学习现代数学，如同解析几何对学习微积分一样，是必不可少的。

点集拓扑学本身是一门独立的学科，但是本篇主要还是作为学习线性拓扑空间的基础知识而写的。因此,力求用较短的篇幅，简要介绍点集拓扑学中最常用的基本理论和方法。我们采用网与网收敛来刻画拓扑空间的主要拓扑性质。着重介绍空间的分离性、可数性、紧性以及乘积空间与乘积不变性方面的内容。

第一章　拓扑空间及其基本概念

近代分析中的基本问题是研究抽象集合中的“极限”与映象的“连续性”。众所周知，在欧氏空间(或距离空间)中，极限概念是以“距离”为基础的，通过距离可定义开集、邻域等拓扑概念。按距离收敛概括了分析中的很多收敛概念，然而确实存在着不能用距离刻画的收敛性。那么是否可用某种途径直接定义开集、邻域等概念，从而引出极限、连续性呢？

经过对由度量(距离)所导出的开集、邻域等概念的结构研究，分析它们的本质联系，终于找到了直接定义开集的途径，并由此导出其他拓扑概念。

第一节　拓扑空间的定义与例

定义1.1　设X是一个任意集合，$\mathscr{T}$ 是X的一个子集族，若满足：

(O_1)　$\phi, X\in\mathscr{T}$；

(O_2)　若 $G_1, G_2\in\mathscr{T}$，则 $G_1\cap G_2\in\mathscr{T}$；

(O_3)　若 $G_i\in\mathscr{T}(i\in I)$，其中 I 为任意指标集，则 $\bigcup\limits_{i\in I} G_i\in\mathscr{T}$

则称$\mathscr{T}$为集合X上的一个**拓扑**，$(X,\mathscr{T})$称为**拓扑空间**，$\mathscr{T}$中的元素称为该空间中的**开集**。

例1.1　设X为任意集合，若$\mathscr{T}=\{\phi, X\}$，则$\mathscr{T}$满足(O_1)～(O_3)三个条件，因而$(X,\mathscr{T})$为一个拓扑空间，称为**平凡拓扑空间**，$\mathscr{T}$称为**平凡拓扑**。

例1.2　设X为任意集合，$\mathscr{T}=\{A\mid A\subset X\}$，$\mathscr{T}$即由$X$的一切子集（包括空集）组成。显然，$\mathscr{T}$也满足拓扑空间的条件，$(X,\mathscr{T})$称为**离散拓扑空间**，$\mathscr{T}$称为**离散拓扑**。

例1.3　设(X,ρ)为距离空间，$\mathscr{T}$ 是由距离 ρ 导出的一切开集的全体，则由泛函分析知，$\mathscr{T}$ 也满足条件(O_1,)～(O_3)，因而(X,ρ)也为拓扑空间，称为**由距离 ρ 导出的拓扑空间**。

例1.4　设 $X=\{a,b\}$，$\mathscr{T}=\{\phi,\{a\},X\}$，容易验证$(X,\mathscr{T})$也是一个拓扑空间，称为**谢尔宾斯基(Sierpinski)空间**。

例1.5　设X为任意非空集合，令

$$\mathscr{T}=\{\phi, A\mid A^c \text{ 为} X \text{的有限子集}\}$$

则$(X,\mathscr{T})$也是一个拓扑空间，称它为**有限余拓扑空间**。

证　(O_1)、(O_3)是显然满足的。为了证明(O_2)，任取 A_1, $A_2\in\mathscr{T}$，

(i) 若 A_1 或 A_2 为空集，则 $A_1\cap A_2=\phi\in\mathscr{T}$；

(ii) 若 A_1、A_2 均为非空集，则 $(A_1\cap A_2)^c=A_1^c\cup A_2^c$ 也为有限集合，故 $A_1\cap A_2\in\mathscr{T}$。

因此，$(X,\mathscr{T})$是一个拓扑空间。

例1.6 设X为任意非空集合，令

$$\mathscr{T}=\{\phi,A\,|\,A^c\text{ 为}X\text{的至多可列子集}\}$$

类似上例的证明，可以验证$(X,\mathscr{T})$也是一个拓扑空间，称为**可列余拓扑空间**。

例1.7 设X为任意集合，若X上定义了一个两元关系"$\preccurlyeq$"*，满足：

(1) 对任意 $x\in X$，$x\preccurlyeq x$(自反性)；

(2) 若 $x\preccurlyeq y$，$y\preccurlyeq x$，则必有 $x=y$(反称性)；

(3) 若 $x\preccurlyeq y$，$y\preccurlyeq z$，则 $x\preccurlyeq z$(传递性)，

则称$(X,\preccurlyeq)$为一个**半序集**。若在半序集上，任取 $y\in X$，令

$$S_r(y)=\{x\,|\,y\preccurlyeq x,x\in X\}$$

称 $S_r(y)$为关于 y 的**右尾集**。若由各种右尾集之并的全体构成一个子集族

$$\mathscr{T}=\{\phi,A\,|\,A=\bigcup_{y\in B}S_r(y),B\subset X\}$$

则 $\mathscr{T}$ 也满足拓扑的三个条件。事实上，

(O_1) $\phi\in\mathscr{T},X=\bigcup_{y\in X}S_r(y)\in\mathscr{T}$；

(O_2) 任取 $A_1,A_2\in\mathscr{T}$，不妨令

$$A_1=\bigcup_{y\in B_1}S_r(y),\quad A_2=\bigcup_{z\in B_2}S_r(z)$$

其中，$B_1\subset X$，$B_2\subset X$，则对任意 $y,z\in X$，有等式

$$S_r(y)\cap S_r(z)=\bigcup_{u\in S_r(y)\cap S_r(z)}S_r(u)$$

因而 $$A_1\cap A_2=(\bigcup_{y\in B_1}S_r(y))\cap(\bigcup_{z\in B_2}S_r(z))$$
$$=\bigcup_{y\in B_1}\bigcup_{z\in B_2}(S_r(y)\cap S_r(z))$$

*："$\preccurlyeq$"是表示"序"或"半序"的符号$\preccurlyeq$。

$$=\bigcup_{y\in B_1}\bigcup_{z\in B_2}\bigcup_{u\in S_r(y)\cap S_r(z)} S_r(u)$$

$$=\bigcup_{u\in\bigcup_{\substack{y\in B_1\\ z\in B_2}}[S_r(y)\cap S_r(z)]} S_r(u)\in\mathscr{T}$$

(O_3) 若 $A_i\in\mathscr{T}$ $(i\in I)$，令 $A_i=\bigcup_{y\in B_i} S_r(y)$，则

$$\bigcup_{i\in I} A_i=\bigcup_{i\in I}\bigcup_{y\in B_i} S_r(y)=\bigcup_{y\in\bigcup_{i\in I} B_i} S_r(y)\in\mathscr{T}$$

称这个拓扑空间为**右序拓扑空间**。

第二节 邻域、闭集、内点、聚点、闭包、子空间

上节中我们通过公理化方法直接定义了开集族，现在以它为基础逐步导出其他拓扑学中的基本概念。

定义 2.1 设 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间，$x\in X$, $U\subset X$，若存在 $G\in\mathscr{T}$，使

$$x\in G\subset U \tag{1.1}$$

则称 U 为 x 的**邻域**。x 点的邻域的全体称为 **x 点的邻域系**，记作 $\mathscr{U}(x)$。拓扑空间 X 中各点邻域系的全体称为 **X 的邻域系**，记作 $\mathscr{U}$，即

$$\mathscr{U}=\{\mathscr{U}(x)\mid x\in X\}$$

由上述定义，x 点的邻域不必为包含 x 的开集。例如，设 $X=\{a,b,c\}$，$\mathscr{T}=\{\phi,\{a\},X\}$，与例 1.4 类似，可证 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间。$U=\{a,b\}$ 为 a 点的邻域，但它不是开集。此例还说明，U 为 a 点的邻域，但不是 b 点的邻域。然而，开集是它任意点的邻域，且反之亦真（习题 2）。

定理 2.1 设 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间，$\mathscr{U}$ 为由 $\mathscr{T}$ 导出的 X 的邻域系，则 $\mathscr{U}$ 满足下列条件：

(N_1) 若 $U\in\mathscr{U}(x)$，则 $x\in U$；

(N_2) 若 $U\in\mathscr{U}(x)$，$V\supset U$，则 $V\in\mathscr{U}(x)$；

(N_3) 若 $U_1,U_2\in\mathscr{U}(x)$，则 $U_1\cap U_2\in\mathscr{U}(x)$；

(N_4) 若 $U\in\mathscr{U}(x)$，则必存在 $W\in\mathscr{U}(x)$，使 $W\subset U$，且对任意 $y\in W$，$W\in\mathscr{U}(y)$。

证 由邻域的定义，(N_1) (N_2) 显然成立。

设 $U_1,U_2\in\mathscr{U}(x)$，则存在 $G_1,G_2\in\mathscr{T}$，使

$$x\in G_1\subset U_1,\quad x\in G_2\subset U_2$$

令 $G=G_1\cap G_2$，则 $G\in\mathscr{T}$，且

$$x\in G\subset U_1\cap U_2$$

故 $U_1\cap U_2\in\mathscr{U}(x)$，$(N_3)$ 成立。

现证 (N_4)。设 $U\in\mathscr{U}(x)$，则存在 $G\in\mathscr{T}$，使 $x\in G\subset U$，令 $W=G$，由习题 2，对任一 $y\in W$，$W\in\mathscr{U}(y)$。

有了开集和邻域的概念，就可以利用它们来定义其他拓扑概念，如闭集、内点、聚点、闭包等。

定义 2.2 设 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间，$F\subset X$，若 $F^c\in\mathscr{T}$，其中 F^c 为 F 的余集，则 F 称为**闭集**。

定理 2.2 设 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间，$\mathscr{F}$ 为 X 的闭集的全体，则 $\mathscr{F}$ 满足条件：

(F_1) $\phi,X\in\mathscr{F}$；

(F_2) 若 $F_1,F_2\in\mathscr{F}$，则 $F_1\cup F_2\in\mathscr{F}$；

(F_3) 若 $F_i\in\mathscr{F}$ $(i\in I)$，则 $\bigcap\limits_{i\in I} F_i\in\mathscr{F}$。

证明留作习题。

定义 2.3 设 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间，$A\subset X$，若 $x\in A$，使 $A\in\mathscr{U}(x)$，则称 x 为 A 的**内点**。A 中内点的全体称为 A 的**内部**，记为 A° 或 $\mathrm{int}A$。

定义 2.4 设 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间，$A\subset X$。若 $x\in X$，使对任意 $U\in\mathscr{U}(x)$，有

$$U\cap(A\setminus\{x\})\neq\phi \tag{1.2}$$

则称 x 为 A 的**聚点**。A 的聚点的全体称为 A 的**导集**，记为 A'。

定义 2.5 设 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间，$A\subset X$。令

$$\bar{A}=A\cup A' \tag{1.3}$$

则称 $\bar{A}$ 为 A 的**闭包**。

定理 2.3 设 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间，$A\subset X$，则 $x\in\bar{A}$ 的充要条件是对任意 $U\in\mathscr{U}(x)$

$$U\cap A\neq\phi \tag{1.4}$$

证 必要性 设 $x\in\bar{A}$，因 $\bar{A}=A\cup A'$，

若 $x\in A$，则对任意的 $U\in\mathscr{U}(x)$，$x\in U\cap A\neq\phi$；

若 $x\in A'\setminus A$，由式 (1.2)，对任意 $U\in\mathscr{U}(x)$，$U\cap(A\setminus\{x\})\neq\phi$，而 $x\notin A$，故 $U\cap A\neq\phi$。

充分性 若对任意 $U\in\mathscr{U}(x)$，式 (1.4) 成立。若 $x\in A$，则 $x\in\bar{A}$；若 $x\notin A$，则 $U\cap(A\setminus\{x\})\neq\phi$，因而 $x\in A'$，也有 $x\in\bar{A}$。

定理 2.4 设 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间，则 X 的任意子集与其闭包满足条件：

(C_1) $\bar{\phi}=\phi$；

(C_2) $A\subset\bar{A}$；

(C_3) $\bar{\bar{A}}=\bar{A}$；

(C_4) $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$，

其中 A,B 为 X 的任意子集。

证 条件 (C_1) 和 (C_2) 是显然满足的。为了证明 (C_3)，只要证 $\bar{\bar{A}}\subset\bar{A}$ 即可。

事实上，任取 $x\in\bar{\bar{A}}$ 及 $U\in\mathscr{U}(x)$，由定理 2.3，有

$$U\cap\bar{A}\neq\phi$$

对 U，存在 $G\in\mathscr{T}$，使 $x\in G\subset U$，而 $G\in\mathscr{U}(x)$，故

$$G\cap\bar{A}\neq\phi$$

因而存在 $y\in G\cap\bar{A}$，又由定理 2.3，对任意 $V\in\mathscr{U}(y)$，必有

$$V\cap A\neq\phi$$

而 $G\in\mathscr{U}(y)$，故 $G\cap A\neq\phi$，但 $U\supset G$，也有

$$U\cap A\neq\phi$$

由 U 的任意性，知 $x\in\bar{A}$。

现证 (C_4)。设 $x\in\bar{A}\cup\bar{B}$，不妨设 $x\in\bar{A}$，对任意 $U\in\mathscr{U}(x)$，有 $U\cup A\neq\phi$，因而

$$U\cap(A\cup B)\neq\phi$$

即 $x\in\overline{A\cup B}$。

反之，若 $x\in\overline{A\cup B}$，而 $x\bar{\in}\bar{A}$ 及 $x\bar{\in}\bar{B}$，则必存在 U_1，$U_2\in\mathscr{U}(x)$，使

$$U_1\cap A=\phi,\quad U_2\cap B=\phi$$

令 $W=U_1\cap U_2\in\mathscr{U}(x)$，则更有

$$W\cap(A\cup B)=\phi$$

这说明 $x\bar{\in}\overline{A\cup B}$，与原假设矛盾。

定理 2.5 A 为闭集的充要条件是 $\bar{A}=A$。

证 必要性 设 A 为闭集，则 A^c 为开集。为了证明 $\bar{A}=A$，只要证 $\bar{A}\subset A$。

用反证法。若 $x\in\bar{A}$，而 $x\bar{\in}A$，则 $x\in A^c$，而 $A^c\in\mathscr{U}(x)$

$$A^c\cap A=\phi$$

由定理 2.3，$x\bar{\in}\bar{A}$，与上述假设矛盾。

充分性 设 $\bar{A}=A$，只要证 A^C 为开集即可。任取 $x\in A^c$，$x\bar{\in}A=\bar{A}$，由定理 2.3，存在 $U\in\mathscr{U}(x)$，使 $U\cup A=\phi$，即

$$U\subset A^c$$

故 A^c 为开集，A 为闭集。

推论 2.1 $\bar{A}$ 必为闭集。

定义 2.6 设 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间，若 $\bar{A}=X$，则称 A 为 X 的**稠密子集**。若 X 中存在着可列的稠密子集，则称 X 为**可分拓扑空间**（简称**可分空间**）。

定义 2.7 设 $A\subset X$，$x_0\in A$，若存在 $U\in\mathscr{U}(x_0)$，使

$$U\cap(A\setminus\{x_0\})=\phi$$

则称 x_0 为集合 A 的**孤立点**。

以上讨论了由开集族出发定义的一些常用的拓扑概念及其基本性质，下面再讨论一个重要的拓扑概念——子空间。

设 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间，A 为 X 中的任意非空子集，则 X 中的每个开集与 A 之交，构成 A 中的一个子集族

$$\mathscr{T}_A=\{G\cap A\mid G\in\mathscr{T}\}$$

则 $\mathscr{T}_A$ 为 A 中的一个拓扑。事实上，因为 $\phi=\phi\cap A$, $A=A\cap X$，故 $\phi,A\in\mathscr{T}_A$。

设 $U_1,U_2\in\mathscr{T}_A$，令 $U_1=G_1\cap A$，$U_2=G_2\cap A$，其中 G_1，$G_2\in\mathscr{T}$，则

$$U_1\cap U_2=(G_1\cap A)\cap(G_2\cap A)=(G_1\cap G_2)\cap A$$

因而 $U_1\cap U_2\in\mathscr{T}_A$。

设 $U_i\in\mathscr{T}_A(i\in I)$，令 $U_i=G_i\cap A\ (G_i\in\mathscr{T},i\in I)$，则

$$\bigcup_{i\in I}U_i=\bigcup_{i\in I}(G_i\cap A)=\bigcup_{i\in I}G_i\cap A$$

故 $\bigcup\limits_{i\in I}U_i\in\mathscr{T}_A$。

因此，$(A,\mathscr{T}_A)$ 也是一个拓扑空间。

定义 2.8 设 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间，$A\subset X$，则

$$\mathscr{T}_A=\{G\cap A\mid G\in\mathscr{T}\}\tag{1.5}$$

为 A 中的一个拓扑，称为由 $\mathscr{T}$ 在 A 中的**诱导拓扑**，称 $(A,\mathscr{T}_A)$ 为由 $(X,\mathscr{T})$ 在 A 中**诱导的子空间**（简称**子空间**）。

定理 2.6 设 A 为 X 的子空间，B 为 A 的子空间，则 B 也是 X 的子空间。

证 设 $\mathscr{T}$、$\mathscr{T}_A$、$(\mathscr{T}_A)_B$ 分别为 X、A、B 上的拓扑，只要证明 $(\mathscr{T}_A)_B$ 与 $\mathscr{T}_B$ 相等即可。

设 $U\in(\mathscr{T}_A)_B$，则 $U=V\cap B$，其中 $V\in\mathscr{T}_A$。由 $\mathscr{T}_A$ 的定义，$V=G\cap A(G\in\mathscr{T})$，故

$$U=(G\cap A)\cap B=G\cap B$$

即 $U\in\mathscr{T}_B$。

反之，若 $U\in\mathscr{T}_B$，则 $U=G\cap B$，其中 $G\in\mathscr{T}$。但 $B=B\cap A$，所以

$$U=G\cap B=G\cap(B\cap A)=(G\cap A)\cap B$$

令 $W=G\cap A\in\mathscr{T}_A$，所以 $U\in(\mathscr{T}_A)_B$。由 U 的任意性得

$$\mathscr{T}_B=(\mathscr{T}_A)_B$$

子空间的概念在今后的讨论中是很有用的，区别和灵活处理原空间和子空间中的开集（或闭集等）往往能使问题简化，因而也是一种技巧。

第三节　网与网收敛*

在本章前言中已提到，研究拓扑结构是研究极限、连续性等概念的前提。本节将引出拓扑空间中的收敛性概念。

在欧氏空间(或距离空间)中，讨论收敛性问题时，研究普通的序列收敛就可以了。但在拓扑空间中，序列收敛不足以充分刻画拓扑概念的本质特性，因而必须引进一种新的点列（即网）及网的收敛性概念。

定义 3.1　设 $(S,\prec)$ 为半序集，若对任意 $x,y\in S$，存在 $z\in S$，使 $z\succ x$，$z\succ y$，则称 $(S,\prec)$ 为**定向集**。

例 3.1　自然数集 N 和实数集 R，按通常的序关系 $\leqslant$，均为定向集。

例 3.2　在二维欧氏平面 R^2 中，若定义一个半序关系“$\prec$”

* 在一般的拓扑空间中，可以用网（net）和滤子（filter）两种途径来定义“收敛”概念，虽然网与滤子的定义形式很不相同，但它们定义的收敛性是完全等价的。本书采用网和网收敛的途径，是因为它在形式上更接近于古典分析中的序列收敛。把网收敛看作序列收敛的推广更易于初学者接受。