应用弹性力学

王桂芳　著

成都科技大学出版社

前　言

本书主要内容是应用弹性力学基本理论求解弹性力学问题，并将着重点放在"应用"二字上，故取名《应用弹性力学》。与着重点相适应，书中对弹性力学基本理论部份未作详尽阐述，只是引用，以节省篇幅。这样，要求读者在阅读本书时需具备一定的弹性力学基础知识，这些基础知识在一般的弹性力学书籍中均有论述。

基于弹性力学基本理论，著者提出了一个求解弹性力学问题的解析法。该方法的要点是：利用体积应变函数，将求解弹性力学问题耦联的控制方程解耦成为非耦联的，把原来需求解联立偏微分方程组的问题，变成求解若干单个偏微分方程的问题；从而降低了问题的求解难度，为求解弹性力学问题开辟了新途径。本书就是利用著者提出的方法求解若干弹性力学问题所获研究成果的反映。需指出的是，书中所述内容仅只是该方法在弹性力学某些方面的应用，该方法还可用于求解其它问题。

全书共五章，现简介于下。

第一章　平面问题　给出直角坐标和极坐标情况下分别按位移和应力求解时非耦联的控制方程，并用于求解各种边界条件下深梁及圆弧厚拱的应力分析问题。

第二章　空间问题　分别给出直角坐标、圆柱坐标及球坐标情形下非耦联的控制方程，并用于求解矩形厚板、立方块体、圆形厚板、有限及无限长圆柱体、球形厚壳的应力分析问题。

第三章　中厚板弯曲问题　以Reissner 中厚板理论为基础，分别给出直角坐标和极坐标情形下非耦联的控制方程，并用于求解各种边界条件下矩形和圆形中厚板的弯曲问题。

第四章　薄板大挠度问题　用摄动法求解薄板大挠度问题。分别给出直角坐标和极坐标情形下各级摄动解非耦联的控制方程，并用于求解各种边界条件下矩形及圆形薄板弯曲的大挠度问题。

第五章　其它问题　讨论三个问题，即热弹性耦合问题，地应力测量的三维理论及具有凸缘加劲肋圆孔的应力分析。

本书内容主要是我们的研究成果，著者的研究生中有部分人参与过这项工作，他们是：唐　明、何晋红、杨太安、何振一、郭　毅等。本书也凝聚着他们的汗水，在此著者对他们付出的辛勤劳动表示衷心感谢。另外，由于水平所限，书中谬误和不妥之处在所难免，特别是有的公式冗长，虽经反复校核，仍可能有错漏之处，恳请读者批评指正。

著　者

1994 年6 月于四川联合大学

（成都科技大学）

目　录

第一章　平面问题

§1－1　直角坐标下按位移求解的控制方程

当取用直角坐标系xoy时，求解弹性力学问题的基本方程为[1]

平衡方程

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+X=0,\quad \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+Y=0 \tag{1.1}$$

几何方程

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.2}$$

物理方程

对于平面应力问题：

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}(\sigma_x-\upsilon\sigma_y),\quad \varepsilon_y=\frac{1}{E}(\sigma_y-\upsilon\sigma_x),\quad \gamma_{xy}=\frac{2(1+\upsilon)}{E}\tau_{xy} \tag{1.3}$$

或

$$\sigma_x=\frac{E}{1-\upsilon^2}(\varepsilon_x+\upsilon\varepsilon_y),\quad \sigma_y=\frac{E}{1-\upsilon^2}(\varepsilon_y+\upsilon\varepsilon_x),\quad \tau_{xy}=\frac{E}{2(1+\upsilon)}\gamma_{xy} \tag{1.4}$$

对于平面应变问题，则须将式(1.3)和(1.4)中之E换为$\frac{E}{1-\upsilon^2}$，υ换为$\frac{\upsilon}{1-\upsilon}$。

首先讨论平面应力问题的控制方程。

将式(1.2)代入式(1.4)中，再将式(1.4)代入式(1.1)，有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{E}{1-\upsilon^2}\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{1-\upsilon}{2}\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{1+\upsilon}{2}\frac{\partial^2v}{\partial x\partial y}\right)+X=0\\&\frac{E}{1-\upsilon^2}\left(\frac{\partial^2v}{\partial y^2}+\frac{1-\upsilon}{2}\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\frac{1+\upsilon}{2}\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\right)+Y=0\end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

式(1.5)即为传统的弹性力学平面应力问题求解位移分量u和v的控制方程。

引入体积应变函数e，对平面应力问题

$$e=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=\frac{1-2\upsilon}{1-\upsilon}(\varepsilon_x+\varepsilon_y)=\frac{1-2\upsilon}{1-\upsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{1.6}$$

利用式(1.6)，式(1.5)可以写成

$$\left.\begin{aligned}&\frac{E}{2(1+\upsilon)}\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{1+\upsilon}{1-2\upsilon}\frac{\partial e}{\partial x}\right)+X=0\\&\frac{E}{2(1+\upsilon)}\left(\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v}{\partial y^2}+\frac{1+\upsilon}{1-2\upsilon}\frac{\partial e}{\partial y}\right)+Y=0\end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

如果将式(1.7)中之e也视为独立的未知函数，则u、v及e三个函数须由式(1.6)及(1.7)的三个方程确定。为了我们的目的，利用式(1.6)及(1.7)之关系推导另一个求解e的方程。

分别对式(1.7)第一式及第二式分别关于x和y求一次导数，然后相加，并利用式

(1.6)，可得

$$\frac{E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\left(\frac{\partial^2 e}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 e}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=0 \tag{1.8}$$

式(1.8)就是我们所需要的求解e的方程。从而有求解u、v及e的如下控制方程组：

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2 e&=-\frac{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}{E}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\\ \nabla^2 u&=-\frac{1+\upsilon}{1-2\upsilon}\frac{\partial e}{\partial x}-\frac{2(1+\upsilon)}{E}X\\ \nabla^2 v&=-\frac{1+\upsilon}{1-2\upsilon}\frac{\partial e}{\partial y}-\frac{2(1+\upsilon)}{E}Y\end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

式中 $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$

控制方程(1.9)的优点是非耦联的。先由第一式求解e，(其中X和Y是已知函数)，然后将求解得的e分别代入第二式和第三式中求解u和v。这样，所求解的均为独立的二阶偏微分方程。

进而采用如下无因次量：

$$\left.\begin{aligned}&(\bar{x},\bar{y})=\frac{1}{a}(x,y),\quad(\bar{u},\bar{v})=\frac{1-2\upsilon}{\upsilon a}(u,v)\\ &(\bar{\sigma}_x,\bar{\sigma}_y,\bar{\tau}_{xy})=\frac{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}{\upsilon E}(\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy})\\ &(\bar{X},\bar{Y})=\frac{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)a}{\upsilon E}(X,Y)\end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

式中a为特征长度，取作参考值。于是，我们有确定无因次量函数$\bar{u}$、$\bar{v}$及$\bar{e}$的如下无因次控制方程：

$$\left.\begin{aligned}\overline{\nabla}^2\bar{e}&=-\upsilon\left(\frac{\partial\bar{X}}{\partial\bar{x}}+\frac{\partial\bar{Y}}{\partial\bar{y}}\right)\\ \overline{\nabla}^2\bar{u}&=-\frac{1+\upsilon}{\upsilon}\frac{\partial\bar{e}}{\partial\bar{x}}-2\bar{X}\\ \overline{\nabla}^2\bar{v}&=-\frac{1+\upsilon}{\upsilon}\frac{\partial\bar{e}}{\partial\bar{y}}-2\bar{Y}\end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

式中 $\overline{\nabla}^2=\frac{\partial^2}{\partial\bar{x}^2}+\frac{\partial^2}{\partial\bar{y}^2}$， $\bar{e}$与$\bar{u}$、$\bar{v}$间的关系为

$$\bar{e}=\frac{\upsilon}{1-\upsilon}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}\right) \tag{1.12}$$

利用式(1.10)之无因次量及关系式(1.12)，由式(1.2)及(1.4)可得如下无因次应力一位移关系：

$$\bar{\sigma}_x=\bar{e}+\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}},\quad\bar{\sigma}_y=\bar{e}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}},\quad\bar{\tau}_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}\right) \tag{1.13}$$

式(1.11)～(1.13)即为以下求解平面应力问题时所使用的控制方程和关系式。

用同样的方法可得到如下平面应变问题的控制方程：

$$
\left.\begin{aligned}
\nabla^2\bar{e} &= -\frac{\upsilon}{1-\upsilon}\left(\frac{\partial\bar{X}}{\partial\bar{x}}+\frac{\partial\bar{Y}}{\partial\bar{y}}\right)\\
\nabla^2\bar{u} &= -\frac{1}{\upsilon}\frac{\partial\bar{e}}{\partial\bar{x}}-2\bar{X}\\
\nabla^2\bar{v} &= -\frac{1}{\upsilon}\frac{\partial\bar{e}}{\partial\bar{y}}-2\bar{Y}
\end{aligned}\right\}
\tag{1.14}
$$

在此情形下，$\bar{e}$ 与$\bar{u}$、$\bar{v}$ 间的关系为

$$
\bar{e}=\frac{\upsilon}{1-2\upsilon}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}\right)
\tag{1.15}
$$

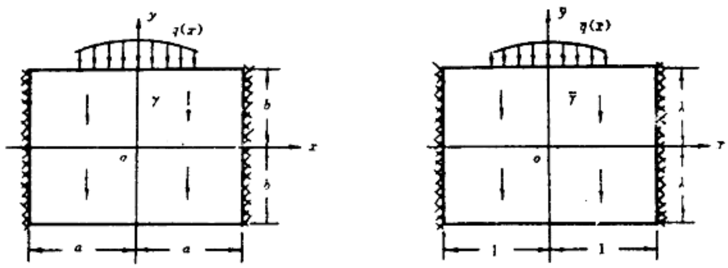
而应力一位移关系仍与式(1.13)相同，只是其中$\bar{e}$ 应按式(1.15)计算。

下面利用有关控制方程和关系式求解若干具体问题，并阐明求解方法的原理和步骤。

§1－2　两端固定深梁的应力分析

如图1.1(a)所示两端固定深梁，跨长$2a$，梁高$2b$；梁单位体积重为γ；梁的上边界受竖向分布荷载$q(x)$；梁的受力属平面应力问题。

取用如图所示直角坐标系xoy。不失一般性，设荷载$q(x)$关于y 轴对称，即$q(x)=q(-x)$。



(a)　　　　(b)

图 1.1

取用半跨长a 为参考长度，在式(1.10)无因次量的情况下，并将荷载$q(x)$转化为无因次量$\bar{q}(\bar{x})=\dfrac{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}{\upsilon E}q(x)$，则图1.1($a$)成为图1.1($b$)，图中$\lambda=b/a$。

注意到体积力为梁的自重，则$\bar{X}=0$、$\bar{Y}=-\bar{\gamma}\left(\bar{\gamma}=\dfrac{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)a}{\upsilon E}\gamma\right)$，控制方程(1.12)成为

$$
\nabla^2\bar{e}=0,\quad \nabla^2\bar{u}=-\frac{1+\upsilon}{\upsilon}\frac{\partial\bar{e}}{\partial\bar{x}},\quad \nabla^2\bar{v}=-\frac{1+\upsilon}{\upsilon}\frac{\partial\bar{e}}{\partial\bar{y}}+2\bar{\gamma}
\tag{1.16}
$$

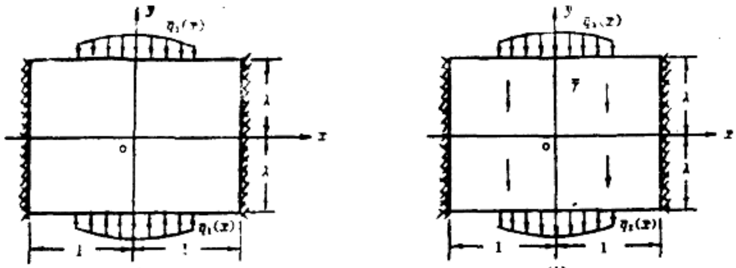
为了简化计算，将图1.1(b)所示之荷载分解为如图1.2(a)和(b)所示关于轴$\bar{x}$ 对称和反对称两种情形。

由图1.2 有如下边界条件：

对称荷载情形[图1.2(a)]

$$
\left.\begin{aligned}
&\bar{x}=\pm 1,\quad \bar{u}=0,\quad \bar{v}=0\\
&\bar{y}=\pm\lambda,\quad \bar{\sigma}_y=-\bar{q}_1(\bar{x}),\quad \bar{\tau}_{yx}=0
\end{aligned}\right\}
\tag{1.17}
$$

注意到式(1.)，条件(1.17)可写成



(a) (b)

图 1.2

$$\left.\begin{aligned}&\bar{x}=\pm 1,\quad \bar{u}=0,\quad \bar{v}=0\\&\bar{y}=\pm\lambda,\quad \frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}=-\bar{e}-\bar{q}_1(\bar{x}),\quad \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}=-\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}\end{aligned}\right\}\tag{1.18}$$

反对称荷载情形[图1.2(b)]

$$\left.\begin{aligned}&\bar{x}=\pm 1,\quad \bar{u}=0,\quad \bar{v}=0\\&\bar{y}=\pm\lambda,\quad \bar{\sigma}_y=\mp\bar{q}_2(\bar{x}),\quad \bar{\tau}_{yx}=0\end{aligned}\right\}\tag{1.19}$$

注意到式(1.13)，条件(1.19)可写成

$$\left.\begin{aligned}&\bar{x}=\pm 1,\quad \bar{u}=0,\quad \bar{v}=0\\&\bar{y}=\pm\lambda,\quad \frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}=-\bar{e}\mp\bar{q}_2(\bar{x}),\quad \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}=-\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}\end{aligned}\right\}\tag{1.20}$$

(一)　两端固定深梁应力分析的边值问题

综合控制方程(1.16)及边界条件(1.18)和(1.20)，两端固定深梁应力分析的问题归结为如下单个偏微分方程的边值问题：

对称荷载情形[图1.2(a)]

1.
$$\left.\begin{aligned}&\bar{\nabla}^2\bar{e}=0,\\&\bar{x}=\pm 1;\quad \bar{e}=f_1(\bar{y});\quad \bar{y}=\pm\lambda,\quad \bar{e}=f_2(\bar{x})\end{aligned}\right\}\tag{1.21}$$

其中 $f_1(\bar{y})$ 及 $f_2(\bar{x})$ 为待确定之函数。

2.
$$\left.\begin{aligned}&\bar{\nabla}^2\bar{u}=-\frac{1+\upsilon}{\upsilon}\frac{\partial\bar{e}}{\partial\bar{x}}\\&\bar{x}=\pm 1,\quad \bar{u}=0;\quad \bar{y}=\pm\lambda,\quad \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}=-\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}\end{aligned}\right\}\tag{1.22}$$

3.
$$\left.\begin{aligned}&\bar{\nabla}^2\bar{v}=-\frac{1+\upsilon}{\upsilon}\frac{\partial\bar{e}}{\partial\bar{y}}\\&\bar{x}=\pm 1,\quad \bar{v}=0;\quad \bar{y}=\pm\lambda,\quad \frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}=-\bar{e}-\bar{q}_1(\bar{x})\end{aligned}\right\}\tag{1.23}$$

反对称荷载情形[图1.2(b)]

1.
$$\left.\begin{aligned}&\bar{\nabla}^2\bar{e}=0\\&\bar{x}=\pm 1;\quad \bar{e}=g_1(\bar{y});\quad \bar{y}=\pm\lambda,\quad \bar{e}=\pm g_2(\bar{x})\end{aligned}\right\}\tag{1.24}$$

其中 $g_1(\bar{y})$ 及 $g_2(\bar{x})$ 为待确定之函数。

2.
$$\left.\begin{aligned}&\bar{\nabla}^2\bar{u}=-\frac{1+\upsilon}{\upsilon}\frac{\partial\bar{e}}{\partial\bar{x}}\\&\bar{x}=\pm 1,\quad \bar{u}=0;\quad \bar{y}=\pm\lambda,\quad \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}=-\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}\end{aligned}\right\}\tag{1.25}$$

3. $$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\bar{v}=-\frac{1+\nu}{\nu}\frac{\partial\bar{e}}{\partial\bar{y}}+2\bar{Y}\\&\bar{x}=\pm 1,\quad \bar{v}=0;\quad \bar{y}=\pm\lambda,\quad \frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}=-\bar{e}\mp\bar{q}_2(\bar{x})\end{aligned}\right\}\tag{1.26}$$

（二） 对称荷载情形下的解答

1. 求解$\bar{e}$

将式(1.21)中之待确定函数$f_1(\bar{y})$和$f_2(\bar{x})$表示为如下级数形式：

$$f_1(\bar{y})=\sum_{i=1}^{\infty}A_i\cos\alpha_i'\bar{y},\quad f_2(\bar{x})=\sum_{i=1}^{\infty}B_i\cos\alpha_i\bar{x}\tag{1.27}$$

式中A_i和B_i为待定系数， $\alpha_i=(i-0.5)\pi$， $\alpha'_i=(i-0.5)\pi/\lambda$.

于是，由式(1.21)有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2\bar{e}}{\partial\bar{x}^2}+\frac{\partial^2\bar{e}}{\partial\bar{y}^2}=0\\&\bar{x}=\pm 1,\quad \bar{e}=\sum_{i=1}^{\infty}A_i\cos\alpha'_i\bar{y};\quad \bar{y}=\pm\lambda,\quad \bar{e}=\sum_{i=1}^{\infty}B_i\cos\alpha_i\bar{x}\end{aligned}\right\}\tag{1.28}$$

不难验证，边值问题(1.28)之解为

$$\bar{e}=\sum_{i=1}^{\infty}\left[A_i\frac{\mathrm{ch}\alpha_i'\bar{x}\cos\alpha_i'\bar{y}}{\mathrm{ch}\alpha_i'}+B_i\frac{\cos\alpha_i\bar{x}\,\mathrm{ch}\alpha_i\bar{y}}{\mathrm{ch}\alpha_i\lambda}\right]\tag{1.29}$$

2. 求解$\bar{u}$

将式(1.29)代入式(1.22)中，有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{x}^2}+\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{y}^2}=-\frac{1+\nu}{\nu}\sum_{i=1}^{\infty}\left[A_i\frac{\alpha_i'\,\mathrm{sh}\alpha_i'\bar{x}\cos\alpha_i'\bar{y}}{\mathrm{ch}\alpha_i'}-B_i\frac{\alpha_i\sin\alpha_i\bar{x}\,\mathrm{ch}\alpha_i\bar{y}}{\mathrm{ch}\alpha_i\lambda}\right]\\&\bar{x}=\pm 1,\quad \bar{u}=0;\quad \bar{y}=\pm\lambda,\quad \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}=-\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}\end{aligned}\right\}\tag{1.30}$$

用有限积分变换法求解边值问题(1.30)，并取用如下积分变换式：

$$\left.\begin{aligned}&\text{正变换：}\quad \bar{u}^*(\beta_j,\bar{y})=\int_{-1}^{+1}\bar{u}(\bar{x},\bar{y})\sin\beta_j\bar{x}d\bar{x}\\&\text{逆变换：}\quad \bar{u}(\bar{x},\bar{y})=\sum_{j=1}^{\infty}\bar{u}^*(\beta_j,\bar{y})\sin\beta_j\bar{x}\end{aligned}\right\}\tag{1.31}$$

式中 $\beta_j=j\pi$

以$\sin\beta_j\bar{x}$乘式(1.30)之两端，并从-1到$+1$对$\bar{x}$进行积分，有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2\bar{u}^*}{d\bar{y}^2}-\beta_j^2\bar{u}^*=-\frac{1+\nu}{\nu}\sum_{i=1}^{\infty}\left[A_i\frac{\alpha_i'E_{ij}'\cos\alpha_i'\bar{y}}{\mathrm{ch}\alpha_i'}-B_i\frac{\alpha_iF_{ij}'\,\mathrm{ch}\alpha_i\bar{y}}{\mathrm{ch}\alpha_i\lambda}\right]\\&\bar{y}=\pm\lambda,\quad \frac{d\bar{u}^*}{d\bar{y}}=-\int_{-1}^{+1}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}\sin\beta_j\bar{x}d\bar{x}\end{aligned}\right\}\tag{1.32}$$

式中 $E_{ij}'=\int_{-1}^{+1}\mathrm{sh}\alpha_i'\bar{x}\sin\beta_j\bar{x}d\bar{x}=-\dfrac{2\beta_j\mathrm{sh}\alpha_i'\cos\beta_j}{\alpha_i'^2+\beta_j^2}$

$F_{ij}'=\int_{-1}^{+1}\sin\alpha_i\bar{x}\sin\beta_j\bar{x}d\bar{x}=\dfrac{\sin(\alpha_i-\beta_j)}{\alpha_i-\beta_j}-\dfrac{\sin(\alpha_i+\beta_j)}{\alpha_i+\beta_j}$

注意到$\bar{u}$为$\bar{y}$之偶函数，式(1.32)第一式之解为

$$\bar{u}^{*}=C_j\mathrm{ch}\beta_j\bar{y}+\sum_{i=1}^{\infty}[A_iE_{ij}\cos\alpha_i'\bar{y}+B_iF_{ij}\mathrm{ch}\alpha_i\bar{y}] \tag{1.33}$$

式中 $E_{ij}=\dfrac{1+\upsilon}{\upsilon}\dfrac{\alpha_i'E'_{ij}}{(\alpha_i'^2+\beta_j^2)\mathrm{ch}\alpha_i'}$，$F_{ij}=\dfrac{1+\upsilon}{\upsilon}\dfrac{\alpha_iF'_{ij}}{(\alpha_i^2-\beta_j^2)\mathrm{ch}\alpha_i\lambda}$

C_j 为积分常数，由式(1.32)第二式之条件确定，即

$$\left.\begin{aligned}&C_j\beta_j\mathrm{sh}\beta_j\lambda-\sum_{i=1}^{\infty}[A_i\alpha_i'E_{ij}\sin\alpha_i'\lambda-B_i\alpha_iF_{ij}\mathrm{sh}\alpha_i\lambda]\\&=-\int_{-1}^{+1}\left[\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}\right]_{\bar{y}=+\lambda}\sin\beta_j\bar{x}d\bar{x},\quad j=1,2,3,\cdots\end{aligned}\right. \tag{1.34}$$

将式(1.33)进行逆变换，有

$$\bar{u}=\sum_{j=1}^{\infty}\left[C_j\mathrm{ch}\beta_j\bar{y}+\sum_{i=1}^{\infty}A_iE_{ij}\cos\alpha_i'\bar{y}+\sum_{i=1}^{\infty}B_iF_{ij}\mathrm{ch}\alpha_i\bar{y}\right]\sin\beta_j\bar{x} \tag{1.35}$$

3. 求解$\bar{v}$

将式(1.29)代入式(1.23)，有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{x}^2}+\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial\bar{y}^2}=\frac{1+\upsilon}{\upsilon}\sum_{i=1}^{\infty}\left[A_i\frac{\alpha_i'\mathrm{ch}\alpha_i'\bar{x}\sin\alpha_i'\bar{y}}{\mathrm{ch}\alpha_i'}-B_i\frac{\alpha_i\cos\alpha_i\bar{x}\mathrm{sh}\alpha_i\bar{y}}{\mathrm{ch}\alpha_i\lambda}\right]\\&\bar{x}=\pm1,\quad\bar{v}=0;\quad\bar{y}=\pm\lambda,\quad\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}=-\sum_{i=1}^{\infty}B_i\cos\alpha_i\bar{x}-\bar{q}_1(\bar{x})\end{aligned}\right\} \tag{1.36}$$

仍用有限积分变换法求解边值问题(1.36)，并取用如下积分变换式：

$$\left.\begin{aligned}&\text{正变换：}\quad\bar{v}^{*}(\alpha_j,\bar{y})=\int_{-1}^{+1}\bar{v}(\bar{x},\bar{y})\cos\alpha_j\bar{x}d\bar{x}\\&\text{逆变换：}\quad\bar{v}(\bar{x},\bar{y})=\sum_{j=1}^{\infty}\bar{v}^{*}(\alpha_j,\bar{y})\cos\alpha_j\bar{x}\end{aligned}\right\} \tag{1.37}$$

式中 $\alpha_j=(j-0.5)\pi$

仿求解$\bar{u}$ 的方法，最后得

$$\bar{v}=-\sum_{j=1}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{\infty}A_iG_{ij}\sin\alpha_i'\bar{y}-B_j(L_j\mathrm{sh}\alpha_j\bar{y}-H_j\bar{y}\mathrm{ch}\alpha_j\bar{y})+\frac{a_j\mathrm{sh}\alpha_j\bar{y}}{\alpha_j\mathrm{ch}\alpha_j\lambda}\right]\cos\alpha_j\bar{x} \tag{1.38}$$

式中 $L_j=\dfrac{1}{\alpha_j\mathrm{ch}\alpha_j\lambda}\left[\dfrac{1+\upsilon}{2\upsilon}(1+\alpha_j\lambda\mathrm{th}\alpha_j\lambda)-1\right]$，$G_{ij}=\dfrac{1+\upsilon}{\upsilon}\dfrac{\alpha_i'G_{ij}'}{(\alpha_i'^2+\alpha_j^2)\mathrm{ch}\alpha_i'}$

$G_{ij}'=\dfrac{2\alpha_j\mathrm{ch}\alpha_i'\sin\alpha_j}{(\alpha_i'^2+\alpha_j^2)}$，$H_j=\dfrac{1+\upsilon}{2\upsilon}\dfrac{1}{\mathrm{ch}\alpha_j\lambda}$，$a_j=\displaystyle\int_{-1}^{+1}\bar{q}_1(\bar{x})\cos\alpha_j\bar{x}d\bar{x}$

4. 确定常数A_i、B_i 及C_i

式(1.29)、(1.35)及(1.38)中A_i、B_i 和C_i 尚是未知的，还需要确定。常数A_i、B_i 和C_i 之确定，除利用条件(1.34)外，尚须利用如下两个条件：

$$\bar{x}=\pm1,\quad\bar{e}=\frac{\upsilon}{1-\upsilon}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}\right) \tag{1.39}$$

$$\bar{y}=\pm\lambda,\quad\bar{e}=\frac{\upsilon}{1-\upsilon}\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}\right) \tag{1.40}$$

利用条件(1.34)、(1.39)及(1.40)，最后得到确定常数A_i、B_i 和C_i 的如下线性代数方程组：

$$
\left.\begin{aligned}
&A_iX_{1i}-\sum_{j=1}^{\infty}B_jY_{1ij}-\sum_{j=1}^{\infty}C_j\beta_jN_{ij}\cos\beta_j=0\\
&B_i\frac{1}{\upsilon}-\sum_{j=1}^{\infty}B_jY_{2ij}-\sum_{j=1}^{\infty}C_j\beta_jQ_{ij}\mathrm{ch}\beta_j\lambda=-a_i\\
&\sum_{j=1}^{\infty}A_jX_{3ij}+\sum_{j=1}^{\infty}B_jY_{3ij}-C_i\beta_i\mathrm{sh}\beta_i\lambda=Z_i
\end{aligned}\right\}\quad i=1,2,3,\cdots \tag{1.41}
$$

式中 $X_{1i}=\dfrac{1-\upsilon}{\upsilon}-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\beta_kE_{ik}\cos\beta_k$， $Y_{1ij}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\beta_kF_{jk}P_{ij}\cos\beta_k$， $Y_{2ij}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\beta_kQ_{ik}F_{jk}\mathrm{ch}\alpha_j\lambda$

$X_{3ij}=\left[\alpha_j'E_{ji}-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_kG_{jk}M_{ik}\right]\sin\alpha_j'\lambda$， $Y_{3ij}=\alpha_jM_{ij}(L_j\mathrm{sh}\alpha_j\lambda-H_j\lambda\mathrm{ch}\alpha_j\lambda)-\alpha_jF_{ji}\mathrm{sh}\alpha_j\lambda$

$Z_i=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_kM_{ik}\mathrm{th}\alpha_k\lambda$， $M_{ik}=\dfrac{\sin(\alpha_k-\beta_i)}{\alpha_k-\beta_i}-\dfrac{\sin(\alpha_k+\beta_i)}{\alpha_k+\beta_i}$， $N_{ij}=\dfrac{2\alpha_i'\mathrm{ch}\beta_j\lambda\sin\alpha_i'\lambda}{\lambda(\alpha_i'^2+\beta_j^2)}$

$P_{ij}=\dfrac{2\alpha_i'\mathrm{ch}\alpha_j\lambda\sin\alpha_i'\lambda}{\lambda(\alpha_i'^2+\alpha_j^2)}$， $Q_{ij}=\dfrac{\sin(\alpha_i-\beta_j)}{\alpha_i-\beta_j}+\dfrac{\sin(\alpha_i+\beta_j)}{\alpha_i+\beta_j}$

5. 应力分量

由求解式(1.41)之方程组确定常数A_i、B_i和C_i后，代入式(1.29)、(1.35)和(1.38)中即可进行计算$\bar{e}$、$\bar{u}$和$\bar{v}$。再将式(1.29)、(1.35)及(1.38)之$\bar{e}$、$\bar{u}$和$\bar{v}$代入式(1.13)中，则得到如下应力分量的表达式：

$$
\left.\begin{aligned}
\bar{\sigma}_x=&\sum_{i=1}^{\infty}A_i\left[\frac{\mathrm{ch}\alpha_i'\bar{x}\cos\alpha_i'\bar{y}}{\mathrm{ch}\alpha_i'}+\sum_{j=1}^{\infty}\beta_jE_{ij}\cos\beta_j\bar{x}\cos\alpha_i'\bar{y}\right]+\sum_{i=1}^{\infty}B_i\left[\frac{\cos\alpha_i\bar{x}\mathrm{ch}\alpha_i\bar{y}}{\mathrm{ch}\alpha_i\lambda}\right.\\
&\left.+\sum_{j=1}^{\infty}\beta_jF_{ij}\cos\beta_j\bar{x}\mathrm{ch}\alpha_i\bar{y}\right]+\sum_{i=1}^{\infty}C_i\beta_i\cos\beta_i\bar{x}\mathrm{ch}\beta_i\bar{y}\\
\bar{\sigma}_y=&\sum_{i=1}^{\infty}A_i\left[\frac{\mathrm{ch}\alpha_i'\bar{x}\cos\alpha_i'\bar{y}}{\mathrm{ch}\alpha_i'}-\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_i'G_{ij}\cos\alpha_j\bar{x}\cos\alpha_i'\bar{y}\right]+\sum_{i=1}^{\infty}B_i\left\{\frac{\cos\alpha_i\bar{x}\mathrm{ch}\alpha_i\bar{y}}{\mathrm{ch}\alpha_i\lambda}\right.\\
&\left.+[(\alpha_iL_i-H_i)\mathrm{ch}\alpha_i\bar{y}-H_i\alpha_i\bar{y}\mathrm{sh}\alpha_i\bar{y}]\cos\alpha_i\bar{x}\right\}-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j\cos\alpha_j\bar{x}\mathrm{ch}\alpha_j\bar{y}}{\mathrm{ch}\alpha_j\lambda}\\
\bar{\tau}_{xy}=&\frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{\infty}A_i\sum_{j=1}^{\infty}[\alpha_jG_{ij}\sin\alpha_j\bar{x}-\alpha_i'E_{ij}\sin\beta_j\bar{x}]\sin\alpha_i'\bar{y}\right.\\
&-\sum_{i=1}^{\infty}B_i\left[\alpha_i(L_i\mathrm{sh}\alpha_i\bar{y}-H_i\bar{y}\mathrm{ch}\alpha_i\bar{y})\sin\alpha_i\bar{x}-\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_iF_{ij}\sin\beta_j\bar{x}\mathrm{sh}\alpha_i\bar{y}\right]\\
&\left.+\sum_{i=1}^{\infty}C_i\beta_i\sin\beta_i\bar{x}\mathrm{sh}\beta_i\bar{y}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j\sin\alpha_j\bar{x}\mathrm{sh}\alpha_j\bar{y}}{\mathrm{ch}\alpha_j\lambda}\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{1.42}
$$

(三) 反对称荷载情形的解答

将式(1.24)中之待确定函数$g_1(\bar{y})$及$g_2(\bar{x})$表示为如下级数形式：

$$
g_1(\bar{y})=\sum_{i=1}^{\infty}A_i\sin\beta_i'\bar{y},\quad g_2(\bar{x})=\sum_{i=1}^{\infty}B_i\cos\alpha_i\bar{x} \tag{1.43}
$$

式中A_i和B_i为待定系数； $\alpha_i=(i-0.5)\pi$， $\beta_i'=i\pi/\lambda$。

仿求解对称荷载情形解答的方法和步骤，不难得到反对称荷载情形的解答。这里略去演算过程，直接给出有关的表达式和算式。

1. $\bar{e}$、$\bar{u}$ 及 $\bar{v}$ 的表达式

$$
\left.\begin{aligned}
\bar{e} &= \sum_{i=1}^{\infty}\left[A_i\frac{\mathrm{ch}\beta_i'\bar{x}\sin\beta_i'\bar{y}}{\mathrm{ch}\beta_i'} + B_i\frac{\cos\alpha_i\bar{x}\,\mathrm{sh}\alpha_i\bar{y}}{\mathrm{sh}\alpha_i\lambda}\right]\\
\bar{u} &= \sum_{j=1}^{\infty}\left[C_j\mathrm{sh}\beta_j\bar{y} + \sum_{i=1}^{\infty}A_iE_{ij}\sin\beta_i'\bar{y} + \sum_{i=1}^{\infty}B_iF_{ij}\mathrm{sh}\alpha_i\bar{y}\right]\sin\beta_j\bar{x}\\
\bar{v} &= \sum_{j=1}^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{\infty}A_iG_{ij}\cos\beta_i'\bar{y} + B_j(L_j\mathrm{ch}\alpha_j\bar{y} - H_j\bar{y}\mathrm{sh}\alpha_j\bar{y}) - \frac{a_j\mathrm{ch}\alpha_j\bar{y}}{\alpha_j\mathrm{sh}\alpha_j\lambda} - \frac{4\bar{\gamma}\sin\alpha_j}{\alpha_j^3}\right]\cos\alpha_j\bar{x}
\end{aligned}\right\}
\tag{1.44}
$$

式中 $E_{ij}=\dfrac{1+\upsilon}{\upsilon}\dfrac{\beta_i'E_{ij}'}{(\beta_i'^2+\beta_j^2)\mathrm{ch}\beta_i'}$， $E_{ij}'=-\dfrac{2\beta_j\mathrm{sh}\beta_i'\cos\beta_j}{\beta_i'^2+\beta_j^2}$， $F_{ij}=\dfrac{1-\upsilon}{\upsilon}\dfrac{\alpha_iF_{ij}'}{(\alpha_i^2-\beta_j^2)\mathrm{sh}\alpha_i\lambda}$

$F_{ij}'=\dfrac{\sin(\alpha_i-\beta_j)}{\alpha_i-\beta_j}-\dfrac{\sin(\alpha_i+\beta_j)}{\alpha_i+\beta_j}$， $G_{ij}'=\dfrac{2\alpha_j\mathrm{ch}\beta_i'\sin\alpha_j}{\alpha_j^2+\beta_i'^2}$， $H_j=\dfrac{1-\upsilon}{\upsilon}\dfrac{1}{2\mathrm{sh}\alpha_j\lambda}$

$G_{ij}=\dfrac{1+\upsilon}{\upsilon}\dfrac{\beta_i'G_{ij}'}{(\beta_i'^2+\alpha_j^2)\mathrm{ch}\beta_i'}$， $L_j=\dfrac{1}{\alpha_j\mathrm{sh}\alpha_j\lambda}[H_j(\mathrm{sh}\alpha_j\lambda+\alpha_j\lambda\mathrm{ch}\alpha_j\lambda)-1]$，

$a_j=\displaystyle\int_{-1}^{+1}\bar{q}_2(\bar{x})\cos\alpha_j\bar{x}d\bar{x}$

2. 确定常数 A_i、B_i 和 C_i 的线性代数方程组

$$
\left.\begin{aligned}
&A_iX_{1i} - \sum_{j=1}^{\infty}B_jY_{1ij} - \sum_{j=1}^{\infty}C_j\beta_jN_{ij}\cos\beta_j = 0\\
&B_i\frac{1}{\upsilon} - \sum_{j=1}^{\infty}B_jY_{2ij} - \sum_{j=1}^{\infty}C_j\beta_jQ_{ij}\mathrm{sh}\beta_j\lambda = -a_i\\
&\sum_{j=1}^{\infty}A_jX_{3ij} + \sum_{j=1}^{\infty}B_jY_{3ij} + C_i\beta_i\mathrm{ch}\beta_i\lambda = -Z_i
\end{aligned}\right\}\quad i=1,2,3,\cdots
\tag{1.45}
$$

式中 $X_{1i}=\dfrac{1-\upsilon}{\upsilon}-\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\beta_kE_{ik}\cos\beta_k$， $Y_{1ij}=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\beta_kF_{jk}P_{ij}\cos\beta_k$， $Y_{2ij}=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\beta_kF_{jk}Q_{ik}\mathrm{sh}\alpha_j\lambda$

$X_{3ij}=\left[\beta_j'E_{ji}-\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_kG_{jk}M_{ik}\right]\cos\beta_j'\lambda$

$Y_{3ij}=\alpha_jF_{ji}\mathrm{ch}\alpha_j\lambda-\alpha_jM_{ij}(L_j\mathrm{ch}\alpha_j\lambda-H_j\lambda\mathrm{sh}\alpha_j\lambda)$

$Z_i=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}M_{ik}\left[\frac{a_k}{\mathrm{th}\alpha_k\lambda}+\frac{4\bar{\gamma}\sin\alpha_k}{\alpha_k^2}\right]$， $N_{ij}=-\dfrac{2\beta_i'\mathrm{sh}\beta_j\lambda\cos\beta_i'\lambda}{\lambda(\beta_i'^2+\beta_j^2)}$

$M_{ik}=\dfrac{\sin(\alpha_k-\beta_i)}{\alpha_k-\beta_i}-\dfrac{\sin(\alpha_k+\beta_i)}{\alpha_k+\beta_i}$， $P_{ij}=-\dfrac{2\beta_i'\mathrm{sh}\alpha_j\lambda\cos\beta_i'\lambda}{\lambda(\beta_i'^2+\alpha_j^2)}$

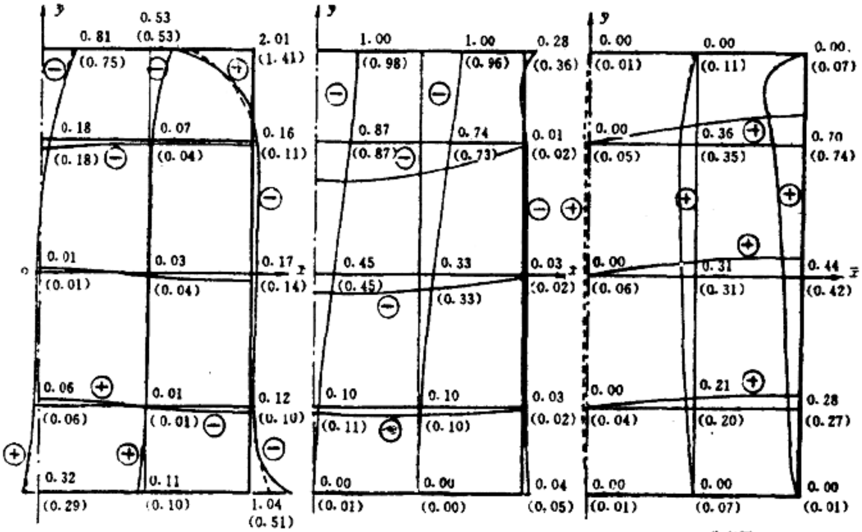
$Q_{ij}=\dfrac{\sin(\alpha_i-\beta_j)}{\alpha_i-\beta_j}+\dfrac{\sin(\alpha_i+\beta_j)}{\alpha_i+\beta_j}$， $\beta_i=i\pi$

3. 应力分量表达式

$$
\begin{aligned}
\bar{\sigma}_x &= \sum_{i=1}^{\infty}A_i\left[\frac{\mathrm{ch}\beta_i'\bar{x}\sin\beta_i'\bar{y}}{\mathrm{ch}\beta_i'}+\sum_{j=1}^{\infty}\beta_jE_{ij}\cos\beta_j\bar{x}\sin\beta_i'\bar{y}\right]+\sum_{i=1}^{\infty}B_i\left[\frac{\cos\alpha_i\bar{x}\,\mathrm{sh}\alpha_i\bar{y}}{\mathrm{sh}\alpha_i\lambda}\right.\\
&\quad\left.+\sum_{j=1}^{\infty}\beta_jF_{ij}\cos\beta_j\bar{x}\,\mathrm{sh}\alpha_i\bar{y}\right]+\sum_{i=1}^{\infty}C_i\beta_i\cos\beta_i\bar{x}\,\mathrm{sh}\beta_i\bar{y}\\
\bar{\sigma}_y &= \sum_{i=1}^{\infty}A_i\left[\frac{\mathrm{ch}\beta_i'\bar{x}\sin\beta_i'\bar{y}}{\mathrm{ch}\beta_i'}-\sum_{j=1}^{\infty}\beta_i'G_{ij}\cos\alpha_j\bar{x}\sin\beta_i'\bar{y}\right]+\sum_{i=1}^{\infty}B_i\left\{\frac{\cos\alpha_i\bar{x}\,\mathrm{sh}\alpha_i\bar{y}}{\mathrm{sh}\alpha_i\lambda}\right.\\
&\quad\left.+[\alpha_iL_i\mathrm{sh}\alpha_i\bar{y}-H_i(\mathrm{sh}\alpha_i\bar{y}+\alpha_i\bar{y}\mathrm{ch}\alpha_i\bar{y})]\cos\alpha_i\bar{x}\right\}-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j\cos\alpha_j\bar{x}\,\mathrm{sh}\alpha_j\bar{y}}{\mathrm{sh}\alpha_j\lambda}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{\tau}_{xy} = \frac{1}{2}\Big\{ & \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sum_{j=1}^{\infty}[\beta_i' E_{ij}\sin\beta_j\bar{x} - \alpha_j G_{ij}\sin\alpha_j\bar{x}]\cos\beta_i'\bar{y} \\
& - \sum_{i=1}^{\infty} B_i\Big[\alpha_i\sin\alpha_i\bar{x}(L_i\mathrm{ch}\alpha_i\bar{y} - H_i\bar{y}\mathrm{sh}\alpha_i\bar{y}) - \sum_{j=1}^{\infty}\alpha_i F_{ij}\sin\beta_j\bar{x}\mathrm{ch}\alpha_i\bar{y}\Big] \\
& + \sum_{i=1}^{\infty} C_i\beta_i\sin\beta_i\bar{x}\mathrm{ch}\beta_i\bar{y} + \sum_{j=1}^{\infty}\Big[\frac{\alpha_j\mathrm{ch}\alpha_j\bar{y}}{\mathrm{sh}\alpha_j\lambda} + \frac{4\bar{\gamma}\sin\alpha_j}{\alpha_j^2}\Big]\sin\alpha_j\bar{x}\Big\}
\end{aligned}
\qquad (1.46)
$$

利用上述解析解，我们对两端固定深梁的应力进行了具体的数值计算。计算分为两种情形：一为深梁只受均布荷载q_0而无自重，即$q(x)=q_0$，$\gamma=0$，并取$\bar{q}_0=\frac{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}{\upsilon E}q_0=1.0$，$\lambda=1.0$，$\upsilon=0.167$，计算结果绘在图1.3上，如实线所示者；另一为只有自重γ而无外荷载，即$q(x)=0$，并取$\bar{\gamma}=\frac{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)a}{\upsilon E}\gamma=1.0$，$\lambda=1.0$，$\upsilon=0.167$，计算结果绘在图1.4上，如实线所示。



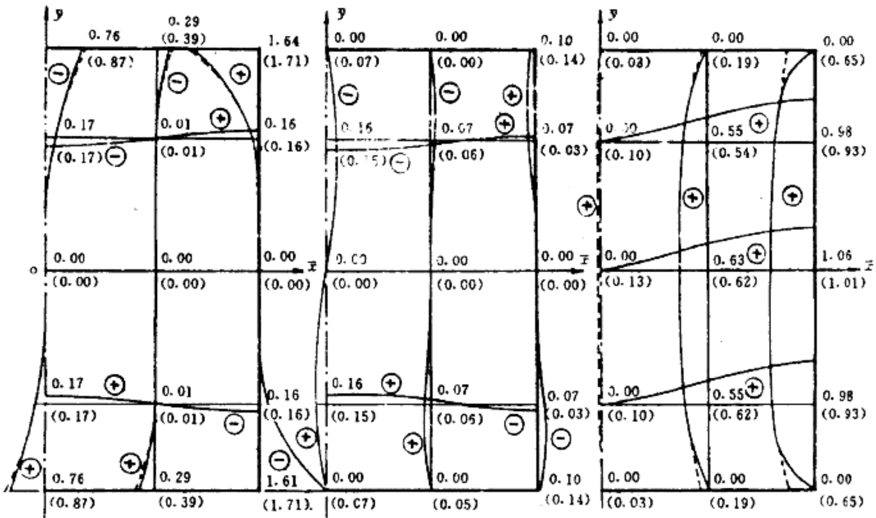
(a) σ_x分布图　　(b) σ_y分布图　　(c) τ_{xy}分布图

注：括号（ ）内的值为有限元结果

图 1.3　荷载应力分布图

为了验证解析解的正确性，对上述两种荷载情形下两端固定深梁的应力，我们又采用有限元法进行了计算。计算中利用问题的对称性，取深梁右半部分为计算对象，单元划分如图1.5所示，并利用SAP5程序进行计算。计算结果也分别绘在图1.3和1.4上，如虚线所示。由图可以看出，解析解与有限元结果吻合良好，证实了解析解的正确性。

为了检验解析解中级数的收敛情况，我们在计算深梁只受均布外荷载的应力时，分别取级数前10、15、20、25、30项计算了$\bar{x}=0.5$截面上的应力。计算结果列于表1.1，1.2和1.3中。



(a) σ_x 分布图 (b) σ_y 分布图 (c) τ_{xy} 分布图

注：括号（ ）内的值为有限元结果

图 1.4 自重应力分布图

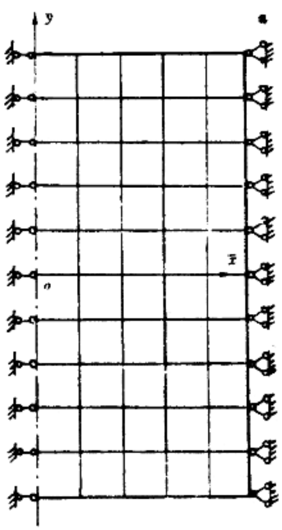


图 1.5

表1.1　$\bar{x}=0.5$ 截面上应力分量σ_x之值

$\bar{y}$	级数项数n				
	$n=10$	$n=15$	$n=20$	$n=25$	$n=30$
1.0	−0.55691	−0.43519	−0.52621	−0.60792	−0.59432
0.8	−0.18332	−0.17868	−0.17956	−0.17750	−0.17861
0.6	−0.07360	−0.07331	−0.07308	−0.07290	−0.07277
0.4	−0.05107	−0.05054	−0.05104	−0.05056	−0.05093
0.2	−0.04215	−0.04216	−0.04215	−0.04212	−0.04209
0.0	−0.03339	−0.03317	−0.03337	−0.03318	−0.03333
−0.2	−0.02450	−0.02449	−0.02448	−0.02447	−0.02446
−0.4	−0.01646	−0.01648	−0.01647	−0.01647	−0.01648
−0.6	−0.00775	−0.00790	−0.00798	−0.00803	−0.00806
−0.8	0.01718	0.01579	0.01596	0.01547	0.01571
−1.0	0.09963	0.07445	0.11059	0.12592	0.11492

表1.2　$\bar{x}=0.5$ 截面上应力分量σ_y之值

$\bar{y}$	级数项数n				
	$n=10$	$n=15$	$n=20$	$n=25$	$n=30$
1.0	−0.99013	−1.00673	−1.00203	−1.00130	−1.0006
0.8	−0.91882	−0.91960	−0.91754	−0.91897	−0.91711
0.6	−0.74356	−0.74197	−0.74115	−0.74073	−0.74048
0.4	−0.57584	−0.57514	−0.57412	−0.57430	−0.57360
0.2	−0.44180	−0.44111	−0.44072	−0.44050	−0.44038
0.0	−0.33408	−0.33387	−0.33349	−0.33357	−0.33329
−0.2	−0.24408	−0.24399	−0.24390	−0.24384	−0.24382
−0.4	−0.16562	−0.16578	−0.16584	−0.16586	−0.16588
−0.6	−0.09404	−0.09445	−0.09462	−0.09469	−0.09472
−0.8	−0.03106	−0.03090	−0.03142	−0.03109	−0.03149
−1.0	−0.00000	−0.00000	−0.00000	−0.00000	−0.00000

表1.3　$\bar{x}=0.5$ 截面上应力分量τ_{xy}之值

$\bar{y}$	级数项数n				
	$n=10$	$n=15$	$n=20$	$n=25$	$n=30$
1.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.8	0.22559	0.22724	0.22769	0.22813	0.22815
0.6	0.35409	0.35448	0.35472	0.35486	0.35494
0.4	0.37410	0.37390	0.37371	0.37379	0.37367
0.2	0.34723	0.34670	0.34648	0.34637	0.34633
0.0	0.30968	0.30921	0.30885	0.30884	0.30868
−0.2	0.27473	0.27420	0.27396	0.27383	0.27379
−0.4	0.24316	0.24286	0.24257	0.24259	0.24245
−0.6	0.20473	0.20461	0.20454	0.20450	0.20450
−0.8	0.13379	0.13418	0.13415	0.13429	0.13419
−1.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

从表1.1～1.3可以看出，取级数前10项至15项时，除个别值外，小数点后两位数基本相同；取级数前20项至30项时，小数点后三位数基本相同，即取级数的项数大于20时，小数

点后前三位数已不发生变化。对实际应用而言，取级数前20项进行计算，所得结果已足够精确，满足实际要求。图1.3及1.4中所给出的解析解之值就是取级数前20项时所得的结果。

§1—3 简支深梁的应力分析

如图1.6(a)所示简支深梁，梁长$2a$，梁高$2b$，两端分别支承于宽度为c的支座上；梁单位体积重为γ；梁的上边界受竖向分布荷载$q(x)$；梁的变形为平面应力问题。

取用如图所示直角坐标系xoy。不失一般性，设荷载$q(x)$关于y轴对称，即$q(x)=q(-x)$。同时设支承反力均匀分布于支座宽度c上，其集度为p。

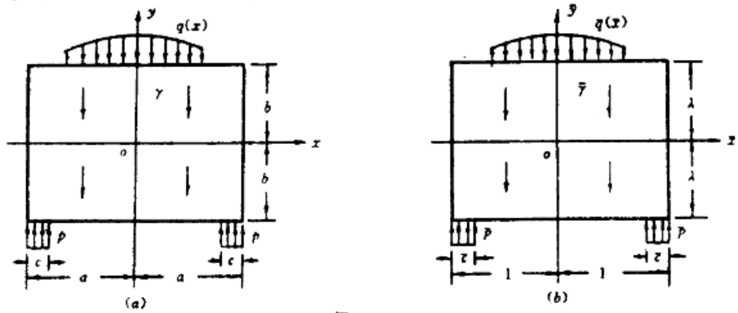


图1.6

取用梁的半长a为参考长度，在式(1.10)无因次量的情况下，并将荷载$q(x)$和支座反力集度p转化为无因次量$\bar{q}(\bar{x})=\dfrac{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}{\upsilon E}q(x)$，$\bar{p}=\dfrac{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}{\upsilon E}p$，则图1.6($a$)成为图1.6($b$)，图中$\lambda=b/a$，$\bar{c}=c/a$。

在此情形下，控制方程与式(1.16)相同。

为了简化计算，将图1.6(b)所示边界上所受荷载分解为图1.7(a)和(b)所示关于轴$\bar{x}$对称和反对称的两种情形。图中$\bar{q}_1(\bar{x})=\dfrac{1}{2}\{\bar{q}(\bar{x})+\bar{p}H[|\bar{x}|-(1-\bar{c})]\}$，$\bar{q}_2(\bar{x})=\dfrac{1}{2}\{\bar{q}(\bar{x})-\bar{p}H[|\bar{x}|-(1-\bar{c})]\}$，式中$H[t]$为Heaviside单位阶跃函数。

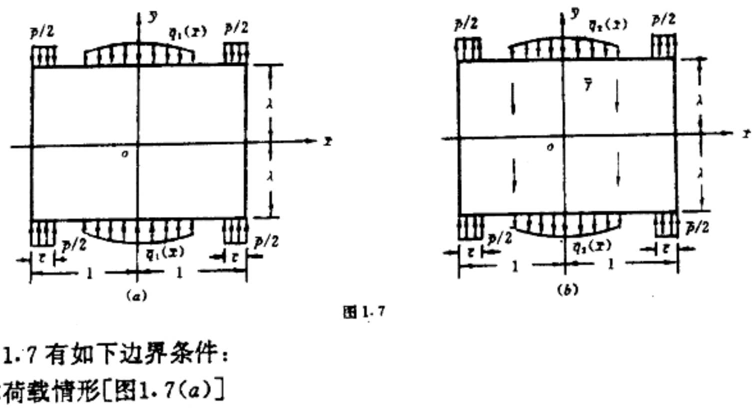


图1.7

由图1.7有如下边界条件：

对称荷载情形[图1.7(a)]

$$\left.\begin{aligned}&\bar{x}=\pm 1,\quad \bar{\sigma}_x=0,\quad \bar{\tau}_{xy}=0\\&\bar{y}=\pm\lambda,\quad \bar{\sigma}_y=-\bar{q}_1(\bar{x}),\quad \bar{\tau}_{yx}=0\end{aligned}\right\}\tag{1.47}$$

注意到式(1.13)，条件(1.47)可写成

$$\left.\begin{array}{lll}\bar{x}=\pm 1, & \dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}=-\bar{e}, & \dfrac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}=-\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} \\ \bar{y}=\pm\lambda, & \dfrac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}=-\bar{e}-\bar{q}_1(\bar{x}), & \dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}=-\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}\end{array}\right\} \tag{1.48}$$

反对称荷载情形[图1.7(*b*)]

$$\left.\begin{array}{lll}\bar{x}=\pm 1, & \dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}=-\bar{e}, & \dfrac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}=-\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}} \\ \bar{y}=\pm\lambda, & \dfrac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}=-\bar{e}\mp\bar{q}_2(\bar{x}), & \dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}=-\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}\end{array}\right\} \tag{1.49}$$

(一) 简支深梁应力分析的边值问题

综合控制方程(1.16)及边界条件(1.48)和(1.49)，简支深梁应力分析的问题归结为如下单个偏微分方程的边值问题：

对称荷载情形[图1.7(*a*)]

1.
$$\left.\begin{array}{l}\nabla^2\bar{e}=0 \\ \bar{x}=\pm 1, \quad \bar{e}=f_1(\bar{y}); \quad \bar{y}=\pm\lambda, \quad \bar{e}=f_2(\bar{x})\end{array}\right\} \tag{1.50}$$

其中$f_1(\bar{y})$及$f_2(\bar{x})$为待确定之函数。

2.
$$\left.\begin{array}{l}\nabla^2\bar{u}=-\dfrac{1+\upsilon}{\upsilon}\dfrac{\partial\bar{e}}{\partial\bar{x}} \\ \bar{x}=\pm 1, \quad \dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}=-\bar{e}; \quad \bar{y}=\pm\lambda, \quad \dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}=-\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}\end{array}\right\} \tag{1.51}$$

3.
$$\left.\begin{array}{l}\nabla^2\bar{v}=-\dfrac{1+\upsilon}{\upsilon}\dfrac{\partial\bar{e}}{\partial\bar{y}} \\ \bar{x}=\pm 1, \quad \dfrac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}=-\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}; \quad \bar{y}=\pm\lambda, \quad \dfrac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}=-\bar{e}-\bar{q}_1(\bar{x})\end{array}\right\} \tag{1.52}$$

反对称荷载情形[图1.7(*b*)]

1.
$$\left.\begin{array}{l}\nabla^2\bar{e}=0 \\ \bar{x}=\pm 1, \quad \bar{e}=g_1(\bar{y}); \quad \bar{y}=\pm\lambda, \quad \bar{e}=\pm g_2(\bar{x})\end{array}\right\} \tag{1.53}$$

其中$g_1(\bar{y})$及$g_2(\bar{x})$为待确定之函数。

2.
$$\left.\begin{array}{l}\nabla^2\bar{u}=-\dfrac{1+\upsilon}{\upsilon}\dfrac{\partial\bar{e}}{\partial\bar{x}} \\ \bar{x}=\pm 1, \quad \dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}=-\bar{e}; \quad \bar{y}=\pm\lambda, \quad \dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}=-\dfrac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}\end{array}\right\} \tag{1.54}$$

3.
$$\left.\begin{array}{l}\nabla^2\bar{v}=-\dfrac{1+\upsilon}{\upsilon}\dfrac{\partial\bar{e}}{\partial\bar{y}}+2\bar{\gamma} \\ \bar{x}=\pm 1, \quad \dfrac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}=-\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}; \quad \bar{y}=\pm\lambda, \quad \dfrac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}=-\bar{e}\mp\bar{q}_2(\bar{x})\end{array}\right\} \tag{1.55}$$

(二) 对称荷载情形下的解答

1. 求解$\bar{e}$

将式(1.50)中之待确定函数$f_1(\bar{y})$和$f_2(\bar{x})$表示为如下级数形式：

$$f_1(\bar{y})=\sum_{i=1}^{\infty}A_i\cos\alpha_i'\bar{y}, \quad f_2(\bar{x})=\sum_{i=1}^{\infty}B_i\cos\alpha_i\bar{x} \tag{1.56}$$

式中A_i和B_i为待定系数，$\alpha_i=(i-0.5)\pi$，$\alpha_i'=(i-0.5)\pi/\lambda$。则边值问题(1.50)之解为