复旦大学数学系主编

数学分析

欧阳光中　朱学炎　秦曾复　编

上册

上海科学技术出版社

数　学　分　析

上　册

复旦大学数学系主编

欧阳光中　朱学炎　秦曾复　编

上海科学技术出版社

数 学 分 析(上册)

复旦大学数学系主编

欧阳光中　朱学炎　秦曾复　编

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行　上海商务印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32　印张 12.25　字数 322,000

1983 年 7 月第 1 版　1985 年 4 月第 4 次印刷

印数 28,001—34,100

统一书号: 13119·1011　　定价: 1.80 元

序

多年以来，我系一直在尝试着对数学专业以及计算数学、力学专业的教材进行改革．这项工作从六十年代一开始就着手进行了，在上海科学技术出版社的大力支持下，1960年出版了一套试用教材，并在此基础上经过修订，从1962年到1965年陆续出版了《数学分析》、《常微分方程》、《概率论与数理统计》、《数学物理方程》、《实变函数与泛函分析概要》等教材，为我系教材改革提供了一些经验．当时就数学教材提出的一些问题，如理论联系实际和教学内容现代化等问题，在今天也仍然是有意义的．

1980年，教育部颁发了部属综合性大学理科数学专业、计算数学专业的教学计划和各门课程的教学大纲．同时指出，执行教学计划和教学大纲应该体现"统一性与灵活性相结合的原则"．按照我们的体会，所谓统一性是指：教学计划和教学大纲是从总体上反映了教和学两个方面所应该达到的基本要求；而灵活性则是指在具体实施时应该从实际情况出发，在不降低基本要求的前提下，有所创新和改革．我们打算按照这一指导思想陆续编写一套教材．

要在教学计划和教学大纲的指导下编写出一套比较成熟的教材，实在不是一件轻而易举的事，它应该是一个长期努力的过程．这次编写只是作为这个过程的又一个新的开端．

数学学科与某些别的学科不同，它的基础知识相对地来说是比较成熟和稳定的．其中大量经典的内容，即使是按照现代科学技术的发展水平来看，也是必不可少的．这是一个基本的事实，是我们编写时选材的重要依据．但是我们还注意到，在各门基础课程的教材中应当防止片面追求自身的完备化，尽量根据每门课程

在整个教学计划中的作用和地位以及学时的安排，作整体的考虑．使各门教材内容的深度和广度互相衔接，协调一致，既能和教学计划中的安排相一致，又符合学生学习过程中由浅入深的认识规律．我们希望做到各门课程的教材，都能在教学计划规定的学时数内完成教学．

对某些经典的内容，我们尝试按现代数学的观点加以处理，使思想更严谨、陈述更明确简炼，并起到承上启下的作用．在进行这种尝试的时候，力求使这些处理方法能为大多数教师所接受．正确处理好具体和抽象、特殊和一般、实际和理论的辩证关系．

不断总结课堂教学的经验，是编好教材的前提之一，这次编写的教材都经过多次的课堂教学实践．一般是先编成讲义，在教学过程中，检查交流，听取有关教师和学生的意见，不断改进，其目的是为了在保证教学要求的前提下，教师便于教，学生便于学．我们将按照各门教材在教学实践中的成熟程度，陆续交付出版．

编写一套适应于四个现代化发展需要的数学教材，是一项长期而又艰巨的任务．由于我们的水平有限，实践也还不够，教材中出现各种各样的缺点和错误在所难免，殷切期望专家和广大读者提出宝贵的意见，给予批评指正，使我们的教材编写工作，日趋成熟．

上海科技出版社的同志对于我们的教材建设多年来一直给予密切配合和大力支持，我们表示衷心的感谢．

复旦大学数学系

1982.4.

编者的话

在最近几年教学实践的基础上，我们编写了这本教材．全书分上、下两册，上册的主要内容是极限论，一元微积分学和数项级数．下册的主要内容是函数项级数，欧几里得空间，多元微分学，含参变量积分和多元积分学．可以作为数学分析课程的教材，我们曾经在复旦大学数学系和上海交通大学工程力学系讲授过，授课学时在 210～240 学时之内．

数学分析的基本内容相对说来都是比较成熟和稳定的经典内容，但至今仍旧是现代科学技术（包括现代数学）所必备的基础．为了培养能够从事现代科学的研究、教学和应用的人才，必须重视这一基础的学习和训练，这是我们编写这本书的一个指导思想．

然而，经典的内容随着科学的发展，其陈述方式和处理方法在不断变化，因此用现代数学的观点来处理这些经典内容，是我们编写这本书的另一个指导思想．

数学分析的基础是实数理论，现有的分析教材大多直接不加证明地承认“单调有界数列必有极限”或“有上界的非空数集必有上确界”，以此为出发点，建立严格的极限论．本书在初等数学的基础上讲授实数系的结构，概括的叙述实数系的代数结构，顺序结构，距离（它是拓扑结构），然后采用直观的切割的方法讲解实数系的连续性，不把它作为实数的定义，而是告诉学生如何用集合论的语言和顺序关系将直观认识——实数全体象一根不间断的绳子——表达出来，并在这一基础上容易证明有上界的非空数集必有上确界，从而将极限论一步步地展开．

黎曼积分通常是用黎曼和的极限引进的，这是一个非常复杂的极限．在研究可积条件时又引进达布上和 $U(f, P)$ 和下和 $L(f, P)$，然后证明可积的充要条件是对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对 $[a, b]$ 上的任何划分 P，当相邻两分点间的最大距离小于 δ 时，$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$．在本书中我们不利用极限而仅仅利用上

下确界的概念，通过上、下和引进上、下积分，从而引进黎曼积分，其可积充要条件是对任意 $\varepsilon>0$，存在 $[a, b]$ 的一个划分 P，使 $U(f, P)-L(f, P)<\varepsilon$. 这种表达方式在相当多的场合下运用方便，论证简明. 我们又考虑到在应用中黎曼和的极限有其优越之处，所以在本书中还证明了引进定积分的两种方式是等价的.

近年来国外微积分教材在多元微积分的部分作了颇大的改革，我们参考了国外教材的变化，根据这几年来的教学实践，对欧几里得空间，多元微分学和积分学作了一些改革：用点集拓扑的观点处理欧几里得空间中的点集论，既保持原有直观，又使其表达更确切，为学生今后深入学习提供直观想象；在微分学，在讲授偏导数、方向导数之后，引进向量值函数的导数，统一处理偏导数，方向导数，雅可比矩阵；在积分学中，利用有向面积引进外积，再利用一点线性空间的知识构造出微分形式，并引进外微分的概念，从形式上统一处理多元积分学中有关内容和场论中的三个基本公式. 这些做法希望能够启发学生综合概括，起到承上启下的作用.

教材改革和基础课教学内容现代化是一件不容易的事，本书所作的努力是否恰当还有待于教学实践来检验，殷切期望广大教师和读者提出宝贵意见.

欧阳光中　朱学炎　秦曾复

1982.4.

目　　录

—— 1 ——

集合和映射

1.1 集　　合

集合概念

集合是现代数学一个最基本的概念，数学的各个分支普遍地运用集合的方法和符号．所以我们学习数学分析一开始就要熟悉它，并逐渐养成用集合的一套语言来表述数学命题．集合论的奠基者格奥尔格·康托尔*在提出这个概念的时候，将"集合"看作我们的感觉或者思维中确定的各别对象的汇总，这一个一个的对象就称为该集合的"元素"．集合，有时也叫做集．

例如，所有的自然数组成一个集合

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \cdots\};$$

又如，所有的有理数组成一个集合，记为 Q；所有的实数组成一个集合，记为 R．上面这三个例子中的元素都是数，相应的集合叫做数集．其实，集合这个概念是非常广泛的，元素不一定是数．例如由张三、李四和赵六组成一个代表团，就可以看做一个集合，此时张三作为代表团成员就是一个元素．

往后，我们说到一个集合 S 时，总是指具有某个共同性质 P 的元素 x 全体，记为

$$S=\{x\,|\,P(x)\}.$$

例如，正数全体

$$R_+=\{x\,|\,x>0\},$$

这里的 $P(x)$ 就是"$x>0$"这个命题了．我们对于性质 P 提出这样一个要求：任何对象 x 是否具有性质 P 必须能够予以确定，回

---

* 康托尔(Georg Cantor, 1845～1918)，德国数学家。

答是截然分明、毫不模糊的．如果某个对象 x 具有性质 P，即 $P(x)$ 为真，那末该对象 x 就是集合 S 的元素，记为 $x\in S$，念做 x“属于” S；否则，对象 x 不具有性质 P 或者说 $P(x)$ 为假，就称 x 不是集合 S 的元素，记为 $x\notin S$，念做 x“不属于” S.

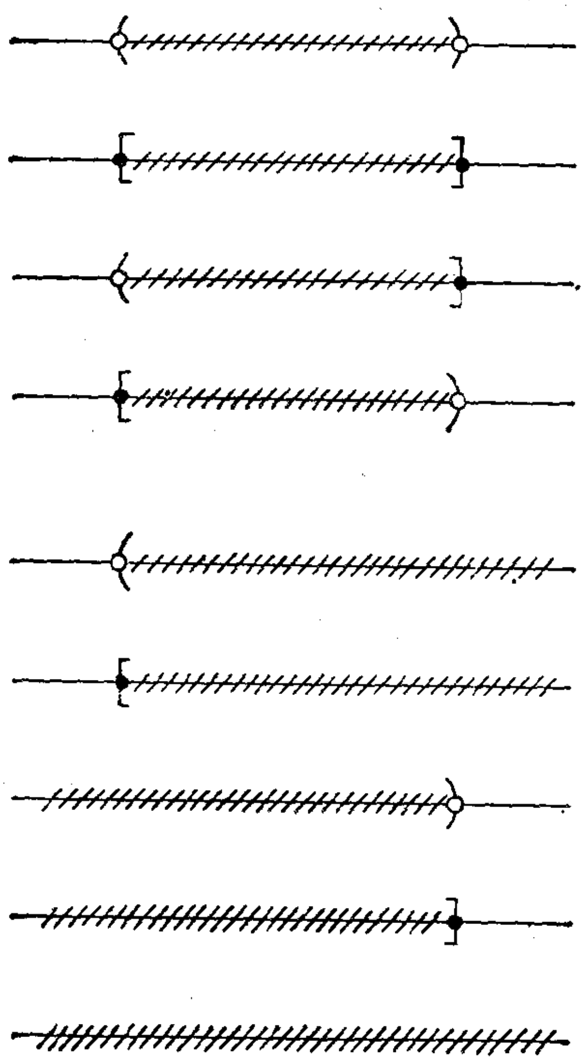

图 1-1

在数学分析里，我们常常会涉及实数的种种“区间”(图 1-1)，现在利用集合的符号定义如下：

开区间

$(a,\ b)=\{x\,|\,a<x<b\}$；

闭区间

$[a,\ b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$；

左开右闭区间

$(a,\ b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$；

左闭右开区间

$[a,\ b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$；

以及五种无限区间

$(a,\ +\infty)=\{x\,|\,x>a\}$；

$[a,\ +\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\}$；

$(-\infty,\ b)=\{x\,|\,x<b\}$；

$(-\infty,\ b]=\{x\,|\,x\leqslant b\}$；

$(-\infty,\ +\infty)=R$.

还需要提及“空集”的记号 $\emptyset$，它是一个集合，但不包含任何元素．譬如方程 $x^2+1=0$ 的实根全体

$$\{x\,|\,x\in R\quad 并且\quad x^2+1=0\}.$$

显然就是一个空集．

在讲集合的运算之前，先说一下子集以及两个集合相等的含义．

所谓集合 S 的子集 M，它也是一个集合，不过其元素都要属

于集合 S:

$$x\in M \Rightarrow x\in S.$$

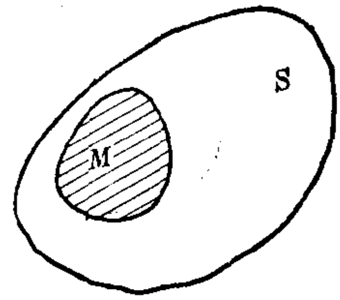

图 1-2

这时记为 $M\subset S$, 念做 M 包含在 S 内,或者说 S 包含 M(图 1-2). 上面, 我们使用了符号 $\Rightarrow$, 一般地说, $A\Rightarrow B$ 是指: 由 A 得出 B. 例如有理数集合 Q 是实数集合 R 的一个子集: $Q\subset R$. 空集 $\emptyset$ 是任何集合 S 的子集: $\emptyset\subset S$. 此外, 显然成立: $S\subset S$.

设集合 $S=\{a, b, c\}$, 则它一共有 8 个子集,它们是

$$\emptyset;$$
$$\{a\}, \{b\}, \{c\};$$
$$\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\};$$
$$\{a, b, c\}.$$

推而广之, 有 n 个元素的集合 $S=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, 有 2^n 个子集. 请读者运用数学归纳法加以证明.

进一步地, 所谓集合 M 是集合 S 的一个真子集, 首先意味着集合 M 是集合 S 的一个子集: $M\subset S$; 不仅如此, 还要存在这样的元素 $e\in S$ 但 $e\notin M$, 也就是说 $M\neq S$. 例如上述集合 S, 它有 7 个真子集: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$ 和 $\{c, a\}$.

两个集合 S 与 T 称为相等,当且仅当它们含有相同的元素:

$$x\in S \Leftrightarrow x\in T.$$

关于符号 $\Leftrightarrow$, 一般而言, $A\Leftrightarrow B$ 是指: $A\Rightarrow B$ 并且 $B\Rightarrow A$. 这里就是说, S 是 T 的子集,同时 T 也是 S 的子集: $S\subset T$ 并且 $T\subset S$. 集合 S 与集合 T 相等,记为 $S=T$.

例如,不难看出 $\{1, -1\}=\{x|x\in R \text{ 并且 } x^2-1=0\}$;

$$\emptyset=\{x|x\in R \text{ 并且 } x^2+1=0\}.$$

集合的运算

常用的集合运算有三种: 并,交,补.

两个集合 S 与 T 的并,是一个新的集合, 它是 S 与 T 元素的联合,记为 $S\cup T$(图 1-3):

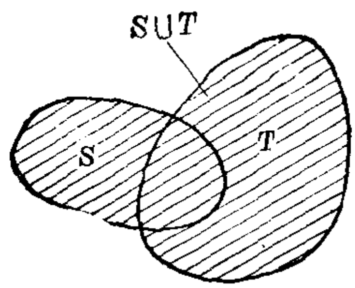

图 1-3

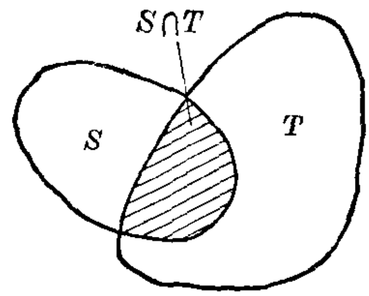

图 1-4

$$S \cup T = \{x \mid x \in S \text{ 或者 } x \in T\}.$$

有时也称 $S\cup T$ 是 S 与 T 的和集. 例如, 自然数集 N 是偶数集 E 与奇数集 F 的并:

$$N = E \cup F.$$

两个集合 S 与 T 的交, 也是一个新的集合, 它是 S 与 T 的公共部分, 记为 $S\cap T$(图 1-4):

$$S \cap T = \{x \mid x \in S \text{ 并且 } x \in T\}.$$

例如, 偶数集 E 与奇数集 F 的交是空集:

$$E \cap F = \emptyset.$$

又如区间$(-\infty,\ 1)$与区间$(0,\ +\infty)$的交是开区间$(0,\ 1)$:

$$(-\infty,\ 1) \cap (0,\ +\infty) = (0,\ 1).$$

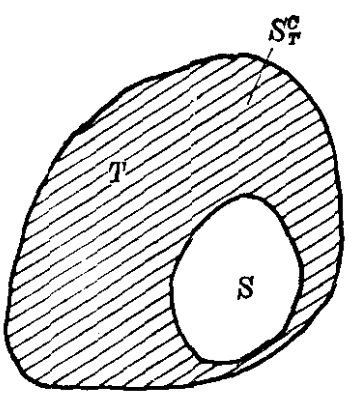

图 1-5

设集合 S 是集合 T 的一个子集, $S\subset T$. 在这种情况下, 所谓集合 S 关于集合 T 的补集, 记为 S_T^C 或简单地记为 S^C, 是指它的元素属于 T 但不属于 S(图 1-5):

$$S_T^C = \{x \mid x \in T \text{ 并且 } x \notin S\}.$$

此时, 显然有 $S\cup S^C = T$, $S\cap S^C = \emptyset$. 有的书上亦称 S_T^C 是 S 关于 T 的余集. 例如, 有理数集 Q 关于实数集 R 的补集 Q^C 就是无理数集.

集合的运算满足以下几个性质:

交换律 $A\cup B = B\cup A$; $A\cap B = B\cap A$.

结合律 $A\cup(B\cup D) = (A\cup B)\cup D$;

$A\cap(B\cap D) = (A\cap B)\cap D$.

分配律 $A\cap(B\cup D)=(A\cap B)\cup(A\cap D)$;

$A\cup(B\cap D)=(A\cup B)\cap(A\cup D)$.

对偶律 $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$; $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

在对偶律中，我们假定集合 A, B 都包含在某个集合 I 内. 上面的几个性质都是“相等”关系，所以严格地说，必须证明等号两边的集合含有相同的元素.

作为一个例子，我们来证明

$$A\cup(B\cap D)=(A\cup B)\cap(A\cup D).$$

分两步进行论证. 第一步证: $A\cup(B\cap D)\subset(A\cup B)\cap(A\cup D)$. 为此设 $x\in A\cup(B\cap D)$. 按照并的定义，或者 $x\in A$; 或者 $x\in(B\cap D)$，而按照交的定义它可以进一步说成 $x\in B$ 并且 $x\in D$. 于是得出这样一个结论，$x\in(A\cup B)$ 并且 $x\in(A\cup D)$. 这也就是说

$$x\in A\cup(B\cap D)\Rightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup D).$$

第二步证: $(A\cup B)\cap(A\cup D)\subset A\cup(B\cap D)$. 设

$$x\in[(A\cup B)\cap(A\cup D)].$$

此时按照交的定义必须成立: $x\in(A\cup B)$ 并且 $x\in(A\cup D)$. 而按照并的定义这意味着，或者 $x\in A$，要不然的话一定有 $x\in B$ 并且 $x\in D$. 由此得出

$$x\in(A\cup B)\cap(A\cup D)\Rightarrow x\in A\cup(B\cap D).$$

两步综合起来，就是 $x\in A\cup(B\cap D)\Leftrightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup D)$，亦即 $A\cup(B\cap D)=(A\cup B)\cap(A\cup D)$. 证毕.

这一条分配律是集合运算的一个特点，初学时要多加注意. 下面我们再证明一条对偶律，其余的几个等式请读者自己加以证明.

对偶律有两条，我们现在证明的是

$$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C.$$

首先证: $(A\cup B)^C\subset A^C\cap B^C$. 设 $x\in(A\cup B)^C$. 这时必有 $x\in A^C$. 否则，若 $x\in A$，就会有 $x\in A\cup B$，因而 $x\notin(A\cup B)^C$. 所以得出 $x\in(A\cup B)^C\Rightarrow x\in A^C$. 同样的道理，$x\in(A\cup B)^C\Rightarrow x\in B^C$. 由此可见

$$x\in(A\cup B)^c \Rightarrow x\in A^c\cap B^c.$$

然后反过来证：$A^c\cap B^c\subset(A\cup B)^c$. 由 $x\in A^c\cap B^c$, 得出 $x\in A^c$,

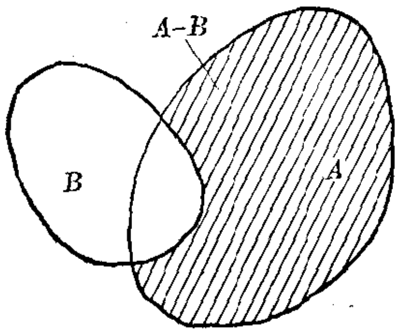

图 1-6

从而 $x\notin A$; 又因 $x\in B^c$, 而有 $x\notin B$. 所以 $x\notin A\cup B$, 即 $x\in(A\cup B)^c$. 这就是说

$$x\in A^c\cap B^c\Rightarrow x\in(A\cup B)^c.$$

两个方面综合起来，成立等式

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c.$$

证毕.

有时我们还可能会说到两个集合 A 与 B 的差. 它是一个集合，其元素属于 A 但不能同时属于 B；即相当于集合 A 中将属于 B 的那些元素去掉后，剩下的元素所组成的集合，记为 $A-B$（图 1-6）：

$$A-B=A\cap B^c.$$

例如， $(-\infty,\ +\infty)-(0,\ 1)=(-\infty,\ 0]\cup[1,\ +\infty)$.

$$[0,\ 1]-\left[\frac{1}{2},\ 2\right]=\left[0,\ \frac{1}{2}\right).$$

请思考一下：差集与补集这两个概念有什么区别？

笛卡儿乘积集合

在结束本节的时候，我们要引进两个集合的笛卡儿*乘积. 设有两个集合 A 与 B. 先在集合 A 中任意取一个元素 x: $x\in A$; 再在集合 B 中任意取一个元素 y: $y\in B$. 然后将它们组成一个有序对 $(x,\ y)$. 把这种有序对作为新的元素，这些元素的全体成为一个新的集合，称为集合 A 与集合 B 的笛卡儿乘积集合，记作 $A\times B$:

$$A\times B=\{(x,\ y)\mid x\in A \text{ 并且 } y\in B\}.$$

有时亦称 $A\times B$ 是 A 与 B 的直积. 在笛卡儿乘积集合 $A\times B$ 的本来意义下，集合 A 与集合 B 可以是任意两个很不相同的集合.

* 笛卡儿 (R. Descartes, 1596～1650)，法国数学家，哲学家，物理学家和生理学家.