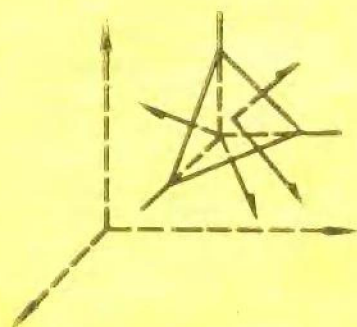


T
A
N
X
I
N
G
L
I
X
U
E
Y
I
N
L
U
N

弹性力学引论

武际可

王敏中



北京大学出版社

弹性力学引论

武际可 王敏中

北京大学出版社

内 容 简 介

全书共分十章,对线性弹性力学问题基本提法、弹性力学变分原理、圣维南问题、平面问题、空间问题以及板壳理论等内容,特别对有关的数学物理基础做了严格而简要的叙述。各章末附有习题。

书中各方程统一在正交曲线坐标中讨论,由于采用了外微分和并矢的工具使得叙述变得简洁明瞭。书末并附了各种常见曲线坐标系中的公式集以便查考。

本书可做为大学力学专业高年级学生和研究生教材,也可供应用数学专业以及土建、机械、航空、造船等专业的师生以及有关人员参考。

弹 性 力 学 引 论

北京大学出版社出版
(北京大学校内)

新华书店北京发行所发行

固安印刷厂印刷

850×1168毫米 32开本 9.75印张 235千字

1981年7月第一版 1981年7月第一次印刷

印数: 1—15000册

统一书号: 13209·17 定价: 1.5元

前 言

一九七九年秋，著者在北京大学力学系对研究生和进修生讲授了一次弹性力学课。在讲课中，我们试图对于现有弹性力学课的叙述方法与内容安排做了一些改进。这本书就是在当时的讲义的基础上修改补充写成的。

本书在选材上着重理论系统的完整性与问题提法的正确性，而把具体解题的技巧放在次要地位；着重于问题的数学物理基础，而把工程背景的叙述放在次要地位。在叙述方法上为了避免以往弹性力学中大量标量公式而采用了简洁的并矢与向量形式，并且引用了外微分形。这样做，是想为具有一定工程知识和对于弹性力学有初步了解的人，为进一步学习和研究严格的弹性力学理论提供一个入门导引。本书可以做为大学力学系高年级学生的教材，也可以做为研究生的基础课教材。

由于叙述的简洁性，可能给初学者阅读带来一些困难。但是，如果他们把省掉的步骤做为练习来补上，将会得到更大的收获。

在写作过程中，著者得到了许多同志的帮助：胡海昌教授仔细阅读了原稿，指正了原稿中的一些错误、并提出了大量改进意见；浙江大学谢贻权教授和丁浩江付教授对本书初稿给予了热情的鼓励；韩名宝同志为本书绘制了插图；研究生苏先樾同志仔细校对了公式推导；邱淑清同志为书稿的体例安排上提供了不少宝贵意见。著者一并表示深切的感谢。

最后，由于本书的写作无论从内容安排上还是一些理论的叙述与论证上都是一种新的尝试，加以著者水平所限，定会有不少

欠妥与错误的地方，敬请读者指正。

武际可 王敏中

1980年11月于北京大学

目 录

前言

绪论	1
§ 1 弹性力学	1
§ 2 弹性力学的基础	2
第一章 曲线坐标和微分形	4
§ 1 正交曲线坐标与活动标架	4
1.1 曲线坐标	4
1.2 正交曲线坐标	5
§ 2 曲线坐标中的度量与活动标架的微分	6
2.1 曲线坐标中的度量	6
2.2 活动标架的微分	8
2.3 向量的微分	12
§ 3 微分形和外微分	13
3.1 微分形	13
3.2 外微分	15
§ 4 Poincaré 逆定理	18
§ 5 Stokes 定理	24
§ 6 向量与张量的一些公式	27
6.1 并矢与张量	27
6.2 向量与张量的代数运算	29
6.3 向量与张量分析的若干公式	32
习 题	36
第二章 变形分析	38
§ 1 变形体内的位移场	38
1.1 位移场	38

1.2 位移场的微分	39
§ 2 无限小微元的应变	41
2.1 无限小微元的伸长应变	41
2.2 两个垂直方向的剪应变	43
2.3 应变张量	44
§ 3 主应变与不变量	45
3.1 主方向	45
3.2 主方向的性质与应变不变量	46
3.3 一点邻近的位移	48
§ 4 应变协调方程	50
4.1 应变协调方程	50
4.2 位移通过应变的积分表达式	52
4.3 协调方程的进一步讨论	53
习 题	55
第三章 应力张量与平衡条件	57
§ 1 应力张量	57
§ 2 平衡方程	60
2.1 从静力平衡条件来推导平衡方程	60
2.2 用虚位移原理来推导平衡方程	62
2.3 应力函数	64
2.4 对平衡方程的几点说明	66
§ 3 主应力与最大剪应力	67
3.1 主应力	67
3.2 最大剪应力	68
习 题	70
第四章 应力应变关系	71
§ 1 热力学定律与本构关系	71
1.1 本构关系	71
1.2 内力功的表达式	72
1.3 热力学定律与热力学平衡条件	72

§ 2 各向同性材料的 Hooke 定律	75
§ 3 应变能, 有温度变化时的 Hooke 定律	80
3.1 克拉伯龙(Clapeyron)定理	80
3.2 有温度变化时的弹性关系	81
§ 4 各向异性材料的 Hooke 定律	82
4.1 各向异性材料	82
4.2 几种特殊的各向异性材料	83
习 题	85
第五章 弹性力学的边值问题及其求解	87
§ 1 弹性力学的基本方程	87
1.1 各种方程的小结	87
1.2 以位移、应变或应力表示的方程组	88
§ 2 弹性力学问题的边条件, 圣维南(Saint-Venant)原理	90
2.1 弹性力学问题的边界条件	90
2.2 关于以应力表示的弹性力学方程的边值问题的说明	91
2.3 Saint-Venant 原理	92
§ 3 叠加原理与唯一性定理	93
3.1 线性弹性力学中的叠加原理	93
3.2 弹性力学问题解的唯一性定理	95
§ 4 若干例子	97
4.1 自重作用下的竖直杆	97
4.2 空心球壳	98
习 题	100
第六章 Saint-Venant 问题	102
§ 1 问题的提法	102
§ 2 问题的求解	105
2.1 利用半逆解法求解 Saint-Venant 问题	105
2.2 常数的确定	109
2.3 位移的确定	112
§ 3 Saint-Venant 问题的分解	120

3.1 问题的分解	120
3.2 简单拉伸	121
3.3 力偶下的弯曲	122
3.4 扭转	123
3.5 扭转问题的几个一般性质	126
3.6 悬臂梁的弯曲	128
§ 4 Saint-Venant 问题的若干典型例子	131
4.1 椭圆截面的扭转	131
4.2 矩形截面杆的扭转	135
4.3 圆柱的弯曲	139
4.4 圆筒的弯曲	142
习 题	144
第七章 弹性力学的平面问题	145
§ 1 平面问题的提法	145
1.1 平面应变问题	145
1.2 平面应力问题	148
1.3 Airy 应力函数	149
§ 2 平面问题的复数表示	151
2.1 双调和函数的复数表示	151
2.2 应力的复数表示	152
2.3 位移的复数表示	153
2.4 合力和合力矩的复数表示	155
2.5 φ, ψ 等函数的确定程度	156
2.6 多连通区域的情形	158
2.7 无穷区域的情形	160
2.8 边值问题	162
§ 3 狭长的矩形梁	163
§ 4 保角变换解法	169
4.1 圆域问题的解	169
4.2 保角变换的应用	173

4.3 椭圆孔	174
4.4 例子——带有椭圆孔的平板的拉伸	178
§5 半平面问题	182
习 题	184
第八章 弹性力学的三维问题	186
§1 弹性力学的通解	186
1.1 Папкович-Neuber 通解	186
1.2 Boussinesq-Галёркин通解	187
§2 弹性力学问题中的势论	189
2.1 具有体力的特解	189
2.2 弹性力学问题的基本解	190
2.3 弹性位势的性质	191
2.4 借助于积分方程求解弹性力学边值问题	198
§3 半空间问题与接触问题	200
3.1 半空间问题	200
3.2 两个接触球体之间的压力	204
习 题	207
第九章 弹性力学的变分原理	208
§1 总势能与最小势能原理	208
1.1 弹体的总势能	208
1.2 最小势能原理	209
§2 最小总余能原理	212
2.1 总余能	212
2.2 最小总余能原理	213
§3 基于变分原理的近似方法	215
3.1 广义位移与广义力	215
3.2 基于最小势能原理的近似方法	216
3.3 伽辽金(Галёркин)法	217
§4 变分原理的进一步讨论	219
4.1 拉格朗日(Lagrange)原理与卡斯提也努(Castigliano)原理	219

4.2	勒让德(Legendre)变换	223
4.3	广义变分原理	223
4.4	变分问题近似解法的进一步讨论	226
§ 5	有限单元法简介	227
5.1	从古典变分法到有限单元法	227
5.2	最简单的平面问题有限单元	228
§ 6	弹性体位移场的性质	230
6.1	预备说明	230
6.2	Korn 不等式	232
6.3	椭圆性条件与能量模同方均根模的等价性	234
6.4	泛函 $B(u, u)$ 的下凸性	236
§ 7	解的存在性及能量方法的收敛性	237
7.1	弹性力学问题解的存在性	237
7.2	Ritz 法的收敛性	240
7.3	有限单元法的收敛性	242
7.4	插值函数的精确度	243
	习 题	243
第十章	弹性薄板与薄壳	250
§ 1	薄壳与薄板, 中面的几何	250
1.1	薄壳与薄板	250
1.2	中面的几何参量	251
§ 2	薄壳的变形	254
2.1	薄壳变形的直法线假定	254
2.2	薄壳中面的位移	255
2.3	薄壳的应变分量	255
2.4	壳块上的位移场和位移场的微分	259
2.5	中面的位移场和它的微分	261
§ 3	薄壳的平衡方程	264
3.1	薄壳的内力与变形能	264
3.2	薄壳的平衡方程	267

§ 4 薄壳问题中的边条件与弹性关系	272
4.1 薄壳问题的边条件	272
4.2 薄壳的弹性关系	277
4.3 薄壳问题的求解	279
§ 5 扁壳与平板	280
5.1 薄壳应力状态的分类与扁壳方程	280
5.2 平板问题	283
§ 6 薄壳的无矩理论	284
6.1 无矩理论的基本方程	284
6.2 旋转壳的无矩问题	285
6.3 无矩理论的适用范围	288
习 题	288
附录 曲线坐标下的弹性力学方程式	290
参考书目	297
索引	299

绪 论

§ 1 弹性力学

弹性力学是研究弹性固体在外力作用下变形规律的学科。所谓弹性，是指物体的应力与应变之间有单值函数关系（在本书中仅限于讨论线性关系），而且在去掉外力后又恢复原来形状的性质。

在近代工业的工程实践中，人们对于各种结构与结构的零件在外力作用下的变形需要仔细地研究。而大多数工程材料在相当广泛的受载条件下可以近似地看为弹性固体。所以弹性力学与工程实践有着密切的关系。事实上，弹性力学的产生与发展的历史表明，正是由于工程技术发展的要求才促进了它的产生与发展。目前，从事近代土木工程、水利工程、航空工程、造船工程、机械工程等方面的工程人员，他们大多数或多或少地要和弹性力学的课题打交道。可见它同工程实践的联系是多么密切。

在弹性力学发展的历史上，它在促进数学和自然科学基本理论的建立和发展中也起过相当重要的作用。例如弹性波理论对于揭开地震以及大地构造之谜起了并仍起着关键性的作用。在十九世纪初，在光学理论发展的过程中，一种虚构的弹性波即以太为媒质的弹性波理论（尽管后来为新的科学事实所否定）曾经起过积极的作用。在数学上，弹性力学对于泛函分析、函数论以及广义函数论等的发展都有过积极的作用。许多弹性力学提出的数学问题至今仍是数学家热衷研究的课题。

所以弹性力学不仅是一门应用科学，而且也是一门基础理论学科。它不仅是工程技术人员的研究内容，也是许多有影响的理论物理教科书的重要篇章。

在历史的发展过程中，弹性力学的研究内容不断得到扩大。在今天看来，它包含的范围是十分广泛的。最初的一些重要课题逐渐发展形成成为独立的分支学科，例如板壳理论、弹性波理论、弹性稳定性理论、非线性弹性理论等。从教学的角度来看，要想在一个课程和一本教科书中包括上述各方面的内容是不可能的。目前大多数的弹性力学教科书只是包含弹性力学中最一般的原理和某些比较典型的弹性力学课题，从而为更深入地研究弹性力学或连续介质力学的其他部门提供一个基础。

§ 2 弹性力学的基础

弹性力学是一门力学，所以由牛顿最早总结出，其后又由拉格朗日 (Lagrange, J. L.) 和哈密尔顿 (Hamilton, W. R.) 等发展的力学的一般原理在这里仍是有效的，并且是构成它的理论体系的基石。但除此而外，它还包含有新的内容，这主要是下面两条：

1. 连续性假设 我们知道任何物体都是由原子分子组成的。对于固体物体来讲，还由于整个物体由许多结晶颗粒组成，从而更增加了物体的不连续性。所谓连续性假设，是指物体内部的任何一点的力学性质都是连续的。例如象密度、应力、位移、应变等力学量除在某些点、线或面上而外都是空间的连续变量，而且变形后物体上的质点与变形前物体上的质点是一一对应的。认真地推敲起来，这个假设与实际情况是不相符合的。例如一个原子内部的质量分布就是间断的。但是正如理论力学中质点概念是物体在一定条件下的近似一样，连续性假设也是在一定条件下对客观事物的一个近似。如果我们研究的是宏观过程，则所研究的每

一个微小单位实际上不仅包含有相当多的原子、分子，而且还包含有相当多的晶体，这时物体便可以认为是“连续的”了。

有了连续性假设，我们就有可能利用基于连续函数的一系列的数学工具。微分和积分、微分方程就成为研究弹性力学的有力工具了。

然而，只有连续性假设，还不能组成弹性力学的足够的最基本的要求。事实上，流体力学、塑性力学等也是基于连续性假设的。所有这些以连续性假设为基础的学科统称为连续介质力学。弹性力学正是连续介质力学的一个分支。

2. 线性弹性规律 所谓线性弹性规律或称虎克 (Hooke, R.) 定律，是一个弹性力学的基本定律。即物体在变形过程中，应力与应变之间服从线性规律，亦即其中一个是另一个的线性函数。它一方面是一个实验定律，另一方面又带有一定的假定性质。这由于，一方面对于大多数真实固体来讲（例如金属木材等）在一定条件下用这个规律对实际情况符合相当好；另一方面，任何材料又不是绝对符合线性弹性规律的，当外载去掉后，总有不能恢复原状的现象，所以它也只是对实际固体物体变形规律的一个近似模型。线性弹性规律的应用，就成为弹性力学区别于别的连续介质力学分支的本质特点。

总之，牛顿力学的基本原理、连续性假设和线性弹性定律构成了弹性力学理论系统的基石。它的全部理论体系都是建立在它们之上的。

除去上面所说的这些，有的书上还提到如下的一些假设：小应变假设（即略去位移在应变中的二次项）、无初应力假设（即去掉外力后物体没有初应力）、各向同性假设（即物体在每一点各个方向上弹性性质是相同的）和均匀性假设（即物体各点的弹性性质是相同的）。这些假设都不是弹性力学理论体系带本质的假设，不过，我们这本书的大多数处理的问题是符合这些条件的。

第一章 曲线坐标和微分形

§ 1 正交曲线坐标与活动标架

1.1 曲线坐标

如果在空间给了一个直角坐标系：它的原点取在 O 点， i_1, i_2, i_3 是三个互相垂直且成右手系的单位向量，分别为 x, y, z 轴上的坐标向量。则空间任一点 P 可以由向径

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)$$

表出，或写为

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i}_1 + y\mathbf{i}_2 + z\mathbf{i}_3$$

有时，我们把向径 $\mathbf{r}$ 代表的点称为点 $\mathbf{r}$ ，取 $\mathbf{r}$ 为三个参量 x_1, x_2, x_3 的向量函数

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{r}(x_1, x_2, x_3) \\ &= x(x_1, x_2, x_3)\mathbf{i}_1 + y(x_1, x_2, x_3)\mathbf{i}_2 + z(x_1, x_2, x_3)\mathbf{i}_3\end{aligned}\quad (1.1)$$

如果把 x, y, z 看为三维空间某一区域 $\mathcal{D}$ 内点的坐标，把 x_1, x_2, x_3 看为另一个三维空间某一区域 $\mathcal{D}'$ 上的点的直角坐标。显然，若在 $\mathcal{D}'$ 内给了一点的坐标 x_1, x_2, x_3 ，则由 (1.1) 就唯一地确定了在三维空间中的区域 $\mathcal{D}$ 内的一点。通常我们限制三个函数 x, y, z 的 Jacobi 行列式不为零，即

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(x_1, x_2, x_3)} \neq 0 \quad (1.2)$$

一般地，(1.1) 在 (1.2) 的条件下，把 $\mathcal{D}'$ 中的点与 $\mathcal{D}$ 中

的点 r 上建立了一一对应的关系。而且，若固定 x_1, x_2, x_3 中任意两个量而让另一个变化，可以通过 (1.1) 得到一条曲线。所以把 x_1, x_2, x_3 称为空间点的曲线坐标。

给定了曲线坐标，过一点沿每一族坐标曲线可以得到一个切向量

$$\mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} = \frac{\partial x}{\partial x_i} \mathbf{i}_1 + \frac{\partial y}{\partial x_i} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial z}{\partial x_i} \mathbf{i}_3 \quad (i=1, 2, 3) \quad (1.3)$$

对于空间的每一点，我们都可以有三个向量 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ 。由于 (1.2)，这三个向量是线性无关的。于是三个向量便又可以做为一个标架。对于空间内的每一点我们有一个这样的标架，这些标架的全体构成了 $\mathcal{D}$ 上的一个标架场称为活动标架场。

1.2 正交曲线坐标

在实际问题的求解中，最重要的一类曲线坐标是正交曲线坐标，即 (1.1) 所确定的坐标曲线在每一点的切向量是正交的，即满足

$$\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j = 0 \quad (i \neq j; i, j=1, 2, 3) \quad (1.4)$$

正交曲线坐标的例子是很多的，例如：

直角坐标 $x=x_1, y=x_2, z=x_3$ 。

柱坐标 $x=x_1 \cos x_2, y=x_1 \sin x_2, z=x_3$
 $(x_1 \geq 0, 0 \leq x_2 < 2\pi, -\infty < x_3 < \infty)$ 。

球坐标 $x=x_1 \sin x_2 \cos x_3, y=x_1 \sin x_2 \sin x_3,$
 $z=x_1 \cos x_2 \quad (x_1 \geq 0, 0 \leq x_2 \leq \pi, 0 \leq x_3 < 2\pi)$ 。

在实际应用中，直接取 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ 为活动标架仍然有点不便，这是由于它们的长度不是 1。现在就研究它们的长度，并且将这些长度记为

$$H_i = |\mathbf{r}_i| \quad (i=1, 2, 3)$$

由于 $H_i^2 = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i = |\mathbf{r}_i|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2$