

桩结构物的计算方法和计算实例

(日) 横山幸满 著

唐业清 合译
吴庆荪



中国铁道出版社

1984年·北京

桩结构物的计算方法和计算实例

(日) 横山幸满 著

唐业清
吴庆荪 合译

中国铁道出版社

1984年·北京

内 容 简 介

本书主要着眼于整体结构体系中的桩，介绍桩结构物的计算理论和计算方法。全书共分七章，主要包括：序论，桩的横向抗力，桩结构物计算中的有关事项，二维和三维桩结构物的计算，承受波浪、海潮和风力作用的桩结构物的计算，以及受地震的桩结构物、海洋建筑物的动态反应计算等供读者参考和使用。

书中列有43个计算实例和解题用的计算图表、数值表、电算程序框图，以及 *Schleicher* 的 Z 函数表等。

本书除供铁路、公路、水工、港口、冶金、石油、建筑等工程部门的技术人员、学用外，也可供大专院校师生参考。

くい構造物の計算法と計算例

横山幸满 著

山海堂 1977年11月

桩结构物的计算方法和计算实例

唐业清、吴庆荪 合译

中国铁道出版社出版

责任编辑：陈健 封面设计：赵敬宇

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092 $\frac{1}{16}$ 印张：21.75 字数：483千

1984年9月 第1版 第1次印刷

印数：0001—10,000册 定价：2.95元

译者前言

本书原文初版于1977年11月，1978年6月再版。作者横山幸满是日本工业管理部土木设计室次长，曾著有《钢桩的设计和施工》、《水工工程的设计》、《桩基础设计实用技术和解说》等书。

本书出版后仅相隔6个月就再版，这说明该书在日本是颇受欢迎的。

本书所介绍的桩结构物的各种计算方法和条件，是把桩作为桩结构物的组成部分所建立的最新计算体系。其中对于三维桩结构物的计算，桩的负摩擦力及群桩效应的考虑，桩结构物承受波浪、潮流、风的作用力，以及关于承受地震力和其它动力作用的海洋建筑物的动态反应计算等，都作了较详细地介绍。

本书反映了目前桩结构物计算的新水平，内容比较新颖，是该书的主要特点。

书的另一特点是理论和实际相结合，把学和用联系起来，使读者可以更好地理解和运用这些计算方法，因此具有较高的实用价值。

此外，在实例的计算中，把繁杂的计算采用了电子计算机处理，同时附有计算图表和数值表、电算程序框图和Schleicher的Z函数等资料，为读者创造了使用条件。

最后，我们欢迎广大读者对翻译中的缺点和不足提出批评。

一九八三年八月

目 录

第 1 章 序 论	(1)
1.1 桩结构物	(1)
1.1.1 桩功能的演变	(1)
1.1.2 桩结构物的对象	(1)
1.1.3 桩结构物的计算步骤	(2)
1.1.4 桩结构物的破坏形态	(4)
1.1.5 桩结构物材料的特性	(5)
1.2 基本事项	(6)
1.2.1 梁和桩的微分方程式	(6)
1.2.2 荷载函数	(9)
第 2 章 桩的横向抗力	(14)
2.1 桩的横向抗力计算方法的研究	(14)
2.1.1 计算方法的分类	(14)
2.1.2 各种方法的特点和问题	(16)
2.2 极限地基反力法 (极限平衡法)	(21)
2.2.1 假定地基反力分布为二次曲线 (抛物线) 的方法	(21)
2.2.2 假定地基反力分布为直线的方法	(24)
2.2.3 采用荷载函数的位移曲线法	(25)
2.3 线性弹性地基反力法之一——假定地基反力系数与深度无关而为定值的情况	(33)
2.3.1 半无限长桩	(33)
2.3.2 有限长桩	(48)
2.3.3 多层地基中的桩	(58)
2.3.4 桩的横向抗力的一般性质	(72)
2.3.5 水平方向地基反力系数 k_x	(73)
2.4 线性弹性地基反力法之二——地基反力系数为深度 x 的函数的情况	(85)
2.4.1 幂级数的解法	(85)
2.4.2 差分法的近似解法	(99)
2.4.3 反力积分法	(105)
2.4.4 桩头刚度系数和等效桩头荷载	(113)
2.5 非线性弹性地基反力法	(115)
2.5.1 港研方式	(115)
2.5.2 格利塞法的逐次渐近解法	(121)
2.5.3 麦克莱伦特-福奇特的方法	(122)

2.6 复合地基反力法 (p - y 曲线法)	(124)
2.6.1 完全弹塑性法	(124)
2.6.2 布罗姆斯的方法	(127)
2.6.3 API-RP2A的方法	(136)
第3章 桩结构物计算中的有关事项	(143)
3.1 桩的轴向承载力	(143)
3.1.1 “道路桥下部结构设计指南与说明”的桩基础设计篇的方法	(143)
3.1.2 “建筑基础结构计算规范及说明”的方法	(146)
3.1.3 API-RP 2A的方法	(147)
3.2 桩的轴向弹性系数 K_p	(148)
3.3 负摩擦力	(154)
3.4 群桩效应	(157)
3.4.1 轴向承载力的群桩效应	(157)
3.4.2 轴向弹性系数的群桩效应	(158)
3.4.3 负摩擦力的群桩效应	(161)
3.4.4 桩的横向抗力的群桩效应	(162)
3.5 承受轴向力桩的弯曲	(167)
3.6 对假想弹性支座法的注意事项	(169)
第4章 二维桩结构物的计算	(173)
4.1 有刚性承台的二维桩结构物	(173)
4.1.1 位移法(刚度法)的解法	(173)
4.1.2 按力法求解	(185)
4.1.3 在桩身上有荷载作用的情况	(186)
4.1.4 考虑地基屈服的计算方法	(193)
4.1.5 位移法的应用	(194)
4.1.6 承台的截面内力计算	(197)
4.1.7 承台刚度的影响	(198)
4.2 一般的二维桩结构物	(201)
4.2.1 梁杆件的刚度方程式	(201)
4.2.2 桩杆件的刚度方程式	(208)
4.2.3 结构整体的刚度方程式	(208)
4.2.4 梁杆件剪切变形的影响	(209)
4.2.5 简单的二维桩结构物	(212)
第5章 三维桩结构物的计算方法	(218)
5.1 一般的三维桩结构物	(218)
5.1.1 梁杆件的刚度方程式	(218)
5.1.2 桩杆件的刚度方程式	(222)
5.1.3 整体结构的刚度方程式及其解法	(224)
5.1.4 补充事项	(227)
5.2 由桩和刚体组成的三维桩结构物	(228)

5.3 有板单元的三维桩结构物	(233)
5.3.1 近似解法	(233)
5.3.2 承受轴对称荷载的桩基础上的圆板——储液罐基础的实例	(234)
第6章 承受波浪、海潮和风作用的桩结构物	(240)
6.1 波 浪	(240)
6.1.1 作用于直立圆柱上的波浪力	(240)
6.1.2 作用在桩上的波浪力	(248)
6.1.3 作用在梁杆件上的波浪力	(250)
6.1.4 自重和浮力	(252)
6.2 潮 流	(253)
6.2.1 只有潮流的情况	(253)
6.2.2 波浪力和潮流力同时作用的情况	(254)
6.2.3 卡尔曼涡流产生的杆件振动	(254)
6.3 风	(255)
6.3.1 风 荷 载	(255)
6.3.2 梁杆件的荷载函数	(255)
6.3.3 桩的荷载函数	(256)
6.4 桩的最大弯矩	(256)
6.4.1 由风荷载产生的弯矩	(256)
6.4.2 由波荷载产生的弯矩	(257)
6.4.3 在海底面的弯矩 M_B	(257)
6.4.4 土中部分桩的最大弯矩	(257)
第7章 桩结构物的动态计算	(258)
7.1 土中桩的弯曲振动	(258)
7.2 集中质点系的地震反应计算	(261)
7.2.1 单质点1个自由度系的地震反应计算	(261)
7.2.2 2个质点2个自由度系的地震反应计算	(264)
7.2.3 桩基础上圆形贮罐的地震反应计算——3个质点3个自由度系	(269)
7.2.4 单质点3自由度系的地震反应计算	(276)
7.3 海洋建筑物的动态反应计算	(278)
7.3.1 梁杆件的振动方程式	(278)
7.3.2 桩杆件的振动方程式	(280)
7.3.3 整体结构的振动方程式	(281)
附 录	
附录1 计算图表及数值表	(284)
附录2 桩结构物计算程序框图	(301)
附录3 施利彻尔的Z函数	(334)

算 例 目 录

1. 按恩格尔-物部法桩的计算	(23)
2. 按雷斯方法桩的计算	(25)
3. 按桩尖固定支承法板桩墙的计算	(31)
4. 按位移曲线法桩的计算	(32)
5. 按张有令法桩的计算	(42)
6. 承受波浪压力、潮流压力、风压力时桩的计算	(44)
7. 有限长桩的计算	(53)
8. 3层地基中的桩的计算	(67)
9. 按照传递矩阵法计算	(70)
10. 反算水平方向地基反力系数 k_h	(75)
11. 按张有令的建议计算水平方向地基反力系数	(77)
12. 按 N 值确定水平方向地基反力系数	(78)
13. 按格利克-吉布森法计算水平方向地基反力系数	(80)
14. 按罗的方法桩的计算	(97)
15. 格利塞法的差分近似解法	(102)
16. 按5等分反力荷载法桩的计算	(111)
17. 港研方式S型地基中桩的计算——有地上部分的情况	(117)
18. 港研方式S型地基中桩的计算——无地上部分的情况	(119)
19. 按完全弹塑性法桩的计算	(124)
20. 按布罗姆斯方法砂质地基中桩的计算	(132)
21. 按布罗姆斯方法粘性土地基中桩的计算	(134)
22. 按API-RP 2A方法粘土地基的 $p-y$ 曲线	(137)
23. 按API-RP 2A方法砂质地基的 $p-y$ 曲线	(140)
24. 桩的轴向弹性系数 K_v	(150)
25. 有地上部分时桩的轴向弹性系数 K_v	(152)
26. 按“道路桥下部结构设计指南和解说”方法求桩的轴向弹性系数 K_v	(153)
27. 按宫本·泽口的方法求桩的横向抗力的群桩效应	(164)
28. 轴力对桩弯曲的影响	(168)
29. 桥台基础的计算(二维桩基础)	(180)
30. 按力法计算	(186)
31. 船舶与承托管道的栈桥相撞时荷载的计算	(190)
32. 忽视桩的抗拔阻力时的计算	(194)
33. 承台的截面内力计算	(198)
34. 承台刚度的影响	(201)
35. 承受轴员称荷载的桩基础上的圆板——储液罐基础的实例	(237)
36. 空气波、斯托克斯波的比较	(245)
37. 由波浪力得出的荷载函数	(250)
38. 桥墩的地震反应计算——单质点1个自由度系	(262)
39. 桥墩的地震反应计算——2个质点2个自由度系	(268)
40. 桩基础上圆形储罐的地震反应计算——3个质点3个自由度系	(272)
41. 考虑晃动的桥墩地震反应计算——单质点3个自由度系	(277)
42. 柱式结构的自振周期	(282)
43. 承受波力的三维桩结构物的计算——电子计算机输出的计算结果	(327)

第 1 章 序 论

本章叙述的内容为桩结构物的概念和它的特性，以及在以后各章中要引用的挠曲微分方程和荷载函数。

1.1 桩结构物

1.1.1 桩功能的演变

过去桩只是作为桥梁或大型建筑物等的基础，一般认为它的功能是将作用于上部结构的荷载传递给地基土层，从而安全的支承结构物。在这些结构物中，桩和刚性承台相联结，外力的绝大部分将以桩的轴力形式传给地基土层，而地震力等水平荷载是由承台或地下梁前面的被动土压来承受，在进行设计时桩仅考虑垂直荷载的作用。这样，在设计木桩或钢筋混凝土桩时，仅能利用桩材料的抗压性能，这就限制了桩基础的适用范围，使重要建筑物的基础主要采用沉井及沉箱等刚性基础，而不能采用桩基础。

可是，自50年代以后，在实际工程中应用了钢管桩及工字形钢桩，这些桩不但长度较长，而且具有较大的抗弯刚度，对软弱地基较多的日本来说，采用这样的桩基础是适用的。随着钢桩施工方法的飞跃发展，到目前为止，已经使用了超过百万吨的钢桩。

另一方面，与钢桩相对应的混凝土桩、预应力混凝土桩及现场灌注桩也有了惊人的发展，特别在振动公害成为问题的城市中，现场灌注桩正在被广泛地应用。

桩基础工程的发展，不仅仅取决于材料制造方面的进步，而打桩机、挖掘机、焊接技术等有关技术的发展也是重要的一个方面，另外还由于改良软土地基、增加抗震措施、改善劳动环境等社会要求也促使了它的发展。

由于桩基础代替了以往的沉井、沉箱的施工方法而成为基础工程的主要型式，所以除了在数量上的显著增加之外，还必须看到质的变化。

也就是说，第二次世界大战以后，在以美国为中心急速发展的石油开采钻井平台等海洋建筑物中，以及预料到在日本今后将发展的多柱式基础施工方法和众所周知的港湾大型建筑物中，已经不能将桩仅仅理解为支承上部工程的基础桩，而必须将桩理解为结构物的一个重要组成部分，能够承受比较大的外力。

因此，面对桩已被多方面应用的现实，它的设计方法就应该完全与广泛的使用领域相适应。但遗憾的是，现在还没有摆脱木桩时代按单桩承载能力设计的方法。

从这个意义上讲，本书没有将桩作为简单的桩基础的桩来考虑，而是作为更广泛的“桩结构物”的主要组成部分，以桩在结构总体中与其他组成部分之间的关系作为本书的基本出发点。

1.1.2 桩结构物的对象

在本书中，作为“桩结构物”的对象可包括以下内容（参照图1.1）：

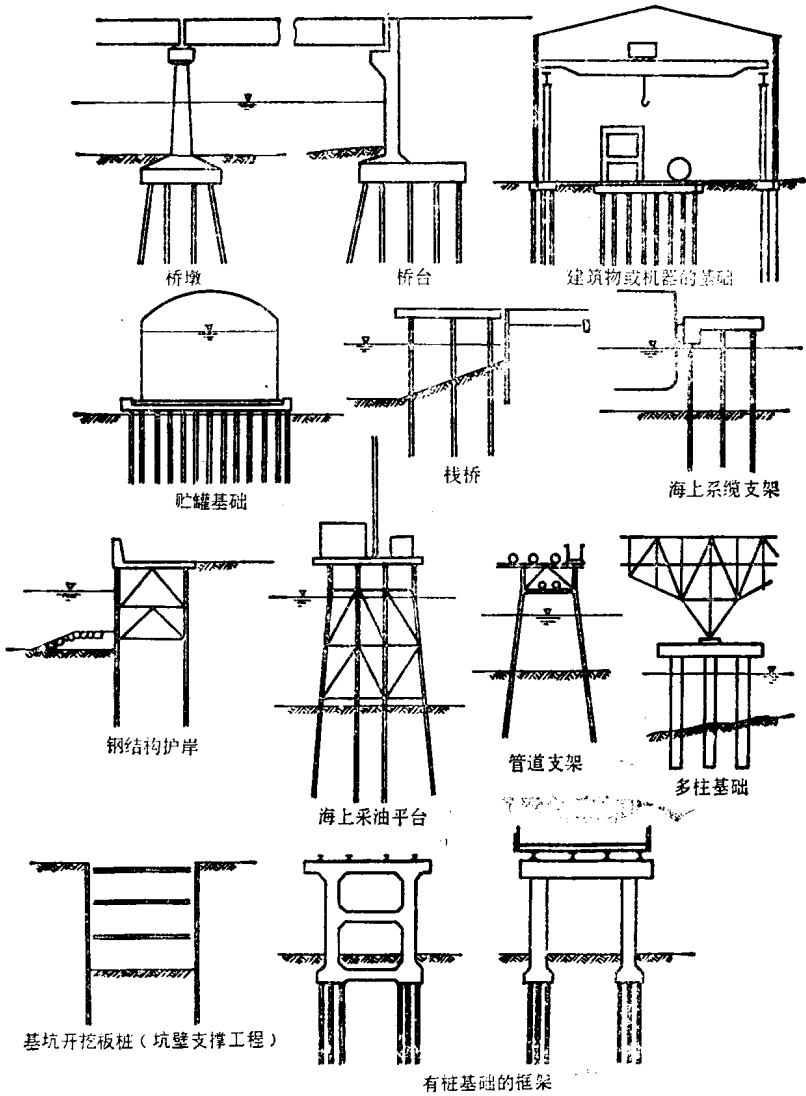


图1.1 桩结构物

- 桩结构物 {
- 桩基础——桥台，桥墩，机械基础，建筑物基础，贮罐基础
 - 港湾建筑物——栈桥，海上系缆支架，大型钢结构护岸，防波堤
 - 海洋建筑物——石油开采平台，管道支架，多柱基础
 - 特殊建筑物——海上作业脚手架，基坑开挖板桩（坑壁支撑工程），有桩基础的框架

1.1.3 桩结构物的计算步骤

对“设计”来说，通常是狭义的考虑结构物的构件计算及内力计算，但实际应该是指在最小费用及最大效果的原则下，为了实现对结构物所要求的功能而进行的一系列思考过程。例如在桩结构物中，包括场地布置的计划、对荷载的评价、材料的选择、施工条件的考虑等相当广泛的内容。

这样广泛的内容，要在一本书中包罗全部是困难的，而且作一般性的叙述也是没有意义的。本书特意起名为“桩结构物的计算方法”，就是从上述理由出发，将对象局限在桩结构

物的内力和变形计算方面。

可是，对连续梁及框架等超静定结构，通常是采用先假定结构形式（跨度等）和构件截面，再反复进行试算，最后确定经济结构的方法。

除了极其特殊的情况（一根独立的桩；桩头与刚性承台铰接的垂直桩群等）外，桩结构物本来就是超静定结构，如果再考虑正确评价地基特性的话，桩结构物是非线性结构，应力及应变不能利用迭加原理。但实际上，还是假定地基为线性变形体，采用将桩结构物视为线性弹性体的计算方法，仍然是超静定结构。

因此，按每根桩的容许承载力来设计桩结构物一般是不可能的，只是在前面提到的特殊情况下才有可能，象这样的考虑方法是木桩时代的沿袭，因此，一部分技术人员把基础看成绝对不动的构件来设计上部结构也不是没有缘由的。

实际的桩结构，无论是地基、桩、相互连成桩群的构件及承台，如果受到外力就产生变形，其结果，就象连续梁的支点产生位移，框架结点产生转动一样。在这样的桩结构物中，是由包括地基与桩在内的结构体系各组成部分的刚度来分配荷载的，由此而产生应力与变形，与一般的结构计算没有本质上的差异。

但是，在必须考虑地基与桩相互作用这一方面，就有桩结构物的特殊性了。

一般，桩结构物的计算是按图1.2所示的步骤进行。也就是：

1) 假定出桩结构物基本结构体系（桩结构物的大小及桩的布置等）和包括桩在内的各构件截面尺寸。

2) 求包含地基在内的结构体系中各组成部分的刚度或柔度，再将各组成部分的刚度或柔度联立求解，确定整个体系的刚度或柔度。用表示结构物刚度指标——刚度系数的计算方法称为位移法（或刚度法）；用表示结构物柔度指标——柔度系数的计算方法称为力法（或柔度法）。用任何一种计算方法都可得出相同的结果，但对桩结构物来说，位移法较为简便。

3) 求作用在假定结构及构件上的荷载。虽然有的荷载如作用在海洋结构物上的波力是随结构物的变形速度而变化的，但一般不考虑这种特殊情况。

4) 按照各构件的刚度或柔度，将荷载分配到各构件上。用位移法时是先求各构件的位移，再根据其位移引起相应的内力来分配荷载。

5) 根据分配到的荷载求各构件产生的内力与变形。

6) 检查各构件的内力与变形及整体结构的位移是否在容许范围内，超过时再返回步骤1)，继续同样的步骤。

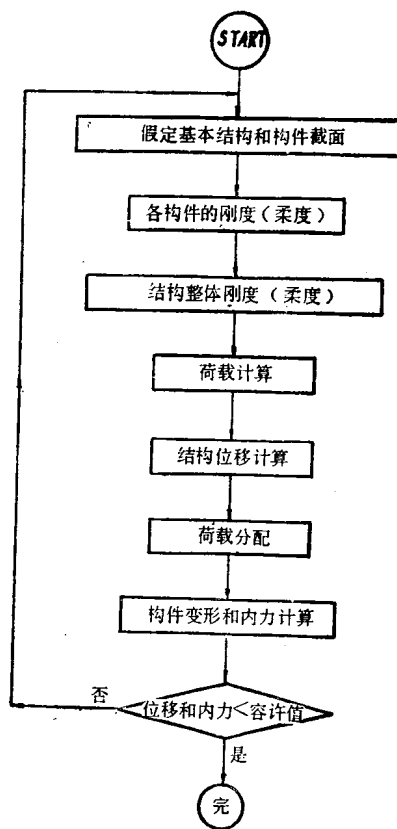


图1.2 桩结构物的计算步骤

由于结构物各构件为线性弹性体（是应力与应变成正比、符合虎克定律的物体），所以变形很小，可用迭加原理，上述的计算方法是可以采用的。但在土中这样的假定一般是不成立的，不过为了计算简便，在有条件的情况下，也可将土假定为线性弹性体，仍采用上述的计算方法，即使在不能将土假定为线性弹性体时，仍然可采用上述方法进行多次重复的收敛计算。

计算的步骤，原则上是上面所述的，正如在一般框架计算中可以忽略轴向变形那样，在桩结构物计算中也可将与桩头连结的承台考虑为刚体，忽略桩头的角位移（转角）。另外，对于木桩，可将桩结构物视为静定的结构体系。

重要的是，必须明确在满足什么样的条件时上述的假定才能成立，才可能简化，轻易的采用以很多假定为前提所导出的公式是非常危险的。

基于上述的计算方针，本书将重点叙述桩结构物计算所必须具备的知识，特别是对地基——桩体系构件刚度的评价，介绍结构体系的简化计算和考虑简化计算的前提条件以及适用的范围。

1.1.4 桩结构物的破坏形态

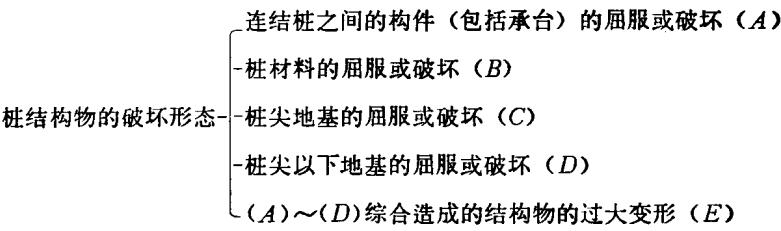
在前节桩结构物计算步骤的说明中，结构计算的方法实际是采用一般的容许应力法为前提的。

对于桩、桩的材料以及桩的轴向承载能力的容许应力及容许承载力的确定，如以极限强度的安全系数为例，一般情况时 $K = 3$ ，地震时 $K = 2$ 。可是，对于垂直于桩的力（横向力），由于必须考虑与桩的变形相应的地基反力及极限平衡状态时的反力形状，所以不能采用通常的容许应力法。

另外，如按照极限状态设计法计算结构物的极限承载能力，并检验在实际荷载作用下安全度的方法也是有可能的，但由于桩结构物一般对变形的要求严格，所以也不能只按极限状态的方法设计。

为了认识桩结构物的特殊性质，并理解计算方法的要点，如果假定桩结构物已破坏的话，那末研究破坏现象的形态将是极其重要的。

现在，设作用在桩结构物上的荷载（在2维结构物中是垂直荷载、水平荷载及力矩）按一定的比例增加，可认为有下面的几种破坏形态。



对于（A）~（C）项，一般安全系数较大，并且桩结构物通常是超静定结构。因此，由这些原因引起破坏的桩比由（D）、（E）项的原因而引起破坏的桩要安全。所以对（D）项只能得到较小的安全系数，或者是根本不能采用安全系数的考虑方法。

为了说明这个问题，必须根据桩结构物的埋入长度把桩区分为短桩和长桩两种情况。

当桩的埋入长度较短时，由于水平荷载及力矩的作用，使桩前产生的地基水平抗力在桩全长范围内超过地基的屈服强度，结构物要产生较大位移，若拉拔力也较大时就会造成倒塌，而且与圆弧滑移及板桩埋入长度的计算情况一样，对于地基屈服的安全系数，只能是接

近于 1 的值（参照图1.3（a））。

当桩的埋入长度为充分长时，在桩全长范围的水平方向上地基没有完全屈服，而是从地表向下逐渐地出现屈服，在桩体及连接构件上产生的内力随着地基的逐渐屈服而增加，最终相继超过材料的屈服值而使结构物产生最大变形。把地基的屈服及破坏范围逐渐扩展的现象称为进行性破坏现象，这是长桩所具有的特点（参照图1.3（b））。

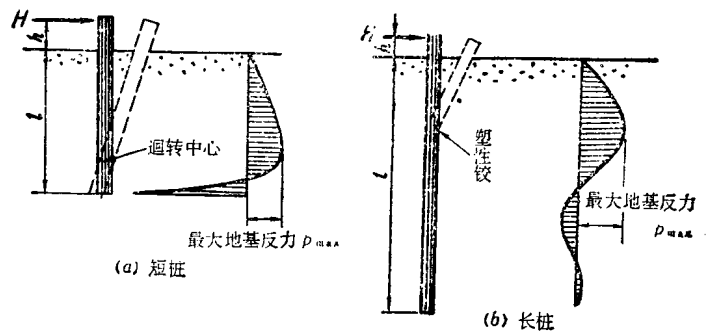


图1.3 桩基体系的破坏形态

对于这样的破坏形态，不能明确定义出安全系数及容许强度则是可以理解的。
由上所述，最容易引起桩结构物破坏的形态可以认为是随着桩前地基的屈服及破坏而导致的。由此可知，桩尖地基屈服及拉拔阻力的减小也将增加结构物倒塌的可能性。
另外，对于桩结构物来说，位移加大还会导致使用功能方面的损坏现象，例如桥梁基础等的过大位移就会使桥梁发生损坏。
由桩结构物的破坏形态可以判断，桩结构物的特征是材料的安全系数不一致，或者说具有必须同时考虑安全系数设计和变形问题这样的 2 元特性。

1.1.5 桩结构物材料的特性

桩结构物主要是由钢、混凝土及土这样一些不同材料所组成的组合结构，这些不同的材料其强度特性及变形特性是完全不同的。这一特征在单一材料的结构物中是见不到的。
关于这一点，宇都⁽¹⁾提出：对于钢、混凝土及土的强度与弹性模量，可以根据各自的 最大值与最小值之比，来表示材料的特殊性（参照表1.1）。

表1.1 桩结构物的材料特性

特 性 材 料		强 度 特 征		变 形 特 征	
		单轴强度(kg/cm ²)	$A \approx \frac{\text{最大值}}{\text{最小值}}$	弹性模量(kg/cm ²)	$B \approx \frac{\text{最大值}}{\text{最小值}}$
钢		3400~15000	4~5	2.0×10^6	1
混凝土		150~700	4~5	$(1.5 \sim 5.0) \times 10^5$	3~4
地 基	土	0.1~1.0	10	5~500	100
	砂 砾	粘着力 $C = 0.02 \sim 0.6$ ($\phi = 20^\circ \sim 30^\circ$)	30	300~3000	10
	软 岩	10~100	10	2000~10000	5

表 1.1 是以常用材料的极限强度为对象的，没有考虑屈曲及疲劳。从表中可知，对土以

(1) 宇都一馬：橋梁と基礎構造特集号，調査，総論，Vol.3, No.10 (1969.10) PP35~36

外的材料相对的说是比较均质的，而土作为桩基材料，其包括的范围是相当广泛的。

另外，对土来说，在钻探、取样以及材料试验等各个方面存在的技术困难，是在其他材料中所遇不到的，怎样处理具有不可避免误差的资料，以便作为设计时的参数也存在着解释上的问题。

因此，当进行桩结构物计算时，土的条件不能认为是固定不变的，它的改变将会对结构整体产生怎样的影响，有必要在计算时经常引起注意。正如星谷⁽²⁾所指出的，在将来采用了概率论的方法就可以解决了。

1.2 基本事项

本节叙述在以后各章要用到的关于梁及桩的微分方程式和求解时要用到的荷载函数。

1.2.1 梁和桩的微分方程式

(1) 土中部分桩的挠曲微分方程式

设竖直桩全部埋入土中，在断面的主平面内，地表面桩顶处作用有垂直于桩轴线的力（这时是水平力） H_0 和外力矩 M_0 ，桩的全长范围内作用有水平的分布荷载 $\bar{q}(x)$ *(图1.4)。

选择地面桩轴中心处为坐标轴的原点 o ，取桩的中心轴及与中心轴相垂直的方向为 x 轴及 y 轴，以向下及水平力 H_0 作用的方向为坐标轴的正方向。

由于这些荷载的作用使桩产生挠度，也使作为支承介质的地基产生连续分布的反力。关于这个反力我们将在第2章中详细叙述，在这里可以假定任意点 x 处桩的单位长度反力 $\bar{p}$ 是深度 x 与这一点桩的挠度 y 的函数，即 $\bar{p} = \bar{p}(x, y)$ 。

受到荷载的桩，除了产生弯曲与水平反力以外，在与土相接触的桩表面上还将产生竖直方向的力（摩擦力），现暂不考虑竖直线对挠度曲线的影响，而认为地基反力是水平作用在各断面上的。

试从受到分布荷载 $\bar{q}(x)$ (t/m)的桩上取出 dx 单元体，单元体的上下断面均为水平的**，则作用在这个单元上的力如图1.5所示。设作用在上断面左向（ y 的负方向）的剪力 S 为正，与此相应以作用在单元体断面反时针旋转（作为内力）的弯矩 M （正 S 所在截面的力矩）为正。在以后的推导公式中，也全是以此规定作为 S 与 M 的正方向，这是为了能与一般结构力学规定的符号相一致。

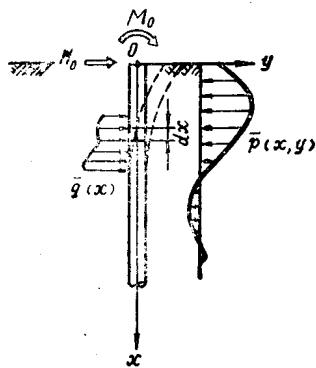


图1.4 土中部分桩的坐标系与力的正方向

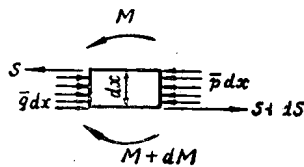


图1.5 单元体 dx 的力的平衡

(2) 星谷勝: 確率論手法による構造解析, 鹿島出版会 (1973), PP.152~165

* 每一符号在首次出现时给予定义。关于一般的用法汇总在附录1中。

** 如果桩的倾斜角远小于1的话，垂直于弹性曲线的断面可以置换为水平断面。可是当桩的挠度要考虑轴向力影响时，就不能这样近似（参照本节（5））。

考虑图1.5中单元体的平衡, 由水平方向力的和得出:

$$(S + dS) - S - \bar{p}(x, y)dx + \bar{q}(x)dx = 0 \quad (a)$$

因此

$$\frac{dS}{dx} = \bar{p}(x, y) - \bar{q}(x) \quad (b)$$

利用 $S = dM/dx$ 的关系, 则

$$\frac{dS}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} = \bar{p}(x, y) - \bar{q}(x) \quad (c)$$

式中 $\bar{p}(x, y)$ 、 $\bar{q}(x)$ 都是桩的单位长度的荷载强度, 其单位为 (t/m) 或 (kg/cm)。

如图1.6所示, 由于 y 的 2 阶微分 d^2y/dx^2 与弯矩 M 的符号常常是相反的, 所以可得出弯曲微分方程式为:

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = -M \quad (d)$$

式中 E 是桩材料的弹性模量; I 是桩的惯性矩; EI 称为抗弯刚度, 单位是 (kg-cm²) 或 (t-m²)。若假定在分析的区段里 EI 为常数, 并将 (d) 式 2 次微分代入 (c) 式, 则可得

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} = -\bar{p}(x, y) + \bar{q}(x) \quad (1.2.1)$$

这就是土中桩的挠曲微分方程式。

当分布荷载 $\bar{q}(x)$ 为作用于板桩上的剩余水压及桩背的土压时, 一般可设 $\bar{q}(x) = 0$, 此时可得出下面的形式:

$$EI \frac{d^4y}{dx^4} + \bar{p}(x, y) = 0 \quad (1.2.2)$$

关于 $\bar{p}(x, y)$ 具体的函数形式及 (1.2.2) 式的解法将在第 2 章里详细论述。无论地基是弹性的还是非弹性的, 与 (d) 式一样, 上面的挠曲微分方程式也总是能成立的。

(2) 地上部分桩及梁的挠曲微分方程式

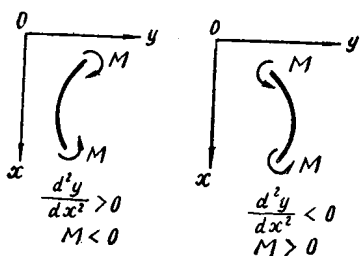


图1.6 弯曲微分方程式的符号

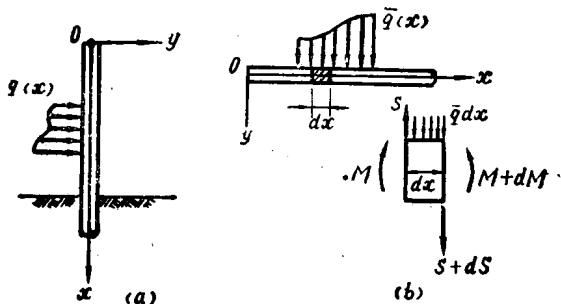


图1.7 地上部分的桩及梁的坐标体系

关于地上部分的桩, 可取桩头处作为坐标轴的原点, 并按照同土中桩一样的方法取 x 轴和 y 轴 (参照图1.7(a))。

关于水平的梁, 可取梁的左端为坐标轴的原点, 梁的中心轴为 x 轴, 竖直向下的方向为 y 轴, 剪力 S 与弯矩 M 的正方向如图所示 (参照图1.7(b))。

在桩及梁上如果作用有单位强度为 $\bar{q}(x)$ 的分布荷载, 由于不象土中桩那样会产生反力 $\bar{p}(x, y)$, 相当于 (1.2.1) 式中 $\bar{p}(x, y) = 0$ 的情况, 则其挠曲微分方程式为:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = \bar{q}(x) \dots\dots\dots (1.2.3)$$

这是 4 阶线性微分方程式，所以其通解为：

$$y = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \frac{1}{EI} \iiint \bar{q}(x) (dx)^4 \dots\dots\dots (1.2.4)$$

式中 a_1 、 a_2 、 a_3 、 a_4 是由边界条件确定的积分常数。

如果 $\bar{q}(x)$ 是 x 的简单函数的话，(1.2.4) 式的 4 重积分容易求出，但因局部荷载及集中荷载作用时是非常复杂的，所以荷载函数的形式留在 1.2.2 节内详述。

(3) 土中部分桩的轴向位移微分方程式

桩受到轴向荷载，在桩尖和桩周表面上就产生反力。设桩周表面上任意点的反力为 $\bar{p}$ ， $\bar{p}$ 是深度 x 和这一点桩的轴向位移 v 的函数，即 $\bar{p} = \bar{p}(x, v)$ 。如果取出桩的单元体 dx ，并考虑力的平衡条件（如图 1.8），则由竖直方向力的和为零可得出：

$$(N + dN) - N + \bar{p}(x, v) dx = 0 \dots\dots\dots (e)$$

因此

$$\frac{dN}{dx} = -\bar{p}(x, v) \dots\dots\dots (f)$$

式中 N 是轴向力，以 x 轴的正向为正； $\bar{p}$ 是作用于桩的单位长度上的反力，以向上为正。

由于轴向力 N 的作用，在单元体长度 dx 上产生的伸长是 dv ，根据虎克定律得出变形条件式为：

$$EA \frac{dv}{dx} = -N \dots\dots\dots (g)$$

式中 A 是桩的净截面积； v 是位移，以 x 轴的正向位移为正。设在区间内 EA 是常数，微分 (g) 式，并代入 (f) 式，则可得出

$$EA \frac{d^2 v}{dx^2} = \bar{p}(x, v) \dots\dots\dots (1.2.5)$$

这就是轴向位移 v 的微分方程式。

(4) 地上部分桩及梁的轴向位移微分方程式

在桩轴的正向上作用有单位长度的分布荷载 $\bar{q}(x)$ ，这时轴向位移 v 的微分方程式其形式是与 (1.2.5) 式相同的，但要考虑 $\bar{q}$ 的符号

$$EA \frac{d^2 v}{dx^2} = -\bar{q}(x) \dots\dots\dots (1.2.6)$$

其通解为：

$$v = b_1 + b_2 x - \frac{1}{EA} \iint \bar{q}(x) dx dx \dots\dots\dots (1.2.7)$$

式中 b_1 、 b_2 是积分常数，右边的 2 重积分是各种不同荷载情况的荷载函数，归纳在 1.2.2 节中。

(5) 受轴向力时桩的挠曲微分方程式——梁柱原理

(1)~(4) 中导出的公式都是假定桩的轴向力对挠度没有任何影响，正如 P. 6 脚注所述的，当桩的倾斜角较大时，轴力的影响就大，这时必须采用考虑轴力的挠曲微分方程式。

当桩是由轴向压力支配时，单元体的情况如图 1.9 所示。现假定轴向力 N 是竖向作用在

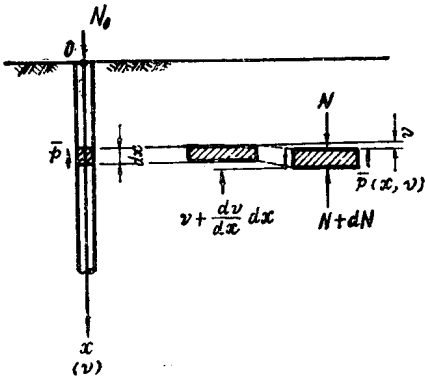


图 1.8 土中部分桩的轴向位移

上下截面的重心上, 并形成平衡状态, 因而不考虑桩侧面的摩擦力。

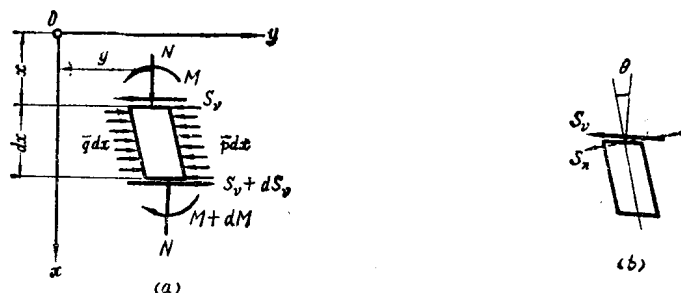


图1.9 轴力作用下桩的挠度

单元体两个水平面的距离为 dx , 根据单元体的力矩平衡有:

$$(M + dM) - M - Ndy - S_v dx = 0$$

即

$$\frac{dM}{dx} - N \frac{dy}{dx} - S_v = 0 \quad \dots\dots\dots (h)$$

式中 S_v 是如图示水平方向 (与轴向力垂直) 的剪力。在垂直于挠度曲线的截面上作用的法向剪力 S_n 可由图1.9(b)按下式求得:

$$S_n = S_v \cos \theta + N \sin \theta$$

θ 一般很小, 可以假定 $\cos \theta \approx 1$ 及 $\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{dy}{dx}$, 于是可以得出:

$$S_n = S_v + N \frac{dy}{dx} = \frac{dM}{dx} \quad \dots\dots\dots (i)$$

以下主要采用 S_v , 而 S_n 可通过 (i) 式求出。

以 $M = -EI(d^2y/dx^2)$ 代入 (h) 式并对 x 微分, 再用 (b) 式的 $dS_v/dx = \bar{p}(x, y) - q(x)$ 的关系可得:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2y}{dx^2} \right) + \frac{d}{dx} \left(N \frac{dy}{dx} \right) + \bar{p}(x, y) = \bar{q}(x) \quad \dots\dots\dots (1.2.8)$$

这是桩受轴向力时的基本公式, 利用 (1.2.8) 式开展理论研究的方法称为梁柱原理, 用在容易产生挠度的海洋结构物及管道的分析上。

轴向力对桩的弯曲挠度有怎样的影响呢? 这将在3.5节里作具体说明。(1.2.8) 式为格利塞 (Gleser) 方法的一般应用例子, 将在2.4.2节里介绍。本书中关于梁柱原理将不作详细论述。

1.2.2 荷载函数

将地上部分的桩及梁的挠曲微分方程式 (1.2.3) 的通解 (1.2.4) 式, 对 x 逐次微分, 其结果用矩阵表示如下:

$$\begin{Bmatrix} y \\ \frac{dy}{dx} \\ \frac{d^2y}{dx^2} \\ \frac{d^3y}{dx^3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ & 1 & 2x & 3x^2 \\ & & 2 & 6x \\ & & & 6 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} + \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} T(x) \\ S(x) \\ R(x) \\ Q(x) \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (1.2.9)$$