



初等几何研究

高等学校教学用书

基础教程

胡杞
周春荔 编



北京师范大学出版社

高等学校教学用书

初等几何研究基础教程

胡 杞 周春荔 编

北京师范大学出版社

高等学校教学用书
初等几何研究基础教程

胡 杞 周春荔 编

*

北京师范大学出版社出版
新华书店总店科技发行所发行
中国科学院印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/32 印张: 12.375 字数: 260千
1989年10月第1版 1989年10月第1次印刷
印数: 1—3 000

ISBN 7-303-00683-4/O · 111

定价: 2.20 元

内 容 简 介

本书是编者多年来在北京师范学院数学系讲授“初等几何研究”课程所使用教材的基础上加以修改、充实而编写成的。

全书共分四章：几何公理；初等几何变换的理论与方法；几何轨迹；初等几何新进展简介。

本书观点新颖、材料丰富、立论严谨、叙述简明。全书配备大量典型例题和习题，为方便教者及学者，书末附有较详细的习题解答。

本书可作为高师院校、师专数学系学生的教材，也可作为中等学校数学教育研究人员及中等学校数学教师数学专业进修的参考书。

序

读了我系胡杞和周春荔两位副教授编写的《初等几何研究基础教程》以后，我觉得写得很好，思路清晰，内容丰富，立论严谨，叙述简明，是高等师范院校、各省市的教育学院和教师进修学院数学专业师生讲授或学习初等几何以及中学教师进修这方面内容的一本很好的教材或参考书。

我认为，要成为一个好的中学数学教师，必须钻研初等数学。有人认为：初等数学的内容已经定型了，没有什么值得钻研的了。这种看法不对。作为一个中学数学教师，他应该有很好的数学素养，所以他必须有良好的高等数学基础。因此当我们培养一个中学数学教师时，必须首先要求他们学好高等数学基础课，然而学了高等数学以后必须要进一步学会如何运用自己学到的高等数学知识来加深对所教的中学数学内容的理解。从这一点上来说，对初等数学进行研究就十分必要了。有一点需要强调，对初等几何的研究更加重要。因为一些高等数学课程对初等几何往往起不了直接的指导作用。要在中学里教好几何课，钻研初等几何非常重要。我相信：《初等几何研究基础教程》这本书将有助于师范院校、教育学院、教师进修学院数学专业的师生以及中学数学教师对钻研初等几何产生兴趣。

我认为，这本书的编写主导思想是好的，作者提出：用公理化的思想方法讨论综合几何的基础问题，用运动和几何变

• • •

换的观点讨论图形的几何性质。这样，将有助于本书的读者们跳出传统初等几何教材的框架，用近代数学的观点探讨初等几何问题，起到了居高临下的作用。

本书的另一个特点是理论与实践相结合。每一章有一定数量的典型例题，每一节又配备了一定数量的习题，使读者边学边练，只有通过大量解题的实践才能更好地掌握理论。这大概是学好几何的大家所公认的途径。

我希望这本书的出版会对于高师数学系初等几何课程的教学质量的提高作出贡献。

梅向明

于北京师范学院数学系

1988 年 3 月 17 日

说 明

“初等几何研究”是高等师范院校数学系的一门重要课程。本书是根据编者在北京师范大学数学系多年来讲授“初等几何研究”课程所用教材的基础上进行修改、充实而编写成的。主要内容有四章。

第一章几何公理，主要是系统介绍希尔伯特公理体系的内容，阐明欧几里得几何是在怎样的基础上，用严谨推理的方法展开的，并用公理化的思想方法分析、评述中等学校的几何教材的公理结构。本章内容对于帮助读者深入理解欧氏几何有重要作用。

第二章初等几何变换的理论与方法，主要是系统介绍了合同变换、相似变换及其乘积、反演变换的理论。用变换群的观点讨论了在各类变换下的不变性与不变量，并提供了大量的用几何变换处理几何问题的例子。本章内容对于体现用现代数学的思想方法讨论图形的几何性质、用几何变换的方法证明几何题，都提供了丰富、新颖的材料。

第三章几何轨迹，主要是从理论上讨论了轨迹的概念和三种类型轨迹命题的证明或探求方法，用综合法和解析法解答轨迹问题。本章内容对于用运动的观点讨论几何轨迹命题提供了理论和方法。

第四章初等几何新进展简介。主要介绍了近代欧氏几何的一些新发现，并且从直观而不是从公理的观点阐述了初等

拓扑变换的某些问题。本章内容对于开拓、深入研究初等几何提供了一些材料。

我们编写本书的主导思想，主要是立足于开拓和逐步更新高等师范院校数学系开设的“初等几何研究”课程的内容。我们试图在本书里用公理化的思想方法讨论综合几何的基础问题；用几何变换的理论与方法讨论综合几何的内容；用运动的观点讨论图形的几何性质。我们期望在高师院校数学系开设的“初等几何研究”的课程里，渗透着一些近代数学思想方法的气息。

运用几何学的基础知识和基本方法灵活机智地论证几何题是学好几何的重要途径。本书在重视阐明几何基本理论的基础上，注重在论证几何题中的综合、分析、演绎、归纳和运动、变换、化归等思想方法的训练，注重几何题的论证实践。为此，各章都配备一定数量的典型例题及习题。为方便教学及学习本课程起见，在书末都附有比较详细的习题解答与提示。

本书可作为高等师范院校、师专数学系“初等几何研究”课程的教材，也可作为中等学校数学教育研究人员及中等学校数学教师专业进修参考书。

编者曾使用本书的材料与观点分别在高师本科和师专、成人高等学校的数学系的“初等几何研究”课程中进行教学。在使用中针对不同的情况，对本书内容作了某些增删和变动，即使对于同一课题，其深度与广度的要求也有所不同。我们热忱地希望任课教师在使用本书时，也可根据实际情况对教材内容的深度与广度作适当的要求。

作 者

1988.3 于北京师范学院

目 录

第一章 几何公理体系	1
§ 1 欧几里得的《几何原本》.....	1
1.1 欧几里得的《几何原本》.....	1
§ 2 希尔伯特公理体系	5
2.1 结合公理及其推论	7
1 结合公理 I_{1-3}	7
2 公理 I_{1-3} 的推论	9
3 结合公理对于中等学校几何的作用	10
习题一.....	11
2.2 顺序公理及其推论	11
1 顺序公理 II_{1-4}	12
2 公理 I—II 的推论.....	13
3 顺序公理对于中等学校几何的作用	24
习题二.....	25
2.3 合同公理及其推论	26
1 合同公理 III_{1-2}	26
2 公理 I—III 的推论	28
3 合同公理对于中等学校几何的作用	46
习题三.....	48
2.4 连续公理及其推论	49
1 连续公理 IV_{1-2}	49
2 公理 I—IV 的推论	50
3 绝对几何	57

4 连续公理对于中等学校几何的作用	60
习题四	63
2.5 平行公理及其等价命题	64
1 平行公理及其推论	64
2 平行公理的等价命题	68
习题五	76
§ 3 我国中等学校几何教材的公理结构	77
1 中等学校几何教材的公理结构	77
2 中等学校几何教材的公理结构分析	78
小结	81
第二章 初等几何变换的理论与方法	85
§ 1 映射与变换	86
1.1 映射	86
1.2 变换	88
小结	91
§ 2 合同变换	92
2.1 合同变换的概念和性质	92
2.2 旋转变换及其不变性与不变量	98
习题一	108
2.3 平移变换及其不变性与不变量	109
2.4 直线反射变换及其不变性与不变量	111
习题二	119
2.5 直线反射变换的乘法	120
2.6 旋转变换的乘法	131
习题三	143
2.7 旋转、平移、直线反射变换间的乘法	144
习题四	153

小结.....	154
§ 3 相似变换	155
3.1 相似变换及其不变性与不变量	155
3.2 位似变换及其性质	160
习题五.....	176
3.3 位似旋转变换及其性质	177
习题六.....	189
小结.....	190
§4 反演变换.....	192
4.1 反演变换的概念	192
4.2 反演变换的性质	195
习题七.....	212
4.3 极点与极线	214
习题八.....	221
小结.....	221
§5 空间几何变换简介.....	224
5.1 空间合同变换	224
1 空间旋转变换与平移变换	226
2 空间反射变换	228
5.2 空间相似变换	232
5.3 空间反演变换	233
小结.....	235
第三章 几何轨迹.....	237
§ 1 平面轨迹	237
1.1 轨迹的概念	237
习题九.....	241
1.2 三种类型的轨迹命题	242

1 第 I 类型轨迹命题的证明	242
2 第 II 类型轨迹命题的探求与证明	244
3 第 III 类型轨迹命题的探求与证明	252
习题十	257
1.3 用解析法解轨迹问题	258
习题十一	268
§ 2 空间轨迹简介	269
习题十二	279
小结	279
第四章 初等几何新进展简介	282
§ 1 欧氏几何定理的新发现	282
习题十三	298
§ 2 初等拓扑的直观概念	299
2.1 初等拓扑变换的直观概念	300
2.2 网络	302
2.3 简单多面体的欧拉定理	307
习题十四	314
小结	315
习题解答与提示	317

第一章 几何公理体系

本章主要介绍希尔伯特公理体系。目的是用公理化方法,纯逻辑地展开初等几何的内容,以帮助读者深刻理解欧几里得几何的研究对象和方法。从而能“居高临下”地看待中等学校几何公理体系的结构,对于指导中等学校几何教学具有一定的意义。

§ 1 欧几里得的《几何原本》

为了理解希尔伯特公理体系的精神和思想方法,首先要了解历史上第一个几何理论的著作是非常必要的。

1.1 欧几里得的《几何原本》

从公元前 6 世纪开始,古希腊人在丰富的经验材料的基础上,逐渐重视用逻辑推理的方法研究几何理论。公元前 3 世纪,希腊数学家欧几里得(Euclid 公元前约 330—275)详尽地搜集了当时所知道的一切几何学方面的资料,并把这些分散的知识用逻辑推理的链子,把它们编排成为一个有系统的理论,写成了历史上第一部几何理论的著作,这就是《几何原本》(简称《原本》)。下面简要介绍《原本》的内容。

《原本》共分十三卷。其中第五、第七、第八、第九和第十各卷都是算术方面的内容,其余各卷的内容是几何方面的。

第一卷讨论三角形相等的条件、三角形边角关系、垂线、平行线理论、平行四边形、三角形与多边形等积的条件、勾股定理等,共48个命题.

第二卷讨论线段计算(包括黄金分割),共14个命题.

第三卷讨论圆周角、圆心角、圆的切线、割线,圆幂定理等,共37个命题.

第四卷讨论圆的内接、外切多边形和正五边形、正六边形、正十五边形的作图,共16个命题.

第六卷讨论相似多边形理论,共33个命题.

第十一卷至第十三卷讨论立体几何理论.

为了解《原本》的逻辑结构,下面专门讨论第一卷的逻辑结构,它是全书逻辑推理的基础.

《原本》第一卷给出全书最初的23个定义、5个公设和5个公理.

定义:

- (1) 点是没有部分的.
- (2) 线是有长度而没有宽度的.
- (3) 线的界限是点.
- (4) 直线是这样的线,它对于在它上面的所有各个点都有同样的位置.
- (5) 面是只有长度和宽度.
- (6) 面的界限是线.
- (7) 平面是这样的面,它对于在它上面的所有直线有同样的位置.
- (8) 平面上的角是在一个平面上的两条相交直线相互的倾斜度.

(9) 当形成一角的两线是一直线的时候，这个角叫做平角。

定义(10)一(22)是关于直角和垂线、钝角和锐角、圆、圆的中心、直线形、三角形、四边形、等边三角形、等腰三角形、不等边三角形、正方形、直角三角形、菱形等的定义。最后一个定义是：

(23) 平行直线是在同一个平面上而且尽管向两侧延长也决不相交的直线。

公设：

- 1 从每个点到每个别的点必定可以引直线。
- 2 每条直线都可以无限延长。
- 3 以任意点作中心可以用任意半径作一圆。
- 4 所有直角都相等。
- 5 一条直线与另外两条直线相交，同侧的内角和小于两直角时，这两条直线就在这一侧相交。

公理：

- 1 等于同量的量相等。
- 2 等量加等量，总量相等。
- 3 等量减等量，余量相等。
- 4 能重合的量相等。
- 5 全体大于部分。

欧几里得把公设与公理是这样区别的，公理是适用于一切科学的真理，而公设则只应用于几何。公设无需一望便知其为真，但应从其所推出的结果是否符合实际而检验其是否为真。

欧几里得在《原本》的第一卷里提出一些定义和少数公

设、公理，是作为后面逻辑推理的依据和出发点，因此叫做几何学的基础。欧几里得是第一个试图建立几何学基础的数学家，并且在《原本》中作了在定义、公设、公理的基础上，逻辑地建立几何学的尝试。因此欧几里得的工作是伟大的。此外，《原本》也是世界上最早的一本内容丰富的数学书，而且长期为后代人所使用，所以它对数学发展的影响超过任何一本其它的数学书。

不过，由于历史的局限性，《原本》并没有彻底解决建立几何学基础的问题，因此《原本》的逻辑系统是不严密的。

首先，关于定义方面。欧几里得试图对一切概念都给予定义，但这是不可能的。例如在《原本》中第一卷里的点、线、直线、面、平面都加以定义，这些定义却用了一些未经定义的概念，如“部分”、“长度”、“宽度”、“界限”、“同样位置”等等，意义模糊不清，缺乏逻辑性。

《原本》中的公理和公设的作用值得研究。如果把它们作为几何学严格的逻辑推理的根据，是很不够的。所以在证明某些问题时不得不采取直观默认的方法。主要缺少三类公理。

(1) 缺少顺序性公理。欧几里得在《原本》中使用了“直线上一点在另外两点之间”、“在直线同侧的两点”、“在直线不同侧的两点”、“在三角形内的一点”等概念，但却未把这些概念反映到公理中去。因此，对于这些语句的意义只能依靠图形的直观来理解。

(2) 缺少运动公理。欧几里得在《原本》中使用了“运动”的概念。如“把一个三角形叠合到另一个三角形上去……”。但在《原本》中却没有明确“运动”概念的意义，也没有相应的

公理,所以在论证中不得不默认图形在运动中,其形状和大小都不变的性质。

(3) 缺少“连续”性的公理。欧几里得在《原本》中,不自觉的作出直线和圆的连续性的假定,即默认直线和圆,圆和圆若相交,它们一定有交点。但是关于“连续”的概念在《原本》中却没有相应的公理。

综上所述,欧几里得的《原本》中的公理系统是不能作为几何学的逻辑推理的基础。应该怎样修改、补充《原本》中的定义、公理才能使几何学成为逻辑上完美无缺的科学呢?怎样建立几何学的牢固的逻辑基础呢?这个问题是两千年以来几何学家研究的重要课题。这项工作直到 19 世纪,由德国数学家希尔伯特 (David Hilbert, 1862—1943) 所完成。

§ 2 希尔伯特公理体系



对于欧几里得《原本》的逻辑结构中的缺陷的批评,几乎从它写成之日就已开始,许多数学家做了补充与改进的工作。例如古希腊数学家阿基米德 (Archimede 公元前 287—212 年)在他的著作《论球和柱体》中曾提出五条公理,其中一条公理是:“两条不等的线,两个不等的面,或两个不等的体,只要把可比较的量中的小的扩大到适当倍数,便会比大的一个更大”。这条公理关于线段的叙述,就是著名的阿基米德公理。在此后的两千年间,《原本》在逻辑结构方面的缺陷不断得到修正、补充。这些工作实际是重建欧几里得几何的公理系统,以建立稳固的逻辑基础。在几何公理的研究中,德国数学家巴士 (Pasch, 1843—1930) 的工作是极为突出的。他首先提