

初等代数复习及研究

李嘉乐 编著

青海人民出版社

1992年·西宁

初等代数复习及研究

李嘉乐 编著

青海人民出版社出版

(西宁市西关大街96号)

青海省新华书店发行 青海新华印刷厂印刷

开本: 650×1168毫米 1/32 印张: 18.5 字数: 415千

1992年9月第1版

1992年9月第1次印刷

印数: 0,001—2,560

ISBN 7-225-00528-6/G·198 定价: 6.50元

前 言

加速发展社会主义教育，尤其是少数民族教育，对提高我国人民的文化素质，是十分重要的，而提高教育质量的关键在于教师。

为了帮助少数民族中学教师透彻理解中学代数的基本原理、基础知识和基本方法，我们根据国家教委制订的有关教学大纲，参照部分师范院校《初等代数研究》及现行普通中学教材，结合少数民族学生学习的特点，编写了这本普及与提高相结合的《初等代数复习及研究》教材。

本书系统地归纳和总结了中学代数的基本原理、基础知识和基本方法，在知识的广度和深度上作了适当的提高和加深，并对教学中存在的一些疑难问题作了细致的讨论，同时强调了一些容易忽视的最基本的问题。

著名数学家哈尔莫斯(P·R·Halmos)有句名言：“问题是数学的心脏。”这一观点已被人们公认。本书始终围绕数学问题展开讨论，通过对精选的典型例题的分析，总结了许多常用的解题方法和技巧。大部分例题力求给予最简单的解法或证明，少部分例题则给出了多种解法，以利于开阔思路，启迪思维。

编写本书时，还特别注意反映近几年来研究初等代数教学的诸多最新成果，以此来充实初等代数教材，使内容更加新

颖，给读者的学习和研究以新的启示，培养其创造能力。

本书可作为民族师范院校初等代数课的教材，亦可作为中学数学教师的教学参考，也适合高中学生及广大数学爱好者自学。

编 者

1992年2月1日

目 录

第一章 实数	(1)
§ 1.1 自然数 数学归纳法	(1)
§ 1.2 整数	(7)
§ 1.3 有理数与无理数	(25)
§ 1.4 实数	(32)
习题一	(37)
第二章 复数	(41)
§ 2.1 复数的概念	(42)
§ 2.2 复数的几何表示	(49)
§ 2.3 复数的三角形式	(59)
§ 2.4 复数的开方	(67)
§ 2.5 复数模的性质	(76)
习题二	(79)
第三章 多项式	(86)
§ 3.1 多项式的基本概念	(86)
§ 3.2 多项式的恒等变形	(98)
§ 3.3 多项式的因式分解	(102)

习题三	(113)
第四章 分式	(121)
§ 4.1 有理分式	(121)
§ 4.2 有理分式的恒等变形	(127)
§ 4.3 部分分式	(133)
习题四	(139)
第五章 根式	(144)
§ 5.1 算术根的基本概念	(144)
§ 5.2 算术根的计算法则	(148)
§ 5.3 根式的化简	(150)
§ 5.4 根式的运算	(156)
习题五	(164)
第六章 指数式与对数式	(168)
§ 6.1 指数概念的推广	(168)
§ 6.2 对数式	(185)
习题六	(194)
第七章 三角式与反三角式	(197)
§ 7.1 三角式的概念	(197)
§ 7.2 三角式的恒等变形	(211)
§ 7.3 反三角式的概念	(228)
§ 7.4 反三角式的恒等变形	(234)
习题七	(238)

第八章 初等函数 (246)

§ 8.1 函数的一般概念 (246)

§ 8.2 初等函数及其分类 (252)

§ 8.3 函数的几种特性 (257)

§ 8.4 基本初等函数 (271)

§ 8.5 初等函数超越性的证明 (284)

习题八 (289)

第九章 初等方程论 (295)

§ 9.1 方程的基本概念 (295)

§ 9.2 一元方程的同解性 (297)

§ 9.3 一元一次方程 (301)

§ 9.4 一元二次方程 (302)

§ 9.5 一元 n 次方程 (313)

§ 9.6 有理分式方程 (328)

§ 9.7 无理方程 (332)

§ 9.8 指数方程与对数方程 (342)

§ 9.9 三角方程 (348)

§ 9.10 二元一次不定方程 (366)

习题九 (371)

第十章 不等式 (380)

§ 10.1 不等式的概念及其性质 (380)

§ 10.2 不等式的证明 (382)

§ 10.3 解不等式 (419)

习题十	(455)
第十一章 数列	(467)
§ 11.1 数列的基本概念	(467)
§ 11.2 等差数列	(474)
§ 11.3 等比数列	(486)
§ 11.4 特殊数列的求和	(494)
§ 11.5 线性递归数列	(503)
习题十一	(523)
第十二章 排列和组合	(528)
§ 12.1 加法原理和乘法原理	(528)
§ 12.2 排列	(530)
§ 12.3 组合	(539)
§ 12.4 一些特殊的排列、组合问题	(566)
习题十二	(579)

第一章 实 数

数是初等代数最基本的研究对象，研究初等代数就从它开始。在中学里，我们已经知道，数的发展经历了自然数、整数、有理数、无理数、实数及复数等几个阶段。本章将遵循这一线索，概要阐述数的有关知识，并对一些与数有关的常用方法比如数学归纳法等作较深入的介绍。

§ 1.1 自然数 数学归纳法

一、自然数

自然数，即

$$1, 2, \dots, n, \dots$$

全体自然数放在一起，组成一个集合，称为自然数集合，记作 N ，即

$$N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}.$$

自然数集合是一个有序集合，即对于任何自然数 a 和 b 有且仅有下列关系之一成立：

或是 $a = b$ (a 等于 b)，

或是 $a < b$ (a 小于 b)，

或是 $a > b$ (a 大于 b)。

自然数的“相等”、“大小”关系，有下列性质：

性质1 (1) 对任何 $a \in N$ ，有 $a = a$ (反身性)；

(2) 对任何 $a, b \in N$ ，若 $a = b$ ，则 $b = a$ (对称性)；

(3) 对任何 $a, b, c \in N$ ，若 $a = b, b = c$ ，则 $a = c$ (传递性)。

性质2 (1) 对任何 $a, b \in N$ ，当且仅当 $a < b$ 时 $b > a$ (逆性)；

(2) 对任何 $a, b, c \in N$ ，若 $a < b, b < c$ ，则 $a < c$ (传递性)。

自然数集合关于加法和乘法运算是封闭的，即任何两个自然数的和与积仍是自然数，但是，关于减法和除法运算不封闭，比如 $1 - 2 = -1 \notin N, 1 \div 2 \notin N$ 。

性质3 自然数加法满足交换律与结合律，即对任何 $a, b, c \in N$ ，有

$$a + b = b + a,$$

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

性质4 自然数乘法满足交换律与结合律，即对任何 $a, b, c \in N$ ，有

$$ab = ba,$$

$$(ab)c = a(bc).$$

性质5 自然数乘法对加法满足分配律，即对任何 $a, b, c \in N$ ，有

$$a(b + c) = ab + ac,$$

$$(b + c)a = ba + ca.$$

把自然数加法、乘法与“小于”关系联系在一起，有

性质6 设 $a, b, c \in N$, 且 $a \leq b$, 则

(1) $a + c \leq b + c$ (加法单调性);

(2) $ac \leq bc$ (乘法单调性)。

这些性质是自然数最基本也是最重要的性质, 利用自然数的基数理论和序数理论可以给出它们的证明, 有兴趣的读者可参阅有关专著。

二、最小数原理 数学归纳法

容易看出, 1是自然数集中的最小数, 这也是自然数最基本的性质. 不仅如此, 自然数集的任一非空子集也有最小数, 比如集合

$$\{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$$

$$\{4, 7, \dots, 3n+1, \dots\}$$

都是自然数集的子集, 分别有最小数2, 4。

一般地, 我们有

定理1 (最小数原理) 自然数集的任意一个非空子集中, 必有一个最小数。

证 设 S 是一个自然数集的非空子集, 在 S 中任意取出一个数 m , 从1到 m 共有 m 个自然数, 所以 S 中不超过 m 的数最多有 m 个. 因为这是有限个数, 所以其中有一个最小数. 用 k 表示这个最小数. k 对于 S 中不超过 m 的数来说是最小的, 而 S 中其余的数都比 m 大, 因而更比 k 大. 所以 k 就是 S 中的最小数。

最小数原理是我们常用的证明方法——数学归纳法的理论根据。

定理2 (第一数学归纳法) 设有一个与自然数 n 有关的命题. 如果

(1) 当 $n=1$ 时命题成立;

(2) 假设 $n=k$ 时命题成立, 则 $n=k+1$ 时命题也成立;
那么这个命题对于一切自然数 n 都成立。

证 假设命题不是对一切自然数都成立。令 S 表示使命题不成立的自然数所成的集合, 则 $S \neq \phi$ 。于是根据最小数原理, S 中有最小数 h 。显然, $h \neq 1$, 否则将与(1)矛盾。于是, $h-1$ 是一个自然数。因为 h 是 S 中的最小数, 所以 $h-1 \notin S$ 。这就是说, 命题对于 $h-1$ 来说成立; 然而 $h \in S$, 所以命题对于 h 来说不成立, 这与(2)矛盾。

数学归纳法是一种证明与自然数 n 有关的数学命题的重要方法, 其中(1)是递推的基础, (2)是递推的依据, 这两个环节缺一不可。

有些命题是从某一个自然数 n_0 以后成立。这时仍然可以应用数学归纳法。只要把(1)中 $n=1$ 换成 $n=n_0$ 就行了, 我们有

推论1 设有一个与自然数 n 有关的命题。如果

(1) 当 $n=n_0$ 时命题成立;

(2) 假设 $n=k$ ($k \in N$, 且 $k \geq n_0$) 时命题成立, 则 $n=k+1$ 时命题也成立;

那么这个命题对于从 n_0 开始的所有自然数 n 都成立。

有时, 我们还需要用到数学归纳法的下列变形。

推论2 设有一个与自然数 n 有关的命题。如果

(1) 当 $n=1, 2, \dots, l$ 时命题成立;

(2) 假设 $n=k$ 时命题成立, 则 $n=k+l$ 时命题也成立;

那么这个命题对于一切自然数 n 都成立。

例1 用数学归纳法证明

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

证 (1) 当 $n=1$ 时, 左边 $= 1^2 = 1$, 右边 $= \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$,

等式成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时等式成立, 就是

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

那么,

$$\begin{aligned} & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\ &= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}. \end{aligned}$$

这就是说, 当 $n=k+1$ 时等式也成立.

根据(1)和(2), 可知等式对任何 $n \in N$ 都成立.

例2 证明: 用票面为3分和5分的邮票可以支付任何 n (n 是大于7的自然数) 分的邮资.

证 (1) 因为

$$8 = 5 + 3, \quad 9 = 3 + 3 + 3, \quad 10 = 5 + 5,$$

$$11 = 3 + 3 + 5, \quad 12 = 3 + 3 + 3 + 3, \quad 13 = 5 + 3 + 5$$

$$14 = 3 + 3 + 3 + 5, \quad 15 = 5 + 5 + 5,$$

所以当 $n=8, 9, \dots, 15$ 时, 命题成立.

(2) 假设 $n=k$ (k 是大于7的自然数) 时, 命题成立. 当 $n=k+8$ 时, 命题显然成立.

根据推论2知, 命题成立.

在有些情况下, 归纳法假设“命题对于 $n=k$ 成立”还不够, 而需要较强的假设, 我们有

定理3 (第二数学归纳法) 设有一个与自然数 n 有关的命题. 如果

(1) 当 $n=1$ 时命题成立;

(2) 假设命题对于一切小于 k 的自然数来说成立, 则命题对于 k 来说也成立;

那么命题对于一切自然数 n 来说都成立.

证 假设命题不是对一切自然数都成立. 令 S 表示使命题不成立的自然数所成的集合, 则 $S \neq \emptyset$. 根据最小数原理, S 中有最小数 h . 由于 $1 \in S$, 所以 $h \neq 1$, 因而 $h-1$ 是一个自然数. 又 h 是 S 中的最小数, 故 $1, 2, \dots, h-1 \notin S$. 也就是说, 命题对于小于 h 的自然数 $1, 2, \dots, h-1$ 成立, 但对于 h 来说不成立. 这与(2)矛盾, 所以, 命题对一切自然数 n 都成立.

第一数学归纳法与第二数学归纳法总称数学归纳法, 它们的区别在于后者的归纳假定加强了. 前者是数学归纳法的标准形式.

例3 已知 $a_1 = a_2 = 1$,

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n = 3, 4, 5, \dots,$$

求证 $a_n < 2^n$, $n = 1, 2, 3 \dots$

证 (1) 由于 a_n, a_{n-1}, a_{n-2} 之间的关系建立在 a_1, a_2 的基础上, 所以首先必须就 $n=1$ 与 $n=2$ 的情形进行证明. 显

然，这时命题成立。

(2) 假设当 $1 \leq n < k$ 时, $a_n < 2^n$, 当 $n = k$ ($k \geq 3$) 时,

$$\begin{aligned} a_k &= a_{k-1} + a_{k-2} \\ &< 2^{k-1} + 2^{k-2} \\ &= 2^{k-2} (2 + 1) < 2^{k-2} \cdot 2^2 = 2^k. \end{aligned}$$

也就是说, 当 $n = k$ 时命题成立。

根据定理3知, 命题成立。

§ 1.2 整 数

一、整数的概念

整数是这样一些数:

$$\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots.$$

它是在自然数基础上, 添加了零和负整数后得到的。

全体整数组成的集合, 称为整数集合, 用字母 Z 表示, 即

$$Z = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}.$$

自然数集就是正整数集合, 因而是 Z 的一个真子集。

和自然数集合一样, 整数集合也是一个有序集合, 自然数集合的顺序关系以及上节中从性质1—6(1)等诸性质在整数集合中仍然成立, 不再赘述。但是应该指出的是, 在整数集合中和自然数的性质6(2)相应的性质应为

设 $a, b, c \in Z$, $a < b$, 则当 $c > 0$ 时, $ac < bc$; 当 $c = 0$ 时, $ac = bc$; 当 $c < 0$ 时, $ac > bc$ 。

整数集合关于加法、减法、乘法运算是封闭的, 但是关于除法运算仍不封闭。

整数集合中不存在最小数，这点与自然数集合不同，但在稍微加强的条件下，我们有

性质7 任何一个整数的有下界的非空集合中，必有一个最小数。

因此在整数的情形下，有如下形式的数学归纳法。

性质8 设有一个与整数 n ($n \geq n_0, n_0 \in \mathbb{Z}$) 有关的命题，如果

(1) 当 $n = n_0$ 时，命题成立；

(2) 假设 $n = k$ ($k \in \mathbb{Z}$, 且 $k \geq n_0$) 时命题成立，则 $n = k + 1$ 时命题也成立；

那么这个命题对于从 n_0 开始的所有整数 n 都成立。

二、整除及其性质

设 a, b 是任意两个整数，其中 $b \neq 0$ ，如果有一个整数 q ，使得

$$a = bq,$$

就说 b 整除 a ，这时也说 a 是 b 的倍数， b 是 a 的因数，记作 $b \mid a$ 。

例如， $2 \mid 6$ ， $-7 \mid 14$ ， $8 \mid -24$ 。如果这样的整数 q 不存在，就说 b 不能整除 a ，记作 $b \nmid a$ 。例如， $3 \nmid 14$ ， $-5 \nmid 13$ 。

显然，对于任何不等于零的整数 a 都有

$$1 \mid a, a \mid 0, a \mid a.$$

定理1 若 $b \mid a, c \mid b$ ，则 $c \mid a$ 。

证 根据整除的定义，我们知道存在整数 q, r ，使

$$a = bq, b = cr.$$

因此 $a = c(qr)$ 。

但 qr 是一个整数，故再由定义， $c \mid a$ 。

定理2 若 $m \mid a$ ，则对任何整数 $c, m \mid ac$ 。

定理3 若 $m \mid a$, $m \nmid b$, 则 $m \nmid (a+b)$.

证 根据假设知, 存在整数 q 和 r , 使

$$a = mq, \quad b = mr.$$

因此 $a+b = m(q+r)$.

故再由定义, $m \mid (a+b)$.

由定理2和定理3, 可得

推论 若 $m \mid a_1$, $m \mid a_2$, $\dots$, $m \mid a_n$, 则对任何整数 c_1 , c_2 , $\dots$, c_n , 有 $m \mid (a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_nc_n)$.

例1 设 $a, b, c, d, m \in \mathbb{Z}$, 且 $m \mid (10a-b)$, $m \mid (10c-d)$, 求证

$$m \mid (ad-bc).$$

证 根据题设, 存在整数 q, r , 使

$$10a-b = mq, \quad 10c-d = mr.$$

于是 $10a = b + mq$, $d + mr = 10c$.

两式相乘, 并化简, 得

$$ad + amr = bc + cmq,$$

$$ad - bc = m(cq - ar)$$

所以 $m \mid (ad - bc)$.

能够被2整除的数叫做偶数, 偶数可以表为 $2n$ ($n \in \mathbb{Z}$) 的形式. 偶数包括正偶数、零与负偶数. 不能被2整除的数叫奇数, 奇数可以表为 $2n+1$ ($n \in \mathbb{Z}$) 的形式. 奇数包括正奇数与负奇数.

例2 求证: 任何奇数的平方减去1总能够被8整除.

证 $(2n+1)^2 - 1 = 4n^2 + 4n = 4n(n+1)$.

因为 $n, n+1$ 是两个连续整数, 所以其中必有一个是偶数, 从而 $2 \mid n(n+1)$. 于是, $8 \mid 4n(n+1)$. 这样命题获证.