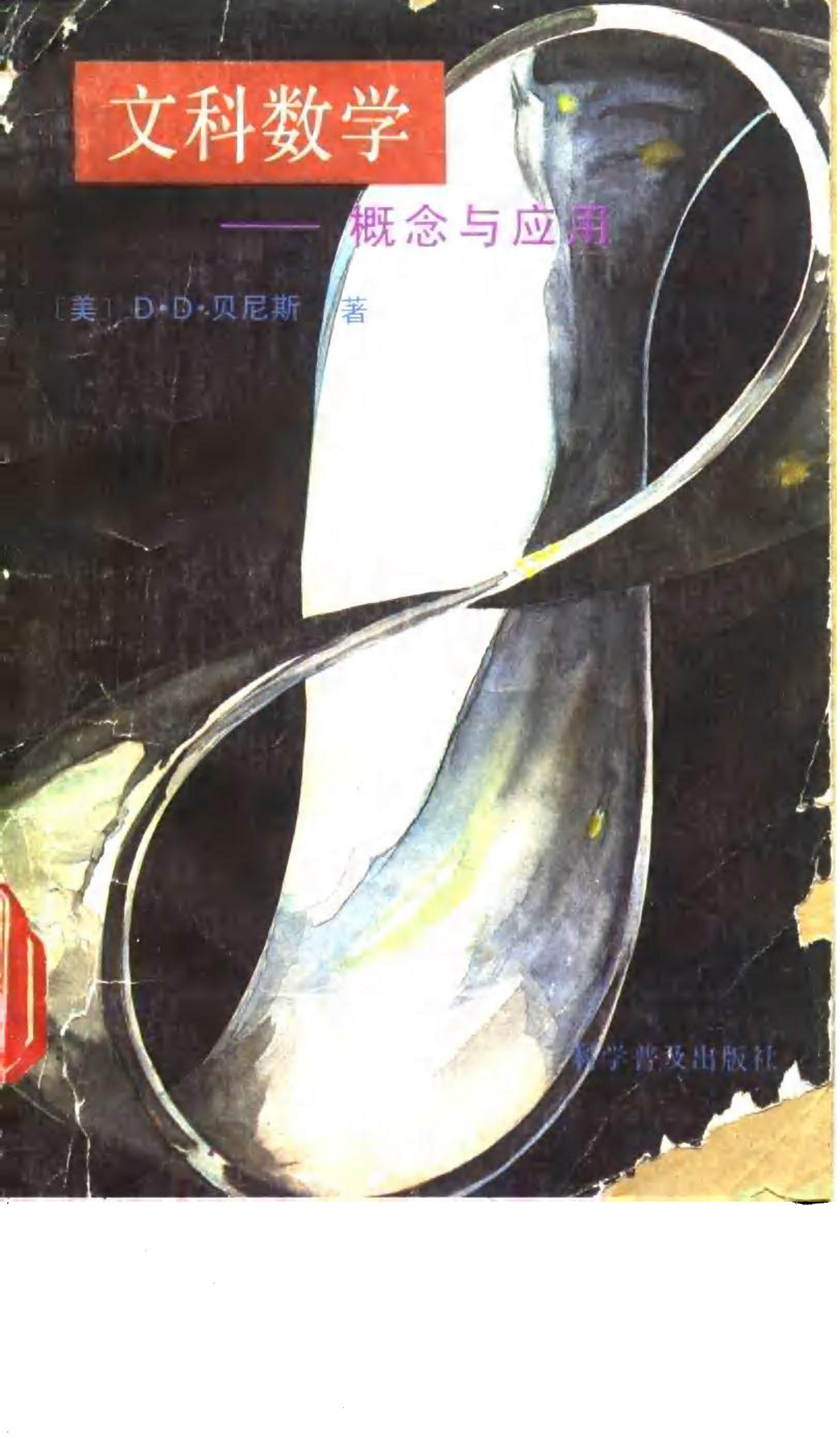
文科数学

——概念与应用

[美] D·D·贝尼斯 著



科学普及出版社

文 科 数 学

——概 念 与 应 用

〔美〕D. D. 贝尼斯　著
袁向东　译
罗声雄　校

科学普及出版社

内 容 提 要

本书以通俗易懂的语言，介绍了数学的思想、概念和各主要分支的内容及其应用，不同于一般的数学教科书和专著。各章节都从具体实例出发，讲清了许多数学概念、定理和方法。全书写得深入浅出，具体生动，独具特色。可作为大学文科的数学教材，并供中学教师、中学生和自学青年参考，也适合于非数学专业的具有中等以上文化程度的各类人员阅读。

MATHEMATICS
IDEAS AND APPLICATIONS
DANIEL D.BENICE
ACADEMIC PRESS
* * *
文科数学——概念与应用
〔美〕D.D.贝尼斯 著
袁向东 译
罗声雄 校
责任编辑：王正藩 颜
封面设计：周秀璋
技术设计：王予南
•
科学普及出版社出版（北京海淀区白石桥路32号）
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
北京燕山印刷厂印刷
•
开本：850×1168毫米1/32印张：13.25 字数：270千字
1988年11月第1版 1988年11月第1次印刷
印数：1—2102 册 定价：5.35元
ISBN 7-110-00472-4/O·12

译 者 的 话

数学，是一门历史悠久的科学。在数学家心目中，她象一座景色优美的花园，到处生长着人们精心培育的奇花异草和已成栋梁之材的林木，它们能为其它科学乃至整个人类社会贡献其全部精华。不过在外行人眼里，数学总不象物理、化学、天文、地学、生物等学科那样实在，它的高度抽象的形式常使初学者感到神秘莫测，美丽的花园也因而成了扰人的迷宫，许多人在入口处便望洋兴叹了。D.D.贝尼斯的这个读本为外行人和初学者提供了一份初步领略数学花园的指南。本书用初等的观点阐述了数学中许多最基本的内容与思想。从古老的菲波那契序列到现代的突变理论，各种新鲜和动人的课题，以极通俗和形象的方式出现在读者面前。你只要浏览一下本书的目录就会大开眼界。如果能坚持读下去，它至少能使你有勇气迈进数学花园的大门，也许你会因此而喜欢上数学呢!

随着科学的进步和社会的发展，数学正以前所未有的速度渗入各门自然科学和社会科学之中。了解数学而不了解它的应用，肯定是一大缺憾。本书作者花费很大精力收集了数学应用的各种实例。所涉及的范围之广是一般普及读物中少见的；几乎各行各业的读者都能在书中找到数学在他所从事的行业中的应用。这些应用涉及人类学、考古学、艺术、天文、生物学、商业、化学、农业、计算机和数据处理、生态学、经济学、电子学、地理学、地质学、历史学、语言学、医学、矿物学、音乐、物理学、心理学和社会学等。书中还谈到数学在逻辑、娱乐、变戏法和数学游戏方面发挥作用的有趣例证。

学数学而不亲自动手去做点数学题，这是学数学的一大忌。本书设计了与正文内容的水平相当的大量习题，读者只要学过算

术，有点中学代数知识就能完成它们。应该说，这些习题是正文内容的延伸和补充，它的重要性不亚于正文。所以读者千万不要因懒怠而失去加深理解的机会。

D.D. 贝尼斯的这本书是为大学文科学生和接受普通教育的人写的。其目的是告诉读者数学的重要，帮助读者增强数学的理解力，同时也让读者领略数学的美，提高数学修养的水平。“开卷有益”对这本书的读者是不会错的。

译　者

1987.11.

目　录

第一章　数学中的模式

“数学家象画家和诗人一样，是模式制造家。”这句话引自哈代(G. H. Hardy)的《数学家的自白》。你可能会觉得，这种说法跟你对数学的理解不大吻合。也许，你以为数学主要就是进行计算和推导。假如你真的持这种观点，那么，阅读本书将使你感到惊喜。本章和本书的其余许多章节，将向你展现很多数学领域中蕴含着的美丽而迷人的模式。我们希望本章能激起你的求知欲。以后每章则从直观和实践两个角度，逐一向你介绍数学的各个分支。在若干事例中，你将会看到以“娱乐和游戏”为开端的东西，最终导致了重要的应用。

§1　菲波那契(Fibonacci)序列和其它模式

数学中的模式常以数的序列的形式出现。你很快会看到，形形色色的事物都能导出这类序列。在讲述第一个应用实例之前，让我们先了解一点基本知识。下面给出三个序列及其简要解释：

1，2，3，4，5，…　这些是用来数个数的数，或称自然数；

2，4，6，8，10，…　这些是正的偶数；

1，4，9，16，25，…　这些是自然数的平方。

每一序列中所列数字后面的三个点，表示该造型是无限延续下去的。一个序列中的每个数都叫做该序列的项。

下面这道题将引出一个有趣的序列。

假如每一对兔子每个月都生下一对小兔子，但每对兔子至少要在出生一个月之后才能下崽；同时假定它们都不

死亡。问一对兔子在一年内能繁殖成多少对兔子？
开始有一对兔子；一个月后仍是一对，但此时它们已有能力下一对兔子。于是，两个月后就有两对兔子，其中一对能继续生崽，另一对则尚无生育能力。三个月后便有三对兔子，其中有两对能产崽。因此，到第四个月已有五对兔子。这样得到一个序列，前两项都是 1，其后的每一项都是序列中位于它前面的两项的和。

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \cdots$$

图 1-1

这个序列，最初由比萨的列昂纳多（Leonardo）于1202年从兔子产

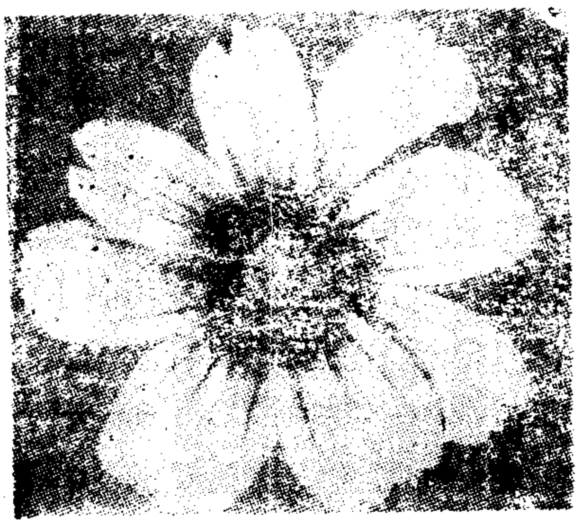
图 1-2　列昂纳多·菲波那契（1180—1250）

崽问题提出，当时他正把代数学介绍到意大利。他是13世纪最伟大的数学家，并以列昂纳多·菲波那契的名字著称于世。（列昂纳多是波那契的儿子）。为了纪念他，人们把序列1，1，2，3，5，8，13，21，34，…称做**菲波那契序列**。

不难看出，为什么菲波那契序列中的每一项是前两项的和。注意，比如现在有21对兔子，其中13对出生一个月以上，因此具备生崽的能力，即这13对兔子将再生出13对小兔子。把新生的13对兔子跟现有的21对加在一起，就得到下一项的34对兔子。

许多自然现象为我们提供了菲波那契序列中的数。向日葵花的花瓣依两个相反的螺旋形排列，朝一个螺旋方向生长的花瓣数同朝相反螺旋方向生长的花瓣数，几乎总等于菲波那契序列中两个相邻的数。菠萝、冬青、球花、牛眼菊和许多植物的花也有类似的情形。一些花的花瓣数构成菲波那契序列中的一串数字：莉莉花（3个花瓣），毛茛属植物（5），翠雀属植物（8），万寿菊属植物（13），紫宛属植物（21），雏菊属植物（34，55或89）。

图 1-3 毛茛属植物（5）



翠雀属植物(8)

万寿菊属植物(13)

搞电子学的人，也许很高兴知道专门设计的电路能产生菲波那契序列中的数。若下图中用⧘表示的元件都是1欧姆的电阻，最后一个分支中的电流为1安培，则加在电阻上的电压(从右至左)恰好都是菲波那契数：1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，…

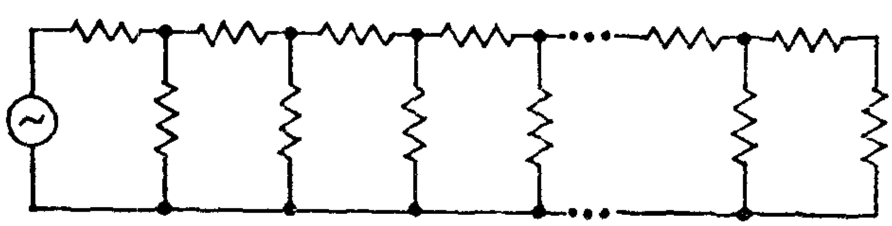


图 1-4

我们通常所说的菲波那契序列，就是指1，1，2，3，5，8，13，…，因为它是最早问世的一种菲波那契序列。实际上，任何一个序列，只要从第三项起每项都是前二项的和，便可以称做菲波那契序列。在这种意义下，下面也是两个菲波那契序列：

4，7，11，18，29，47，…

5，1，6，7，13，20，33，…

序列的头两项是什么数无关紧要，只要其余每项是位于它前面的

两项的和，这种序列就是菲波那契序列。

法国数学家吕卡(Edouard Anatole Lucas，1842—1891)曾引进序列2，1，3，4，7，11，18，…，还得到其他一些菲波那契序列及它们所含数字间的关系。因此，不同于最早形式的那些菲波那契序列，有时也称为吕卡序列。天文学家曾经注意到，日蚀和月蚀具有每6年，41年，47年，88年，135年，223年和358年重复出现的模式。这些数构成一个吕卡序列。

现在，告诉你一种利用菲波那契序列变魔术的方法。随便哪个人从序列中任意选定的连续10个菲波那契数，你(魔术师)能很快地确定这些数的和。怎么去做呢？所求的和总等于所选出的10个数中第7个数的11倍。例如，10个数是3，5，8，13，21，34，55，89，144，233，它们的和等于11乘55，可记作$11\cdot55$，即605。(你不妨把10个数加起来检验一下)。因此，你只需要掌握快速计算任何一个数的11倍的方法。现告诉你两种方法。一种是：$11\cdot n=10\cdot n+1\cdot n=10\cdot n+n$，例如$11\cdot12=10\cdot12+12=120+12=132$。另一种是：为求任何一个数的11倍，先写下这个数，然后在它下面再写下这个数，不过要向左移一位，再把这两行数相加，于是$11\cdot12$就等于

$$\begin{array}{r} 12\\ 12\\ \hline 132 \end{array}$$

这无非是下面算式的简写：

$$\begin{array}{r} 12\\ \times 11\\ \hline 12\\ 12\\ \hline 132 \end{array}$$

请你自己编几个菲波那契序列，以验证上面的方法。在练习4中，我们将看到上述魔术成功的原因。

应用与练习

1. 解菲波那契兔子生息问题：问一年中将繁殖多少对兔子？

2. 填出下列菲波那契(或吕卡)序列中空缺的项：

(a) 2,6,8,____,____,____,____,____;

(b) 2,3,5,____,____,____,____,____,____;

(c) ____,____,____,____,____; 131,212;

(d) ____,____,____,____,36,____,95;

(e) 35,____,58,____,____,____.

3. 若a_n是一个序列中的任意一项(第n项)，那么它后面的一项是a_{n+1}，它前面的一项是a_{n-1}。

$$\cdots,\ a_{n-1},\ a_n,\ a_{n+1}\cdots$$

用a_{n-1}，a_n和a_{n+1}来表示菲波那契序列中相邻三项之间的关系。

4. 现在让我们找出本节中的魔术能成功的道理。令菲波那契序列中连续10项的第1项为x，第2项为y；则第3项应为前两项的和，等于$x+y$。

(a) 说明第4项为$x+2y$；

(b) 说明第5项为$2x+3y$；

(c) 写出第6至第10项各等于什么。为便于你验证，告诉你第10项为$21x+34y$。

(d) 把所有10项相加。总和为$55x+88y$。

注意第7项等于$5x+8y$。问第7项与总和$55x+88y$之间有何关系？总和恰是$5x+8y$的11倍，即总和等于序列第7项的11倍。

5. 本节最早给出的序列之一是由自然数的平方组成的。你知道为什么3^2或$3\cdot3$称做3的平方吗？观察左图并给出简要的解释。

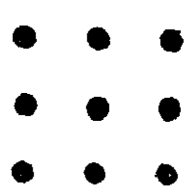


图 1-5 点方阵

6. 美国寄一封信的邮资，从1957年的3美分增加到1976年的13美分。邮资增加的序列是：3美分，4美分，5美分，6美分，8美分，10美

分，13美分。

（a）说明 从4美分增至5美分表明邮资增长了25％。

（b）哪一次邮资增长的百分数最小？

（c）哪一次邮资增长的百分数最大？

△帕斯卡(Pascal)三角

下面画出的数阵并非一个序列，但它是研究概率论的有用的模式(参见第七章练习19)。它的学名叫帕斯卡三角，因为是法国数学家帕斯卡(Blaise Pascal，1623—1662)于1665年把它介绍给西方世界的。实际上，在此前200[1]多年，它已出现在中国数学家杨辉和朱世杰的著作中。

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

7．(a)上图所示三角数阵只有5行，它还有第6行、第7行等等。每一行中的数字都由上一行的数字决定。仔细推敲这个三角数阵的特点，从而归纳出怎样由上一行得到下一行的规律，了解整个模式的结构(提示：要动手做算术运算)。

（b）写出第6行。

（c）写出第7行。

（d）有些外观上与帕斯卡三角类同的模式，如果把三角顶部的1去掉，则它变为

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

于是，每行的第2个数正好指明该行是第几行。其它几种模式不那么一目了然，而涉及数阵中元素的加、减运算。你不妨找出几种并加以描述。如果在数阵中添两行(即(b)和(c)所要求的)，做

[1] 实际上是约400年前。——编者注

起来就更方便。

△数据处理卡.

当你读完本章，就会知道模式具有广阔的应用领域，有些涉及计算机，数据处理卡就是按照一种模式编码的。下一页上有一张典型的处理卡，共有12行(水平的)，为了记录信息，可在每行上面穿孔。卡片底部是一行9，紧靠它上面有一行8，向上依次类推。靠近顶部是一行0，在0上面的一行虽没有标出记号，但表示是一行11，再上面未加标记的一行表示12。若要在某一列中记录字母表中的任一字母，只要在该列中穿两个不同的孔。为了表示字母A，可在12及1处穿孔，缩记为12-1；从图上看，字母L为11-3；字母Y为0-8。

8．(a) 仔细观察卡片，然后写出表示字母A到I的模式；

(b) 写出表示字母J到R的模式；

(c) 写出表示字母S到Z的模式；

(d) 试解释为什么"junior"——缩写是"JR"——是帮助记忆整个字母编码卡的关键。

§2 序列和天文学

德国数学家提丢斯(Johann Daniel Titius)观察到一个模式，给出各行星依次离太阳的距离所满足的法则。他于1766年发表了这个法则。几年后，德国天文学家波得(Johann Elbert Bode，1747-1826)注意并改进了该法则。此后它便被称做波得定律。让我们先观察下表，然后再验证这条定律。

行星	波得距离	实际距离*
水星	4	3.9
金星	7	7.2
地球	10	10.0
火星	16	15.2
—	28	—
木星	52	52.0
土星	100	95.3

* 测量单位参见练习5

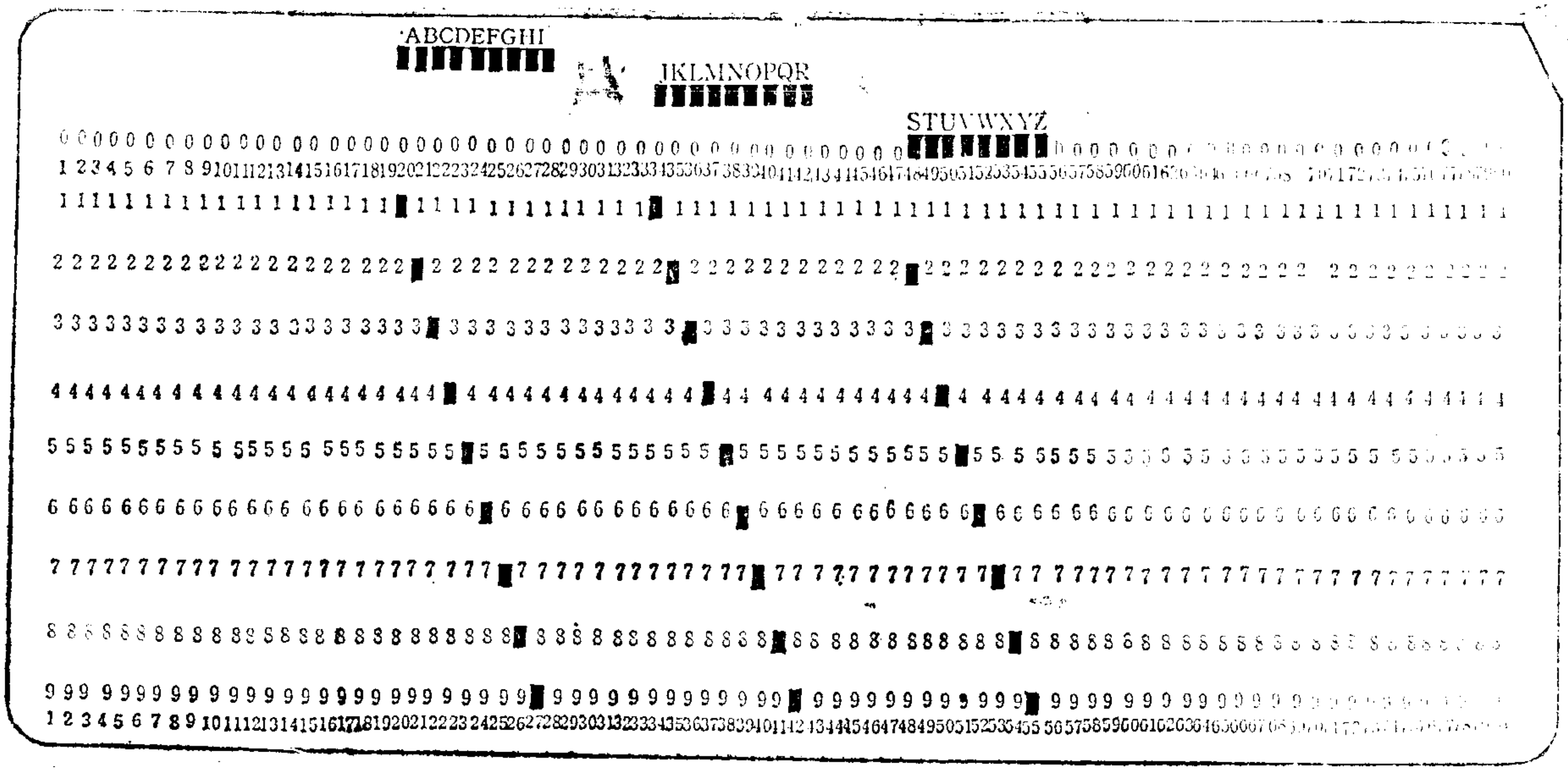


图 1-6　数据穿孔卡