离散时间系统滤波的数学方法

中国科学院数学研究所概率组 编著

国防工业出版社

离散时间系统滤波的数学方法

中国科学院数学研究所概率组 编著

国防工業出版社

1975

内 容 简 介

本书是在中国科学院数学研究所概率组滤波討论班讲稿的基础上，对有关资料进行整理、补充、修改而写成的。本书內容大致包括了十多年来国内外关于离散时间系统递推滤波方法的主要结果。为了方便读者，在第一章较全面地介绍了所要用到的矩阵、概率与数理统计方面的知识，其余三章则分别讨论线性滤波、滤波的稳定性、误差分析、发散现象及其克服的方法，以及非线性滤波等。

本书可供从事有关工作的工程技术人员、数学工作者及大专院校师生参考。

离散时间系统滤波
的数学方法
中国科学院数学研究所概率组 编著
*
国防工业出版社 出版
北京市书刊出版业营业許可証出字第074号
新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售
煤炭工业出版社印刷厂印装
*
787×1092 1/32　印张 6 1/2　133千字
1975年9月第一版　1975年9月第一次印刷　印数：0,001—6,700册
统一书号：15034·1414　　定价：0.69元

前　言

所谓滤波，是指从接收到的受干扰的信号里尽可能地排除干扰，而分离出所需要的信号；也可以说，是通过对一系列带有误差的实际测量数据的处理，得出所需要的各种量的估计值。例如，用高射炮打敌机时，由雷达所测得的敌机在各时刻的位置数据，不可避免地会带有误差（即干扰）。然后要求用这些测量数据来估算敌机的位置和速度诸量（即所需要的信号），以便解出高射炮命中敌机应处的射击姿态。在估算位置和速度等量的过程中，就存在着滤波问题。

由于第二次世界大战期间军事技术等方面的需要，柯尔莫郭洛夫（Колмогоров）[1]和维纳（Wiener）[2]相继提出了平稳随机过程的最优线性滤波理论，这些理论在通讯、控制等技术领域内获得了广泛的应用，并且在应用中得到了发展。但是这些理论有其不足之处。首先，根据这种理论建立的滤波方法，必须把所用到的全部数据保存起来，而且每一时刻都要通过对这些数据进行运算，才能得到所需要的各种量的估计值。按照这种滤波方法设置的专用计算机，其存储量和计算量都是很大的，甚至于不能进行实时计算。另外，这种理论在解决非平稳过程的滤波问题时，给出能用的方法为数不多。因此，随着电子、军事以及空间技术等的发展，这种老的滤波方法越来越不能满足实际应用的需要。

六十年代初，卡尔曼（Kalman）[3]、布西（Bucy）[4]等

人提出了一种递推式滤波方法。这种方法不要求保存过去的测量数据；当新的数据测得之后，根据新的数据和前一时刻的诸量估计值，借助于系统本身的状态转移方程（动态方程），按照一套递推公式，即可算出新的诸量的估计值。这样就大大减少了滤波装置的存储量和计算量，同时它的适用范围也突破了平稳随机过程的限制。卡尔曼滤波方法出现以后，被成功地应用于飞行器的导航、导弹制导、再入弹道的计算，以及潜艇、飞机导航、火力控制等方面。最近还有人探讨它在工业自动化和气象预报等方面的应用。十多年来，在实践过程中又不断地丰富了这一方法本身及其理论内容，这说明新的滤波方法仍然随着生产技术的发展而不断在改进。正如毛主席在《实践论》中所指出的：**“客观世界的变化运动永远没有完结，人们在实践中对于真理的认识也就永远没有完结。”**

在我国，经过无产阶级文化大革命，社会主义建设更加蓬勃发展，科学技术领域的面貌日新月异，电子计算机越来越普遍地被使用；在生产斗争和科学实验中，遇到了很多需借助滤波方法来解决的实际问题。因此，滤波的理论与方法日益受到各方面的重视。为了适应形势发展的需要，我们组织了滤波讨论班，本书就是在讨论过程中对有关资料进行整理、补充和改进而写成的。由于我们缺乏实践经验，这里只能介绍滤波的数学理论与方法。

本书内容基本上包括了目前所用的离散时间系统递推滤波方法的主要结果。之所以仅限于讨论离散时间系统，一方面是因为它便于直接在数字计算机上实现；另一方面，通过这些内容，已能概括地反映出现代滤波理论在近十几年中的

发展情况。期图使读者在掌握本书的内容后，能够直接查阅最新的有关文献，并能在实际工作中运用这种滤波方法。当然，滤波的数学方法是和实际问题密切相连的，其收效大小将直接受实践检验。

全书共分四章：第一章介绍矩阵、概率和数理统计方面的预备知识；第二章给出由简单到复杂的各种线性系统的最优滤波公式的推导；第三章讨论滤波的稳定性、滤波的误差分析、滤波的发散现象及克服发散的某些方法；第四章介绍非线性系统的滤波。书后附有参考资料以便读者查阅。

由于水平所限，难免有错误，请读者批评指正。

符 号 说 明

$\equiv$ 定义为或恒等于。

$\approx$ 渐近等于。

$\cong$ 近似等于。

δ_{kl} 克朗内克（Kronecker）符号，即当 $k=l$ 时，$\delta_{kl}=1$；$k\neq l$ 时，$\delta_{kl}=0$。

A^{τ} 矩阵 A 的转置。

$|A|$ 方阵 A 的行列式。

TrA 方阵 A 的迹。

A^{-1} 非奇异方阵 A 的逆。

$\|A\|$ 矩阵 A 的范数。

$A\geqslant 0$ A 为非负定对称阵。

$A>0$ A 为正定对称阵。

$P\{\cdots\}$ 括弧{ }中所示事件的概率。

$p(x)$ 随机变量或随机向量 x 的概率密度。

$p(x|y)$ 给定 $\mathbf{y}=y$ 的条件下 x 的条件概率密度。

$x\in A$ x 在集合 A 中。

$x\bar{\in}A$ x 不在集合 A 中。

$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$（或 $\mathcal{N}(\mu,R)$）以 μ,σ^2（或 μ,R）为参量的一维（或多维）正态概率密度。

$\mathbf{x}\sim\mathcal{N}(\mu,R)$ 随机向量 x 的概率密度为 $\mathcal{N}(\mu,R)$。

$E\mathbf{x}$ 随机变量或随机向量 x 的均值（向量）。

$E(\mathrm{x}|y)$　给定 $\mathrm{y}=y$ 的条件下 x 的条件均值。

$Var\,\mathrm{x}$　随机变量或随机向量 x 的方差（阵）。

$Var(\mathrm{x}|y)$　给定 $\mathrm{y}=y$ 的条件下 x 的条件方差。

$Cov(\mathrm{x},\mathrm{y})$　随机变量或随机向量 x 与 y 的协方差（矩阵）。

$Cov(\mathrm{x},\mathrm{y}|z)$　给定 $\mathrm{z}=z$ 的条件下 x 与 y 的条件协方差。

$\{\mathrm{x}_k\}$　随机（向量）序列。

$\hat{\mathrm{x}}(\hat{x}(\mathrm{z}))$　对 x 的（基于量测 z 的）某种估计。

$\tilde{\mathrm{x}}$　估计的误差。

$\hat{\mathrm{x}}_{MV}$　x 的最小方差估计（条件均值估计）。

$\hat{\mathrm{x}}_{MA}$　x 的极大验后估计。

$\hat{\mathrm{x}}_{ML}$　x 的极大似然估计。

$\hat{\mathrm{x}}_{L}$　x 的线性最小方差估计（线性最优估计）。

$\hat{\mathrm{x}}_{LS}$　x 的最小二乘估计。

$\Phi_{k,k-1}$　线性系统（离散时间）的状态一步转移阵。

H_k　线性系统（离散时间）的量测阵。

$\{\mathrm{w}_k\}$　系统的动态噪声序列。

$\{Q_k\}$　动态噪声的方差阵序列。

$\{\mathrm{v}_k\}$　系统的量测噪声序列。

$\{R_k\}$　量测噪声的方差阵序列。

Z_l^k　从 l 时刻到 k 时刻的量测 z_l，z_{l+1}，…，z_k 合并组成的量测向量。

$\hat{\mathrm{x}}_{j|k}$　状态 x_j 基于量测 Z_1^k 的估计。

$P_{j|k}$　估计 $\hat{\mathrm{x}}_{j|k}$ 的均方误差（阵）。

$\hat{\mathrm{x}}_k$　状态 x_k 的滤波($\equiv \hat{\mathrm{x}}_{k|k}$)。

P_k　滤波 $\hat{x}_k$ 的均方误差（阵）$(\equiv P_{k|k})$。

$\hat{E}(x|z)$　x 在 z 上的投影。

K_k　卡尔曼滤波的增益矩阵。

$\hat{x}_N(k)$　x_k 的记忆长度为 N 的限定记忆滤波。

$P_N(k)$　滤波 $\hat{x}_N(k)$ 的均方误差（阵）。

x_k^0　k 时刻的标称状态。

x_k^Δ　状态 x_k 与标称状态 x_k^0 间的偏离。

$\hat{x}_k^d$　x_k 的 d 次迭代滤波。

$\|y\|_A^2$　二次型 $y^\tau Ay$ 的简记号。

目　　录

第一章　预备知识

第二章　线性滤波

第三章 滤波的渐近性质、误差分析及克服发散的方法

第四章 非线性滤波

离散时间系统滤波的数学方法

中国科学院数学研究所概率组 编著

国防工業出版社

1975

内容简介

本书是在中国科学院数学研究所概率组滤波討论班讲稿的基础上，对有关资料进行整理、补充、修改而写成的。本书内容大致包括了十多年来国内外关于离散时间系统递推滤波方法的主要结果。为了方便读者，在第一章较全面地介绍了所要用到的矩阵、概率与数理统计方面的知识，其余三章则分别讨论线性滤波、滤波的稳定性、误差分析、发散现象及其克服的方法，以及非线性滤波等。

本书可供从事有关工作的工程技术人员、数学工作者及大专院校师生参考。

离散时间系统滤波
的数学方法
中国科学院数学研究所概率组 编著
*
国防工业出版社 出版
北京市书刊出版业营业許可証出字第074号
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
煤炭工业出版社印刷厂印装
*
787×1092 1/32　印张 6 1/2　133千字
1975年9月第一版　1975年9月第一次印刷　印数：0,001—6,700册
统一书号：15034·1414　定价：0.69元

前　言

所谓滤波，是指从接收到的受干扰的信号里尽可能地排除干扰，而分离出所需要的信号；也可以说，是通过对一系列带有误差的实际测量数据的处理，得出所需要的各种量的估计值。例如，用高射炮打敌机时，由雷达所测得的敌机在各时刻的位置数据，不可避免地会带有误差（即干扰）。然后要求用这些测量数据来估算敌机的位置和速度诸量（即所需要的信号），以便解出高射炮命中敌机应处的射击姿态。在估算位置和速度等量的过程中，就存在着滤波问题。

由于第二次世界大战期间军事技术等方面的需要，柯尔莫郭洛夫（Колмогоров）[1]和维纳（Wiener）[2]相继提出了平稳随机过程的最优线性滤波理论，这些理论在通讯、控制等技术领域内获得了广泛的应用，并且在应用中得到了发展。但是这些理论有其不足之处。首先，根据这种理论建立的滤波方法，必须把所用到的全部数据保存起来，而且每一时刻都要通过对这些数据进行运算，才能得到所需要的各种量的估计值。按照这种滤波方法设置的专用计算机，其存储量和计算量都是很大的，甚至于不能进行实时计算。另外，这种理论在解决非平稳过程的滤波问题时，给出能用的方法为数不多。因此，随着电子、军事以及空间技术等的发展，这种老的滤波方法越来越不能满足实际应用的需要。

六十年代初，卡尔曼（Kalman）[3]、布西（Bucy）[4]等

人提出了一种递推式滤波方法。这种方法不要求保存过去的测量数据；当新的数据测得之后，根据新的数据和前一时刻的诸量估计值，借助于系统本身的状态转移方程（动态方程），按照一套递推公式，即可算出新的诸量的估计值。这样就大大减少了滤波装置的存储量和计算量，同时它的适用范围也突破了平稳随机过程的限制。卡尔曼滤波方法出现以后，被成功地应用于飞行器的导航、导弹制导、再入弹道的计算，以及潜艇、飞机导航、火力控制等方面。最近还有人探讨它在工业自动化和气象预报等方面的应用。十多年来，在实践过程中又不断地丰富了这一方法本身及其理论内容，这说明新的滤波方法仍然随着生产技术的发展而不断在改进。正如毛主席在《实践论》中所指出的：**“客观世界的变化运动永远没有完结，人们在实践中对于真理的认识也就永远没有完结。”**

在我国，经过无产阶级文化大革命，社会主义建设更加蓬勃发展，科学技术领域的面貌日新月异，电子计算机越来越普遍地被使用；在生产斗争和科学实验中，遇到了很多需借助滤波方法来解决的实际问题。因此，滤波的理论与方法日益受到各方面的重视。为了适应形势发展的需要，我们组织了滤波讨论班，本书就是在讨论过程中对有关资料进行整理、补充和改进而写成的。由于我们缺乏实践经验，这里只能介绍滤波的数学理论与方法。

本书内容基本上包括了目前所用的离散时间系统递推滤波方法的主要结果。之所以仅限于讨论离散时间系统，一方面是因为它便于直接在数字计算机上实现；另一方面，通过这些内容，已能概括地反映出现代滤波理论在近十几年中的

发展情况。期图使读者在掌握本书的内容后，能够直接查阅最新的有关文献，并能在实际工作中运用这种滤波方法。当然，滤波的数学方法是和实际问题密切相连的，其收效大小将直接受实践检验。

全书共分四章：第一章介绍矩阵、概率和数理统计方面的预备知识；第二章给出由简单到复杂的各种线性系统的最优滤波公式的推导；第三章讨论滤波的稳定性、滤波的误差分析、滤波的发散现象及克服发散的某些方法；第四章介绍非线性系统的滤波。书后附有参考资料以便读者查阅。

由于水平所限，难免有错误，请读者批评指正。

符 号 说 明

$\equiv$ 定义为或恒等于。

$\approx$ 渐近等于。

$\cong$ 近似等于。

δ_{kl} 克朗内克（Kronecker）符号，即当 $k=l$ 时，$\delta_{kl}=1$；$k\neq l$ 时，$\delta_{kl}=0$。

A^{τ} 矩阵 A 的转置。

$|A|$ 方阵 A 的行列式。

TrA 方阵 A 的迹。

A^{-1} 非奇异方阵 A 的逆。

$\|A\|$ 矩阵 A 的范数。

$A\geqslant 0$ A 为非负定对称阵。

$A>0$ A 为正定对称阵。

$P\{\cdots\}$ 括弧{ }中所示事件的概率。

$p(x)$ 随机变量或随机向量 $\mathbf{x}$ 的概率密度。

$p(x|y)$ 给定 $\mathbf{y}=y$ 的条件下 $\mathbf{x}$ 的条件概率密度。

$x\in A$ x 在集合A中。

$x\bar{\in}A$ x 不在集合A中。

$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$（或 $\mathcal{N}(\mu,R)$）以 μ,σ^2（或 μ,R）为参量的一维（或多维）正态概率密度。

$\mathbf{x}\sim\mathcal{N}(\mu,R)$ 随机向量 $\mathbf{x}$ 的概率密度为 $\mathcal{N}(\mu,R)$。

$E\mathbf{x}$ 随机变量或随机向量 $\mathbf{x}$ 的均值（向量）。