數學方法論叢書

SERIES ON MATHEMATICAL METHODOLOGY

Trace to The Sources of Mathematical Methods

數學方法溯源

歐陽絳 著

数学方法论丛书

数学方法溯源

欧阳绛 著

江苏教育出版社

1990·南京

(苏)新登字第003号

数学方法论丛书

数学方法溯源

欧阳绛　著

出版发行：江苏教育出版社
(南京中央路165号,邮政编码：210009)
经　　销：江苏省新华书店
印　　刷：常熟市印刷二厂
(常熟大义镇,邮政编码：215557)

开本850×1168毫米　1/28　印张6　字数129,500
1991年2月第1版　1992年3月第2次印刷
印数2,501—7,530册

ISBN　7—5343—1224—8

G·1082　　定价：2.20元

出 版 说 明

如大家所知，数学方法论作为研究数学中的发现、发明与创新等法则的一门学问，已有很长的历史，而且内容极为丰富。16世纪以来，如笛卡尔(Deacartes)、莱布尼兹(Leibniz)、庞加莱(Poincarē)、克莱因(Klein)、希尔伯特(Hilbert)和阿达玛(Hadamard)等著名学者，都有过这方面的论著和发表过这方面的精辟见解。就近现代而言，以著名的美籍匈牙利数学家波利亚(Polya)为例，他曾以数十年的时间从事数学方法论的研究，出版了一系列论著，并被译为多种文字，受到全世界的普遍重视，被誉为第二次世界大战后出现的经典著作之一。在我国，也有许多学者在各种不同的场合屡次指出：要在数学教材与教学过程中，注意对形成数学概念的认识过程的分析，努力教给学生以寻找真理和发现真理的手段，特别是我国数学家徐利治教授，他先后到过苏联、联邦德国、美国、加拿大和保加利亚等国进行学术交流，结合国内实际情况研究了世界数学的历史和现状，深感在教学与科研领域中，有大力提倡数学方法论的必要。在他的倡议下，我国一些理工科大学和师范院校相继开设了数学方法论选修课，出版界也出版了一些这方面的专著和通俗读物，这无疑是一个令人鼓舞而又富于开创性的发展趋势。然而总的说来，在现今的数学教育与数学教学过程中，主要的倾向还是偏重逻辑思维能力的训练，对于如何教给学生以寻找真理

和发现真理的本领不够重视，在一定程度上低估了发散思维的训练在智力开发中的作用，以致不能较好地培养学生的创造能力。

上述情况表明，我们仍需大大提倡数学方法论的研究，并应把数学方法论应用到中学与大学的数学教育实践中去，特别是，我国现今正处在四个现代化建设和数学教学改革的新时期，这就急需培养出一支高水平的、庞大的科技队伍，而尤其急需造就一支高水平的、庞大的数学教师队伍，因为这是我国能否建成科技大国的关键。正是为了适应这一形势的需要，我社自1986年初就开始酝酿和筹备出版《数学方法论丛书》(以下简称丛书)，并拟请徐利治教授主持此项工作。此举得到了当时正在美国访问讲学的徐利治教授的赞同。全国各地的有关专家、教授也很支持此项工作，纷纷承担《丛书》编写任务。1987年4月，我社与徐利治教授等充分磋商，组建了《丛书》编辑委员会与特聘顾问。我们深信，在《丛书》的全体编委的共同努力下，一定能在高水平和高质量的基础上出版好这一套《丛书》。我们也由此而希望，这套《丛书》的出版，能在我国数学改革和培养人才的事业中有所贡献。

《丛书》共分三个档次，除了少数几本属于高档次的专著之外，其它两个档次主要面向中学教师、大专院校学生、研究生和一般数学爱好者。无疑，《丛书》中的大部分题材，对于使用数学工具的科技工作者来说也是有启发性的。

限于水平，在《丛书》的编辑和出版过程中，难免会有缺点和差错。热切希望数学教育界人士和广大读者多多批评指正。

江苏教育出版社

1990年8月

引　言

方法就是“途径”和“路”，而路是人走出来的。方法也是“工具”和“手段”，至于用什么工具和手段是由有待解决的问题内容决定的。

本书所说的数学方法，主要指学习和研究数学的方法，也包括把数学应用于实际的方法。数学家所走过的探索之路也往往体现了数学的方法。

古希腊有个故事，说有个神仙能点石成金，他把点成了金的石头赐给求助于他的人；但有一个求助于他的人，总是摇头，表示不要，原来他想要神仙的手指头。我们所说的方法就相当于那个手指头。学习和研究数学的人，对数学方法的学习和掌握，乃是治学之本。正如俗话所说：磨刀不误砍柴工。

数学家走过的路，应该翻开历史去寻找。历史上的东西都是曾经成为现实的东西，它成为现实总有它的道理，这些道理就是逻辑，就是规律。当然，历史并不能把我们需要的答案都清晰地展示出来；许多事实必须用逻辑分析的方法去处理，这就是逻辑方法与历史方法的结合。

因此，我们一方面要从数学方法的角度去探讨数学史，从活生生的数学发展中抽象出数学思想方法这根主线。另一方面，又要立足于历史的观点去研究数学方法，也就是把数学方法置身于历史的背景下去分析和考察，以能充分认识其存在的理由。这就是本书的写作宗旨。

目录

引言……………………………………………………1
一　历史上的数学方法……………………………1
1.1 用几何方法解代数题……………………………1
1.2 用代数方法解几何题……………………………2
1.3 用代数方法研究数论……………………………4
1.4 用群论方法研究代数……………………………7
1.5 四元数开辟了研究抽象代数之路…………11
1.6 用射影方法研究几何……………………………13
1.7 用群论方法整理几何……………………………15
1.8 用流数法创立微积分学…………………………19
1.9 用几何方法解概率题……………………………21
习题1 ………………………………………………23
二　从数学游戏谈起…………………………………24
2.1 数学游戏在数学发展中的作用……………24
2.2 让梨游戏……………………………………………25
2.3 幻方与魔阵…………………………………………30
2.4 完全数、亲和数与亲和数链…………………39
2.5 斐波纳契数列………………………………………45
2.6 大衍求一术…………………………………………52
2.7 柯尼斯堡七桥问题…………………………………55
2.8 树形图…………………………………………………57
2.9 麦比乌斯带…………………………………………60
2.10 正六边形拼图 ……………………………………65
2.11 色三角形 …………………………………………66
2.12 三条简单的定理 ………………………………67
2.13 博弈论 ……………………………………………74
2.14 布尔代数 …………………………………………76
2.15 合理下料问题和运输问题 ……………………81
2.16 输入输出经济系统 ……………………………87
2.17 从活数学到纯数学 ……………………………89
2.18 数学向其他学科渗透的具体机制 ……………90

习题2 ……………………………………………………92
三　某些更基本的方法……………………………93
3.1 方法的过程性和层次性………………………93
3.2 平衡法…………………………………………94
3.3 穷竭……………………………………………98
3.4 无限递降法…………………………………… 101
3.5 数学归纳法和递归…………………………… 103
3.6 反演法………………………………………… 108
3.7 映射法………………………………………… 110
3.8 对偶原理……………………………………… 113
3.9 形式运算法…………………………………… 115
3.10 实验的方法 ………………………………… 119
3.11 构造的方法 ………………………………… 121
习题3 ……………………………………………… 126
四　演绎推理与合情推理………………………… 127
4.1 欧几里得《原本》的来龙去脉………………… 127
4.2 公理方法的历史……………………………… 130
4.3 公理方法的作用……………………………… 132
4.4 对公理系统的要求…………………………… 135
4.5 现代逻辑的三大成果………………………… 138
4.6 一个有趣的例子……………………………… 146
4.7 合情推理……………………………………… 149
习题4 ……………………………………………… 154
五　数学与思维…………………………………… 157
5.1 数学是人类文明的一个组成部分…………… 157
5.2 数学是一种思维方式………………………… 159
5.3 数学是一种思维规范………………………… 161
5.4 笛卡儿的思维法则…………………………… 162
5.5 数学是思维的一种载体……………………… 165
5.6 数学能锻炼人的思维………………………… 167
习题5 ……………………………………………… 169

目录

目录

六　数学方法是什么？………………………170
6.1 方法是什么？……………………………170
6.2 数学方法的内涵与外延…………………171
6.3 数学方法的特点…………………………173
6.4 掌握数学方法的途径……………………175
6.5 数学之树…………………………………176
后记……………………………………………178

一 历史上的数学方法

1.1 用几何方法解代数题

古希腊的毕达哥拉斯学派（简称毕氏学派）曾经用几何方法解二次方程。在古希腊，几何学发展得快而代数学发展得慢。当时，一元二次方程被分为四种不同的类型，即：$x^2-ax+b=0$，$x^2+ax+b^2=0$，$x^2-ax-b^2=0$ 和 $x^2+ax-b^2=0$；并且，远没有今天这样的符号。为了方便起见，我们以今天的形式讲述其对不同类型的一元二次方程的解法。

例1 求解 $x^2-ax+b^2=0$

解

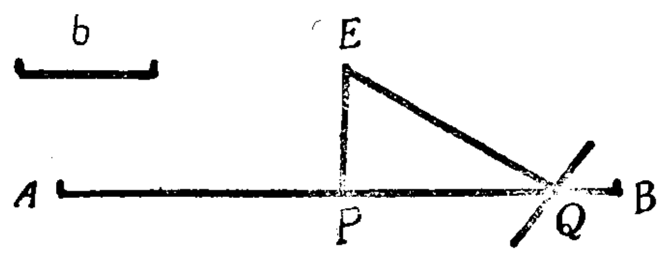

图1-1

如图，令 $AB=a$，作 $PE\perp AB$ 且 $PE=b$，P 为AB的中点，$EQ=PB$，由于 $AQ\cdot QB=PB^2-PQ^2=EQ^2-PQ^2$

$$=EP^2=b^2$$

故作出之 Q 点所决定的 AQ 及 QB 之长即为所求。

对 $x^2+ax+b^2=0$．作图与前同，只是答案全取负值。

例2 求解 $x^2-ax-b^2=0$

解

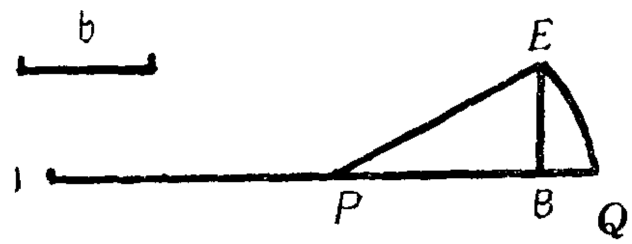

图1-2

令 $AB=a$，P 为 AB 的中点，作 $BE\perp AB$，且 $BE=b$；以 P 为圆心，PE 为半径画弧，截 AB 之延长线于Q。由于 $AQ\cdot QB=PQ^2-PB^2=PE^2-PB^2=BE^2=b^2$
故作出之外分点 Q 所决定的 AQ 与 QB 之长即为所求。

对 $x^2+ax-b^2=0$，作图与前同，答案全变号。

注意：方程中的常数均系 b^2，而作图时用的是 b。因此，要先用求比例中项的方法作出 b 来。

这种解法很容易弄懂；但是为什么要用这样复杂的方法(几何作图法)去处理这么简单的问题(一元二次方程)，却是颇为令人费解的。然而，知道了这一历史的发展，是有助于我们理解，并从中获得很多有益的启迪的。

1.2 用代数方法解几何题

用代数方法去求解几何问题，乃是17世纪的事。

笛卡儿创立解析几何的思想总结在他的《方法论》一书中标题为“几何学”的那个附录中。该附录一开始指出：

“几何学中的任何问题都能容易地归结为这样一些语句：知道一些直线[段]的长度，便足以作出它的图形，正如算术仅由四种或五种运算，即加、减、乘、除和开方(后者可以看成是一种除法)所组成那样，在几何学中也是如此，为了找出所要的线[段]，只需要把其他线[段]加起来或减掉。为

了尽可能地与数密切联系起来，我们取一个线[段]称之为单位[长]。通常单位[长]是可以任意取的。对于给定的两条别的直线[段]，我们要找出第四条直线[段]，使它对两条给定线[段]中的一条之比等于另一条对单位[长]之比(这是同乘法等价的)；或者，再要找出第四条线[段]，使它对两条给定线[段]中的一条之比等于单位[长]对另一条之比(这是和除法等价的)；或者，最后要找出单位[长]与另外某一线[段]之间的一次、二次或多次比例中项(这是同给定线[段]开平方、开立方等等等价的)。而且为了更加明确，我决不怀疑，把这些算术用词引进几何学的合理性"。

——应该注意：此处是用算术的术语去叙述几何学中之问题的。笛卡儿的秘诀就是由此用另一种语言阐述几何学科中的问题，从而给出一种新的方法，去建立一门新的学科。(而坐标并不是其思想的精髓。)

然而引起笛卡儿的进一步考虑，并使他将代数方法用于几何问题的思想得以实现的关键，乃是对于下述问题的探索。即若 $p_1,\cdots,p_m,p_{m+1},\cdots,p_{m+n}$ 是从点 P 向 $m+n$ 条直线所引的，并与这些直线形成一些给定角度的 $m+n$ 条线段的长度，并且，如果

$$p_1\cdot\cdots\cdot p_m=Kp_{m+1}\cdot\cdots\cdot p_{m+n}$$

(此处 K 是常数)，试求点 P 的轨迹。

例1 给定五条直线 $L_1,\cdots,L_5$。令 p_i 表示点 P 到直线 L_i 的距离。取 L_4 和 L_5 为 x 轴和 y 轴，求依下列条件运动的点 P 的轨迹的方程：

$$p_1p_2p_3=ap_4p_5$$

(这轨迹被称做笛卡儿抛物线，有时也称作"三叉戟"。)

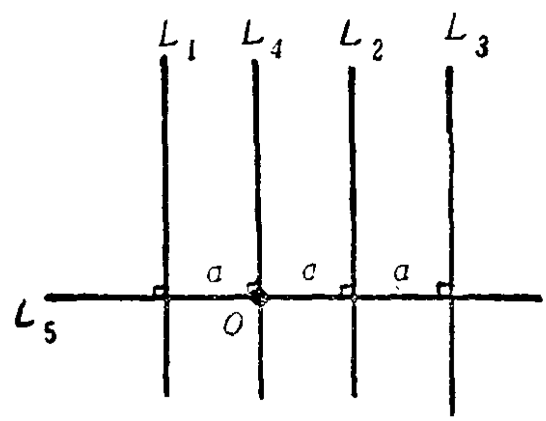

图1-3

解 由$(x+a)(a-x)(2a-x)=axy$

化简可得

$$x^3-2ax^2-a^2x+2a^3=axy.$$

新学科的建立，常常出于一种新方法，而一种新方法的提出，又常常取决于一个新问题。——这是一个事实，且是一个十分有趣的事实。

希尔伯特在《数学问题》中指出："正如人类的每项事业都在追求着某个确定的目标一样，数学研究也需要有自己的问题。正是通过这些问题的解决，研究者锻炼了钢铁般的意志，发现新方法和提出新观点，从而达到更为广阔和自由的境界。"随后又说："伯努利曾在一些杰出的分析学家面前提出了一个问题，这个问题好比一块试金石，通过它，分析学家们可以检验其方法的价值，衡量他们自己的能力。"有了新问题就可以发现新方法，问题还可以用来检验方法的价值：问题与方法的关系就是如此密切。

1.3 用代数方法研究数论

让我先介绍一个数论问题的历史渊源：

两个自然数 M 与 N 被称为亲和的，如果每一个数是另一个数的真因子的和。例如，284 和 220 就是亲和的。因为，220 的真因子是1，2，4，5，10，11，20，22，44，55，110，其和为284；而 284 的真因子是 1，2，4，71，142，其和为 220。这对数在历史上被认为是毕氏学派首先给出的。

泰比特·伊本柯拉在他的《论亲和数的确定》一书中证明：如果$p=3\cdot2^{n-1}-1$，并且$q=3\cdot2^{n}-1$，$r=9\cdot2^{n-1}-1$是素数，则

$$M=2^{n}pq,\ N=2^{n}r$$

为亲和数。

泰比特·伊本柯拉的求亲和数的规则曾被费尔马重新发现。在 220 和 284 这对著名的亲和数之外，费尔马又发现了一对，即

$$17296=2^4\times23\times47$$

$$18416=2^4\times1151$$

无疑，他是以 $n=4$ 代入泰比特规则而导出的。

笛卡儿明确地阐述了泰比特规则，并提出了第三个例子，即：

$$9363584=2^7\times191\times383$$

$$9437058=2^7\times73727$$

现在让我们来分析一下泰比特获得其规则（即方法）的思路：

著名的亲和数 220 和 284 有下列形式的因子分解：

$$2^2pq \text{ 和 } 2^2r$$

其中 p，q 和 r 均为素数。再看我们能否找到

$$M=2^{n}pq,\ N=2^{n}r$$

（M 的真因子的和等于 N，N 的真因子的和等于M）这样一对数。

我们假定泰比特知道：N 的所有因子(包括 N 本身)之和为

$$(1+2+\cdots+2^n)(r+1)$$

并且 M 的所有因子(包括 M 本身)之和为

$$(1+2+\cdots+2^n)(pq+p+q+1)$$

因而，上述两个的每一个和必定都等于 $M+N$，故有

$$r=pq+p+q \tag{1}$$

和

$$(2^{n+1}-1)(pq+p+q+1)=2^n pq+2^n r \tag{2}$$

将(1)式代入(2)式，得关于 p 和 q 的条件

$$(2^{n+1}-1)(pq+p+q+1)=2^n pq+2^n(pq+p+q) \tag{3}$$

把(3)简化，得

$$2^n(p+q+2)=pq+p+q+1 \tag{4}$$

取 $p+1=P$，$q+1=Q$，(4)式可进一步简化为

$$2^n(P+Q)=PQ \tag{5}$$

把 2^{2n} 加到(5)的两边，变形得

$$2^{2n}=PQ-2^nP-2^nQ+2^{2n}$$

或

$$2^{2n}=(P-2^n)(Q-2^n)$$

右边的两个因子，或均为正，或均为负。如果二者均为负，则它们的积必定小于 2^{2n}，所以它们必定均为正。因为它们的积是 2^{2n}，我们必定有(估且假定 $P<Q$)：

$$P-2^n=2^{n-t}$$

$$Q-2^n=2^{n+t}$$

此处 t 的最简选择是 $t=1$，它导致

$$P=2^n+2^{n-1}=3\times 2^{n-1}$$

$$Q=2^n+2^{n+1}=6\times 2^{n-1}$$

于是，得到泰比特的解：

$$p=3\times2^{n-1}-1$$
$$q=3\times2^{n}-1$$
$$r=PQ-1=9\times2^{2n-1}-1$$

——在数论的王国里，行驶着代数牌的摩托车，如此轻松，如此惬意！真乃是轻车熟路，探囊取物。

1.4 用群论方法研究代数

在初等代数学领域里，曾把用代入、消去和配方等方法解方程视为天经地义的，就像在几何学领域里，把欧几里得视为至圣先师那样，经久不变。当拉格朗日提出了群的概念，并由伽罗瓦用群论解释解方程的道理后，代数学才从“山穷水尽疑无路”的情况进入了“柳暗花明又一村”的境界。

现在先介绍一下拉格朗日(1736－1813)的“群”的概念：

一般n次方程可被写成：$x^n+a_1x^{n-1}+a^2x^{n-2}+\cdots+a_n=0$并且有根$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$。为了简明起见，考虑有根$x_1,x_2,x_3$的三次方程$x^3+ax^2+bx+c=0$。拉格朗日利用这些根的六个置换：

S_1：$x_1\to x_1$，$x_2\to x_2$，$x_3\to x_3$，

S_2：$x_1\to x_2$，$x_2\to x_1$，$x_3\to x_3$，

S_3：$x_1\to x_3$，$x_2\to x_1$，$x_3\to x_2$，

S_4：$x_1\to x_1$，$x_2\to x_3$，$x_3\to x_2$，

S_5：$x_1\to x_3$，$x_2\to x_2$，$x_3\to x_1$，

S_6：$x_1\to x_2$，$x_2\to x_3$，$x_3\to x_1$.

让我们注意那个被称做恒等置换的置换S_1，它令每个根不变；而S_2是使x_1变成x_2，等等。