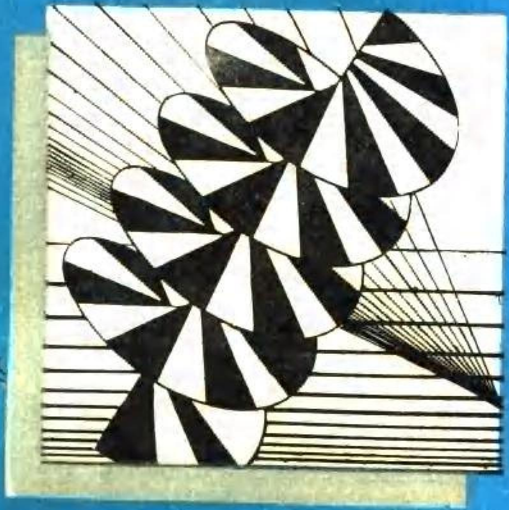
路见可 钟寿国 刘士强 编



# 复变函数

武汉大学出版社

# 复变函数

路见可　钟寿国　刘士强　编

武汉大学出版社
1993

## 内 容 提 要

本书根据国家教委理科数学力学教材编审委员会函数论及泛函分析编审组于1987—1989年期间议定的《复变函数(侧重应用)教材编写提纲》的基础上编写的. 全书包括复数及复函数、解析函数基础、积分、级数、留数、解析开拓、共形映照、调和函数、解析函数应用等九章.

作为尝试，本书增添了高阶奇异积分和推广留数定理等具有实用价值的新内容；对教学难点的多值函数作了全新的处理；对柯西定理(同伦形式)、幅角原理、共形映照和解析函数唯一性定理等引进新的证明方法和叙述方式；对传统内容的现代化处理或不同程度的改进渗及全书各章. 经过多年教学实践显示它是一本切实可教可学的教材.

本书可供综合大学数学、应用数学、计算数学、力学、天文学等专业及师范院校数学专业作为教材，也可供物理专业、工程技术人员及自学者参考.

**复 变 函 数**

路见可 钟寿国 刘士强 编

*

武汉大学出版社出版发行

(430072 武昌 珞珈山)

武汉市汉桥印刷厂印刷

*

850×1168毫米 1/32 8.75印张 219千字

1993年12月第1版 1995年8月第2次印刷

印数：1001—3000

ISBN 7-307-01291-x/O·108

定价：8.20元

# 序

复变函数是各类高等学校理工科的一门重要的专业基础课，目前国内外已有相当一批优秀的复变教材。根据国家教委理科教材编审委员会的意见，希望再编写一本侧重应用方面的、较现代化的、有我国特色的教材，以适应我国教学的需要。本教材就是在这样的背景下编写的。

我们对“侧重应用”的理解是这样的：在材料的选择上，主要考虑到复变函数作为一种工具，在现代科学技术中有着重要的作用，因此要使学生能掌握其有用的基本理论和计算技巧，而不着重照顾条件不同的专业上需要的特殊内容。因为否则的话，内容将非常庞大。另一方面，虽说是“侧重应用”，但我们认为，决不能削弱基本概念、基本理论的阐述；虽然有些问题提法中的条件在便于应用情况下已适当加强（如只考虑以逐段光滑曲线而不考虑可求长曲线为边界的区域），但在论证中却又不失逻辑的严密性。

要写一本“较现代化”切实可教可学的教材实在不是一件易事，特别是对基础课来说尤其如此。我们注意吸收国内外复变函数教材中好的方面，适当引进了一些现代化的术语，而以不超越目前一般师生的条件为前提。此外，对某些重要定理（如柯西定理等）的证明，也参考了新近出现的以及我们的简洁证法。

复变函数中有些内容与数学分析相当重复，是后者的自然推广，在这方面我们尽量压缩篇幅，而主要让学生总结其间的异同。根据我们的教学经验，初等多值函数是教学中的一个难点，而其困难是由于幅角的多值性而产生的；因此，教材中突出了幅角函数多值性的讨论，这样就为讨论多值的初等函数奠定了基础。在这方面

我们还参考了林玉波教授关于多值函数单值分枝连续变化法的内容。这样的处理方法，实践证明是可行的，易于为学生接受。我们还添加了一些通常教材中所见不到的然而在实践中有重要应用的内容(如高阶奇异积分、推广的留数定理及其在计算实积分中的应用等)；有的用小字排出，供师生选用。

我们在各节后，常常出一些思考题以启发学生检验对所学内容是否正确掌握。在习题编排方面分两个层次，每节后的属基本习题，供学生复习巩固所学知识；每章末的习题则有一定综合性和技巧性，可供师生根据实际情况选用。较难的习题注有提示，计算题均有答案。

我们希望本教材将适用于广大理工和师范院校本科生或研究生各有关专业。由于我们水平和经验所限，教材中很可能有许多不当和不妥之处，希广大师生和读者不吝指正。

编　　者

1993年9月

# 目　录

# 第一章　复数和复函数

## §1.1　复数

1.　**复数域**　读者已熟悉了实数域$\mathbb{R}$. 在历史上，求解最简单的二次方程 $x^2+1=0$ 便遇到了困难，它在$\mathbb{R}$中显然无根，因此就想象有一种新的数，记为 $i=\sqrt{-1}$，因此 $-i$ 也是它的根. 这样，$x^2+1=0$ 就也有两个根 $\pm i$. 如果允许 $i$ 参加四则运算，并服从实数的通常运算法则，就象一个代数文字那样，但遇到 $i^2$ 则可改为 $-1$. 这样，如读者所知，一般的二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 也就总有两个根. 然而在很长时间内，人们怀疑是否真的有这种数存在，因而把 $i$ 起名为"虚数"，意即假想的数. 直到后来发现它有非常现实的意义（见下段），并依靠它可以解决不少过去不能解决的问题，还发现它有十分广泛的应用，才得到普遍的公认.

下面我们从逻辑上定义由实数域$\mathbb{R}$添加 $i$ 后生成复数域$\mathbb{C}$，在实数域$\mathbb{R}$上面，添加一个新的形式的数 $i$，称为虚数单位，并允许它和实数一起可以进行加法、减法、乘法的运算（$1\times i$ 仍记为 $i$，$(-1)\times i$ 记为 $-i$，$0\times i$ 仍记为 0），并假定它们仍服从交换律、结合律、分配律；但此外还规定 $i\cdot i=i^2=-1$（可以证明，这样一些规定是和谐的，即不会导致矛盾的）. 于是，这样的数一般可写成 $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$，称为**复数**. 称 $\bar{z}=a-bi$ 为 $z$ 的**共轭复数**.

我们有

$$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i,$$

$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

当且仅当 $a=b=0$ 时，才称 $a+bi=0$；故 $a+bi\neq0$ 就意味着 $a,b$ 中至少有一个不为零. 除法也就可自然地作出如下：

$$\frac{c+di}{a+bi}=\frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}$$

$$=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}+\frac{ad-bc}{a^2+b^2}\,i \qquad (a+bi\neq 0)$$

换句话说，只要在上式左端分子、分母中各乘以分母($\neq 0$)的共轭复数便可求得. 这样，复数的四则运算可完全遵循实数的类似运算进行.

所有复数的集合按照以上运算法则并遵从 $i^2=-1$ 的规则，构成一域，称为**复数域**，并记作$\mathbb{C}$.

复数 $z=a+bi$ 中的 $a$ 称为 $z$ 的实部，记作 $\mathrm{Re}z$；$b$ 称为 $z$ 的虚部，记作 $\mathrm{Im}z$(两复数当且仅当它们的实、虚部分别相等才称为**相等**). 当 $b=0$ 时 $z=a+0i=a$ 就是**实数**；当 $a=0$ 时 $z=a+bi$ 称为**纯虚数**. 注意 $0=0+0i$ 既是实数，也是纯虚数①. 因为 $z=a+bi$ 的共轭复数 $\bar{z}=a-bi$，显然 $\bar{\bar{z}}=z$，即 $z$ 和 $\bar{z}$ 互为共轭复数. 此外，我们有明显的等式：

$$\mathrm{Re}z=\frac{z+\bar{z}}{2},\quad \mathrm{Im}z=\frac{z-\bar{z}}{2i};$$

又，当 $\mathrm{Im}z=0$ 或即 $z=\bar{z}$ 时 $z$ 是实数，而当 $\mathrm{Re}z=0$ 或即 $z=-\bar{z}$ 时 $z$ 是纯虚数.

我们熟知，实数间有大小的区别，但复数间不能比较大小，这是复数域和实数域的一个重要不同，须特别注意.

**2. 复数的几何表示** 我们知道，在平面解析几何中，取定一直角坐标系 $Oxy$ 后，可用一有序实数对$(a,b)$表示平面

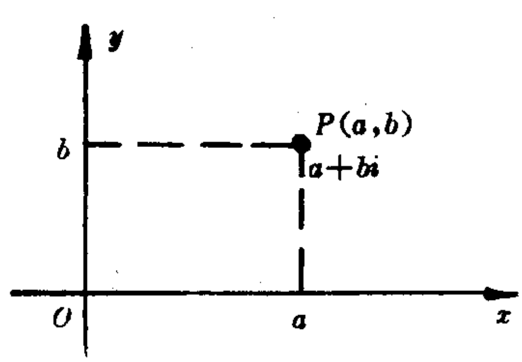



图 1-1

① 有的作者把 $z=bi$ 仅当 $b\neq 0$ 时才称作纯虚数；这样，0 不算作纯虚数. 但这样做是不方便的，我们不采用这种说法.

中任何一点 $P$，称为 $P$ 的坐标，$a$ 为横坐标，$b$ 为纵坐标(图 1-1).

如果我们用复数 $a+bi$ 来表示 $P$ 的位置显然也是可以的，也就是说，取定一直角坐标系 $Oxy$ 后，就可建立复数 $a+bi$ 和点 $P(a,b)$间的一个一一对应的关系. 这时我们就称这个取定直角坐标系的平面为复平面，仍用$\mathbb{C}$ 表示；$a+bi$ 就称为 $P$ 点的复坐标或复数表示. 这是复数的一种几何表示法. $x$ 轴上的点的复坐标是实数，因此 $x$ 轴也称为**实轴**；$y$ 轴上的点复坐标是纯虚数. 因此 $y$ 轴也称为**虚轴**.

复数还可用来表示平面向量. 如图 1-2，由复数 $a+bi$ 决定了点 $P$ 如前，因此亦决定一向量$\overrightarrow{OP}$；反之它决定一复数：$P$ 的复坐标. 当然，复数 0 和零向量相对应. 向量的这种复数表示也是很有用的. 例如，向量的加减法和复数的加减法是等价的. 即，设$\overrightarrow{OP}=a+bi$，$\overrightarrow{OQ}=c+di$，按平行四边形规则，如$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$，正好$\overrightarrow{OR}=(a+c)+(b+d)i$(图 1-3). 这在几何上立即可以证明.

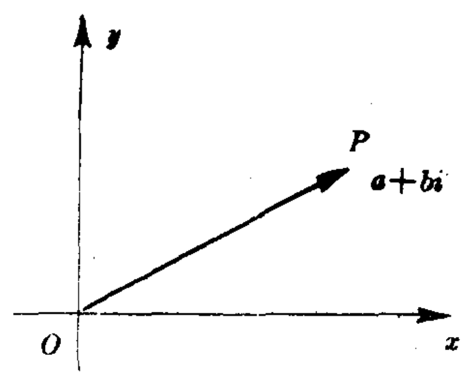


图 1-2

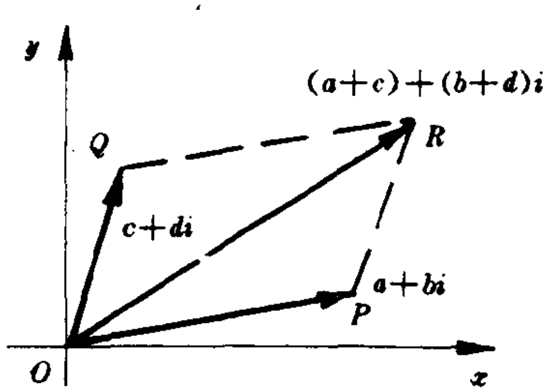


图 1-3

向量的数乘仍与复数和实数的乘法一致：如$\overrightarrow{OP}=a+bi$，$\lambda$ 为实数，则 $\lambda\overrightarrow{OP}=\lambda(a+bi)=\lambda a+\lambda bi$. 但向量的内积和外积就和复数的乘法间没有自然的一致性了，这也是应引起注意的.

还可注意，设 $P$ 和 $Q$ 的复坐标分别为 $a+bi$ 和 $c+di$，它们分别表示向量 $\overrightarrow{OP}$ 和 $\overrightarrow{OQ}$，则 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{QP}$（图 1-4）；另一方面，$\overrightarrow{QP}$ 作为一自由向量，当把起点 $Q$ 移到原点 $O$ 时，它所对应的复数正好是 $(a-c)+(b-d)i=(a+bi)-(c+di)$. 我们不妨仍记 $\overrightarrow{QP}=(a-c)+(b-d)i$. 这在以后的计算中也是非常有用的. 若称 $\sqrt{a^2+b^2}$ 为复数 $z=a+ib$ 的模或绝对值，记为 $|z|$，则由平行四边形法则，容易导出复数加减法的重要三角不等式. 即若 $z_1,z_2$ 都是复数，则

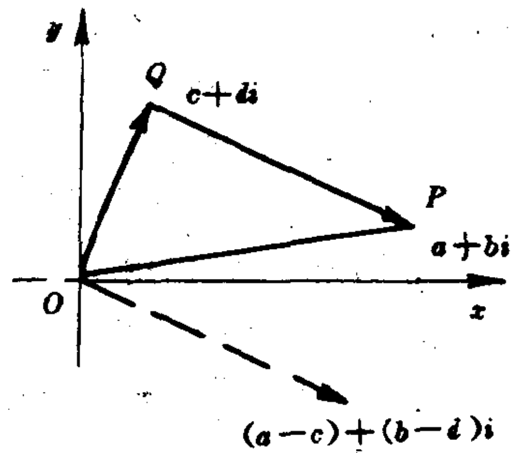


图 1-4

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,\ |z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|$$

我们已看到复数 $a+bi$ 可看作向量 $\overrightarrow{OP}$，另一方面，向量 $\overrightarrow{OP}$ 可由其大小和方向决定：$\overrightarrow{OP}$ 的大小为 $|OP|=\rho=\sqrt{a^2+b^2}$，其方向可由 $\overrightarrow{OP}$ 的倾角 $\theta$ 来决定（$\theta$ 可加减 $2\pi$ 的整数倍）. [1]这也相当于 $P$ 点的极坐标表示（把 $O$ 点作为极点，$x$ 轴作为极轴）（图 1-5）. 这样，对于复数 $a+bi$ 来说，它也可由 $\rho$、$\theta$ 决定. 其中 $\rho$ 为复数 $a+bi$ 的绝对值，也可写为 $|a+bi|$，而 $\theta$（可加减 $2\pi$ 的整数倍）称为它的幅角，记为 $\operatorname{Arg}(a+bi)$. 亦即，如果 $z=a+bi$，则

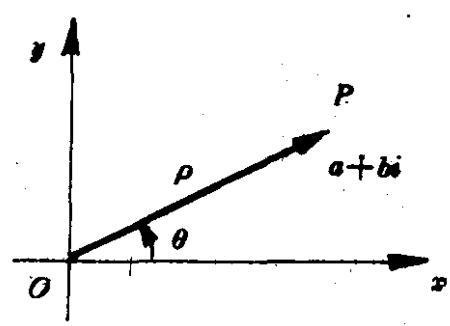


图 1-5

$$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2},$$

$$\operatorname{Arg}z=\operatorname{Arg}(a+bi)=\theta+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2\cdots).$$

复数的这种表示法，称为极坐标表示. 由于 $k$ 可以取任何整数，因

① 注意，零向量没有确定的方向或倾角.

此 $\mathrm{Arg}z$ 是多值的.

当然,以上讨论已默认了 $z\neq 0$. 如 $z=0$,当然有 $|z|=0$,但 $\mathrm{Arg}0$ 没有意义.

注意,$|z_1-z_2|$恰好是 $z_1,z_2$ 间的距离,而 $\mathrm{Arg}(z_2-z_1)$是从 $z_1$ 到 $z_2$ 的向量的倾角.

由极坐标和直角坐标的关系

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta$$

立即可知一个复数 $x+yi$ 也可写成 $x+yi=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$. 复数的这种表示称为三角表示.

利用复数的三角表示法可以讨论复数之积、商、幂、方根的法则. 例如,如果

$$x_1+y_1i=\rho_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),\quad x_2+y_2i=\rho_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

则有

$$(x_1+y_1i)(x_2+y_2i)=\rho_1\rho_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

由此可见,二复数相乘(除),其乘积(商)的模为模的乘积(商),而乘积(商)的幅角为幅角的和(差)①(都可相差 $2\pi$ 的整数倍),同理,如果

$$x+yi=\rho(\cos\theta+i\sin\theta),$$

则当 $n$ 为正整数时,有

$$(x+yi)^n=\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta),$$

而把开方看作乘方的逆运算时,有

$$(x+yi)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{2k\pi+\theta}{n}+i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)$$

$$k=0,1,2,\cdots,n-1.$$

这就是我们熟知的复数 $x+yi$ 的 $n$ 次方根,其中 $\sqrt[n]{\rho}$ 为算术根.②

---

① 二复数相除时,要分母不为零.

② 如强调算术根,有时写为 $\sqrt[n]{\rho}_{+}$. 例如 $\sqrt{1}_{+}=1$,而 $\sqrt{1}=\sqrt{1}_{+}\left(\cos\frac{2k\pi}{2}+i\sin\frac{2k\pi}{2}\right)=\pm 1$,根据上下文的意思容易加以区别. 亦可省去"+"号,记在心中.

由本段的讨论可以看出，复数确有非常现实的意义，而并不是虚无漂渺的了．我们仍沿用“虚数”这一字眼，纯粹只是历史的原因罢了．

由于本书讨论的对象是复数，因此以后讲到的数如无特别声明，一概指的是复数．

## 思考题

1． 解释集合等式

$\mathrm{Arg}(z_1\cdot z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$， $\mathrm{Arg}z_1/z_2=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2$

的意义，其中 $z_1,z_2\neq 0$

2． 说明作为集合等式 $\mathrm{Arg}z^2=2\mathrm{Arg}z$ 是错误的．

3． **球极投影、复球面、无穷远点、扩充复平面** 历史上，为了绘制地图的需要，有一个球极投影法，使球面上的点和平面上的点之间建立一种对应．由于平面上的点可用复数表示，因此球面上的点也可用复数表示，就构成所谓**复球面**．具体说明如下．

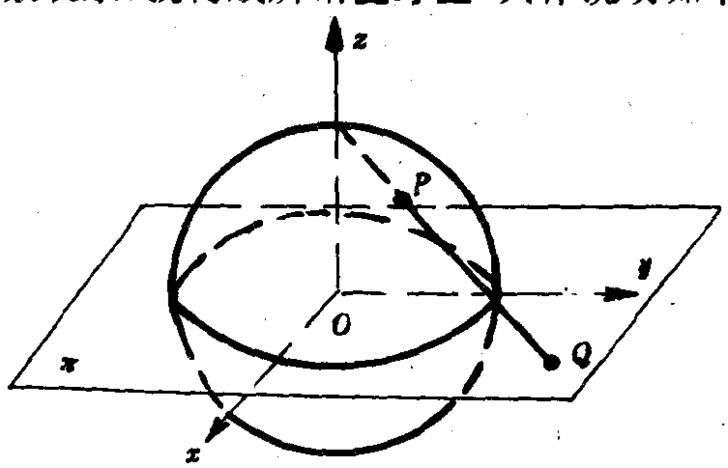



图 1-6

设想一球面 $S$，不妨认为是中心在原点的单位球面，设 $xOy$ 平面为 $\pi$(图 1-6)．在球面上任取一点 $P$，从“北极”点 $N$ 引一射线通过 $P$ 点并延长交 $\pi$ 上于点 $Q$，$Q$ 称为 $P$ 的**球极投影**

把 $\pi$ 视为复平面 $\mathbb{C}$，设 $Q$ 在 $\pi$ 上的复坐标为 $z$．于是，球面 $S$ 上的任一点 $P$(除 $N$ 外)就和点 $Q$ 或 $\mathbb{C}$ 的 $z$ 对应；反之，任给 $\pi$ 上一点 $Q$ 或 $z\in\mathbb{C}$，也有 $S$ 上一点 $P(\neq N)$相对应．在通常拓朴意义