

# 几 何

第 二 册

人 民 教 育 出 版 社

# 几 何

## 第 二 册

\*

人民教育出版社编辑出版  
辽宁人民出版社重印  
辽宁省新华书店发行  
沈阳新华印刷厂印装

\*

1978年3月第1版 1978年8月沈阳第1次印刷

书号 13012·0170 定价 0.29 元

# 目 录

第十章 直线和平面 .....	1
I. 平面 .....	1
II. 直线和直线的位置关系 .....	7
III. 直线和平面的位置关系 .....	13
IV. 平面和平面的位置关系 .....	27
V. 轨迹 .....	47
第十一章 多面体和旋转体 .....	66

## 第十章 直线和平面

在兴修水利、建筑房屋、制造机器等方面，都经常接触到许多空间图形，在设计、建造、测量时，都要用到空间图形的知识。在学习科学技术时，也常要用到空间图形的性质。在几何第一册里，我们主要学习了平面图形的性质和画法。在这一册里，我们在第一册的基础上，以空间图形为主，进一步学习图形的性质和画法。

### I 平面

**10.1 平面的表示法** 平静的水面、窗玻璃面、桌面都给我们以平面的形象。几何中所说的平面，是指在空间无限伸展着的。

我们画空间图形时，通常画平行四边形来表示平面(如图 10.1)。在画一个水平放置的平面时，通常把平行四边形的一条边画成水平，一个锐角画成  $45^\circ$ 。被遮住的部分画成虚线

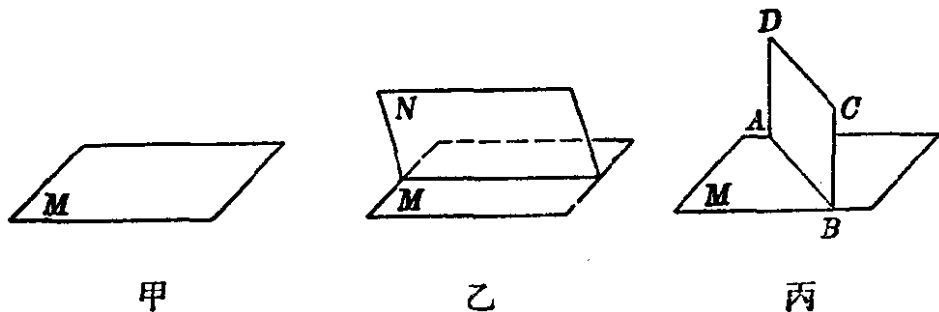


图 10.1

(如图 10.1 乙)或不画(如图 10.1 丙).

一个平面常用一个大写字母来表示,如平面 $M$ (图 10.1 甲、乙、丙),有时也用平行四边形的两个相对顶点的字母来表示,如平面 $AC$ (图 10.1 丙).

**10.2 平面的基本性质** 人们从长久以来的实践里总结出平面有下列一些基本性质.

**公理 1** 如果一条直线上的两点在一个平面内,那么这条直线上所有的点都在这个平面内.

工人用砖模(图 10.2)制砖时,用直尺刮去多余的泥土,使砖面平整,就是应用了上面的性质.

**公理 2** 两个平面相交,交线是一条直线.

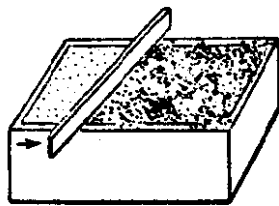


图 10.2

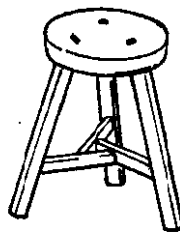


图 10.3

**公理 3** 不在一条直线上的三点确定一个平面(就是说,经过不在一条直线上的任意三点可以作\*一个平面,并且只可以作一个平面).

三脚凳用三个脚可以支住凳面(图 10.3),就是因为平面有上述这个性质.

**推论 1** 一条直线和这条直线外的一点确定一个平面.

---

\* 这里所说的“可以作一个平面”,是指“存在着一个平面”,以后所说的可以作一个空间图形,都是指存在着这个图形.

如图 10.4,  $A$  是直线  $l$  外的一点, 在  $l$  上取两点  $B, C$ , 经过这三点可以作一个平面  $M$ . 又因  $l$  上有两点  $B, C$  在平面  $M$  内, 所以  $l$  在平面  $M$  内. 因此, 经过  $l$  和  $A$  可以作一个平面.

因为经过  $A, B, C$  三点只可以作一个平面, 所以经过  $l$  和  $A$  也只可以作一个平面.

因此, 一条直线和这条直线外的一点确定一个平面.

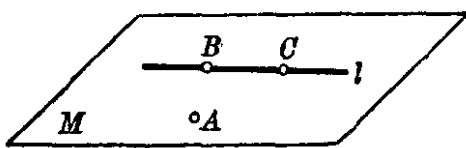


图 10.4

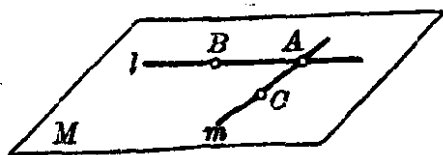


图 10.5

### 推论 2 两条相交直线确定一个平面.

如图 10.5, 直线  $l, m$  相交于  $A$  点, 除  $A$  点外, 再在  $l$  上取一点  $B$ , 在  $m$  上取一点  $C$ . 经过  $A, B, C$  可以作一个平面  $M$ .  $l, m$  都在平面  $M$  内, 因此经过  $l, m$  可以作一个平面  $M$ .

因为经过  $A, B, C$  三点只可以作一个平面, 所以经过  $l, m$  也只可以作一个平面.

因此, 两条相交直线确定一个平面.

### 推论 3 两条平行直线确定一个平面.

两条平行直线在同一个平面内, 所以经过这两条平行直线可以作一个平面.

因为经过两条平行直线中的一条和另一条上的一个点只可以作一个平面, 所以经过这两条平行直线的平面也只有一个.

因此, 两条平行直线确定一个平面.

木工钉板时, 常常钉两条相交或者平行的木条或铁条, 来

固定这个板面，就是应用两条相交直线或平行直线确定一个平面(图 10.6).

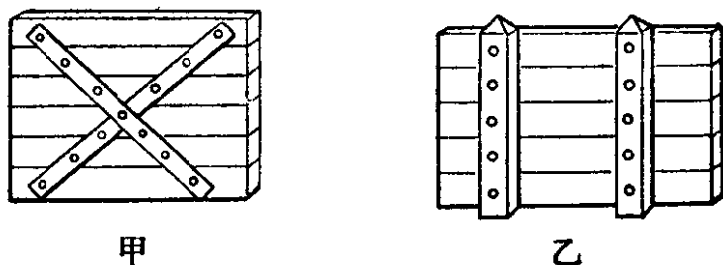


图 10.6

**10.3 水平放置的平面图形的画法** 我们观察正方形的和圆形的桌面，有时觉得正方形象平行四边形，圆象椭圆。这就是说，水平放置的平面图形在我们的视觉里有了一些变化。因此，在纸上画出水平放置的平面图形，和实际图形有所不同。在纸上画水平放置的平面图形，有各种方法，下面举例说明其中比较常用的一种。

1) 正方形 如图 10.7 甲，正方形  $ABCD$  的  $AB$  边是横边。在水平放置的平面  $M$  内画  $A_1B_1$  和  $AB$  方向相同，长度相等，以  $A_1$  为顶点，画  $\angle D_1A_1B_1 = 45^\circ$ ，在  $A_1D_1$  上取  $D_1$  点，使  $A_1D_1 = \frac{1}{2}AD$ 。以  $A_1B_1$ 、 $A_1D_1$  为边画平行四边形  $A_1B_1C_1D_1$ 。 $\square A_1B_1C_1D_1$  表示水平放置的正方形  $ABCD$ 。

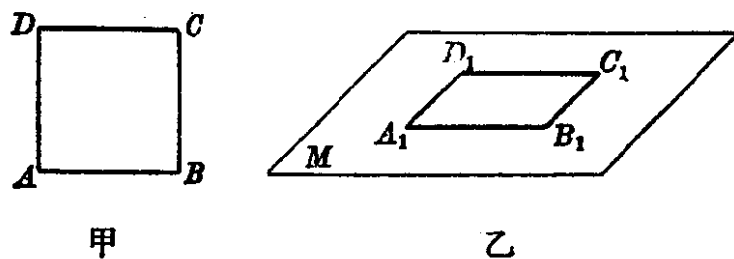


图 10.7

2) 三角形 如图 10.8 甲， $\triangle ABC$  的  $AB$  边是横边。画

$CD$  垂直于  $AB$ . 在水平放置的平面  $M$  内画  $A_1B_1$  和  $AB$  方向相同, 长度相等. 在  $A_1B_1$  上取  $D_1$  使  $A_1D_1 = AD$ . 以  $D_1$  为顶点, 画  $\angle C_1D_1B_1 = 45^\circ$ , 在  $D_1C_1$  上取  $C_1$  点, 使  $D_1C_1 = \frac{1}{2}DC$ . 连结  $A_1C_1$ 、 $B_1C_1$  成  $\triangle A_1B_1C_1$ .  $\triangle A_1B_1C_1$  表示水平放置的  $\triangle ABC$ .

根据上面所说, 可以看到, 这种画图的方法是: 把横线段画成长度相等的横线段, 把纵线段画成和横线段成  $45^\circ$  角而长度折半的线段.

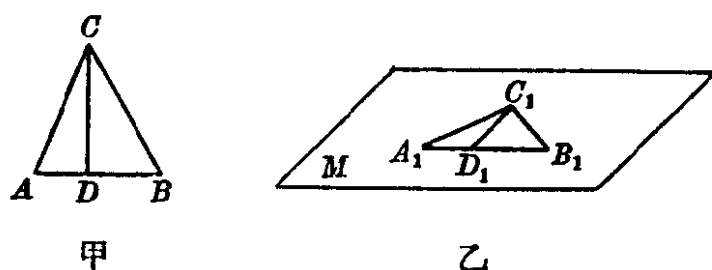


图 10.8

用上述的画法, 可以在纸上画出水平放置的任意平面图形. 图 10.9 乙是图 10.9 甲的任意四边形的水平放置图形.

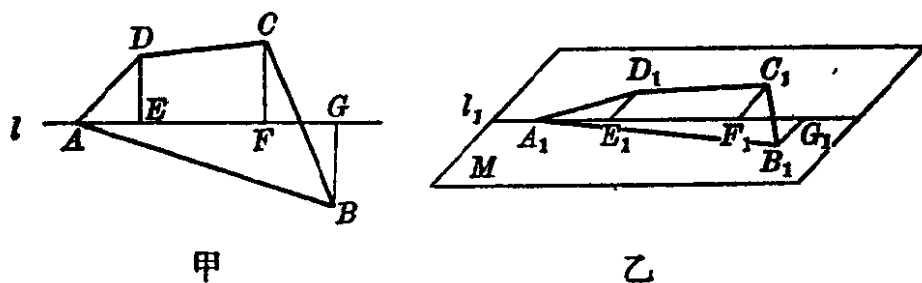


图 10.9

图 10.10 乙是图 10.10 甲的圆的水平放置图形 (画图时先画一条横的直径  $AB$ , 并且分成  $n$  等分, 经过各分点画和  $AB$  垂直的弦, 然后按照上述方法来画).

用上述方法画图, 画图时所画的辅助线 (图中用细线表示), 在图画好之后可以擦去.



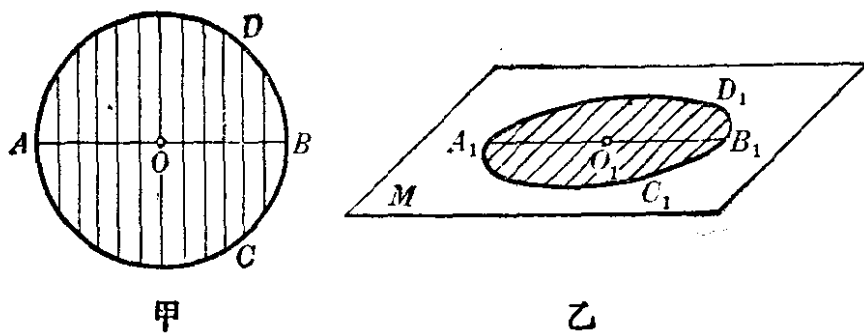
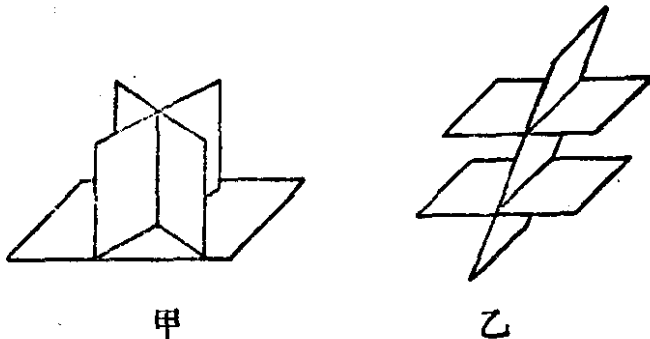


图 10.10

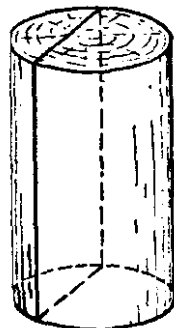
### 习题三十五

1. 画两个水平放置的平面 $M$ 和 $N$ ，在平面 $M$ 内画两条相交于 $A$ 点的直线 $a$ 和 $b$ ，在平面 $N$ 内画两条平行直线 $c$ 和 $d$ 。
2. 画两个相交的平面，并且在图中注上表示平面的字母。
3. (1)仿照附图画出图形，在图中注上字母，并且写出每个图各有哪几个平面。(2)用虚线画出图中被遮住的部分。



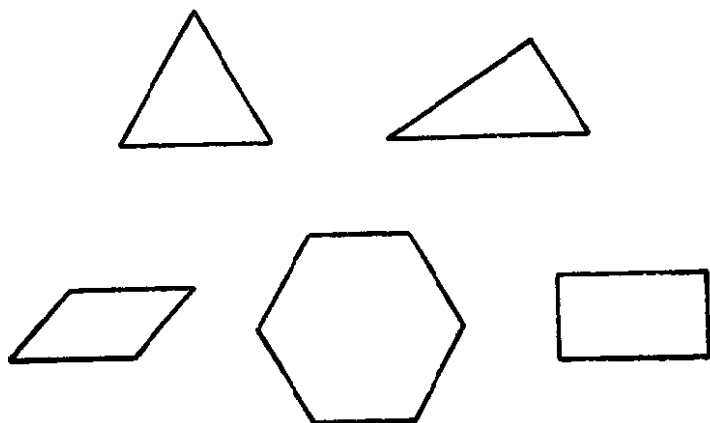
(第3题)

4. (口答)一个点能不能确定一个平面? 两个点呢? 任意三个点呢? 怎样的三点才能确定一个平面?
5. (口答)木工锯板时, 为什么要在树干的两侧画两条平行线, 沿线锯板, 才能使板面平整?



(第5题)

6. (口答)一个点和一条直线在怎样的位置时能确定一个平面? 在怎样的位置时不能确定一个平面?
7. (口答)经过一点的两条直线是不是一定在同一个平面内? 经过一点的任意三条直线呢?
8. (口答)怎样用两条细绳来检查桌子的四个脚的下端是不是在同一个平面内?
9. 画出所附各图的水平放置时的图形(只画图形,不必写画法):



(第9题)

## II 直线和直线的位置关系

**10.4 两条直线的相关位置** 我们观察房子中的各种线条, 它们具有不同的位置关系. 例如房子中下垂的两条电线是互相平行的; 黑板的相邻两边的边缘线是相交的; 下垂的一条电线和黑板的一条横边缘线, 既不相交, 也不平行, 它们不在同一个平面内.

不在同一个平面内的两条直线叫做**异面直线**.

空间的两条不重合的直线的位置关系有:

1. 异面直线 没有公共点, 不在同一个平面内,
  2. 平行直线 没有公共点,
  3. 相交直线 只有一个公共点,
- } 在同一个平面内.

画两条异面直线时, 要能显示出它们不在同一个平面内的特点. 例如画异面直线  $a$  和  $b$  时, 图 10.11 甲、乙的画法比较明显; 丙的画法就不明显.

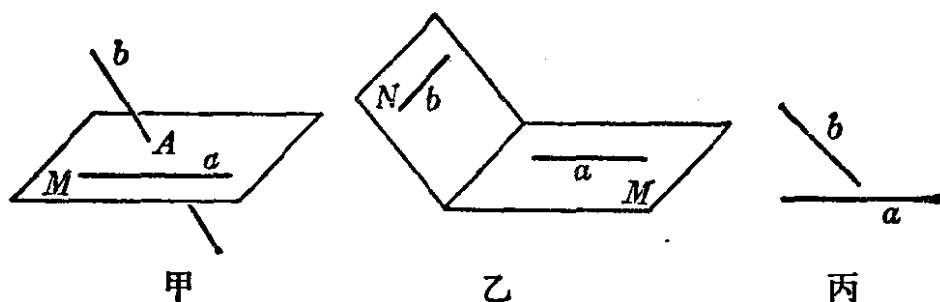


图 10.11

这里要注意, 如图 10.12 的两条平行直线  $a$  和  $b$ , 虽然  $a$  画在平面  $M$  内,  $b$  画在平面  $N$  内, 但是由于经过  $a$  和  $b$  可以作一个平面, 它们不是异面直线.

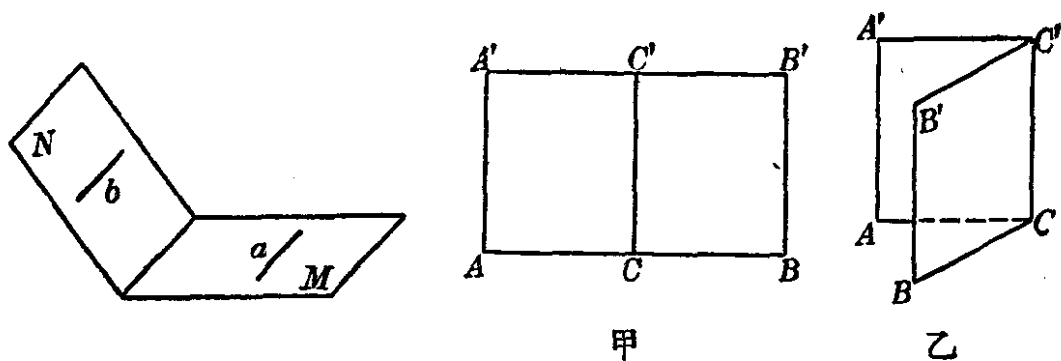


图 10.12

图 10.13

**10.5 平行于同一条直线的两条直线** 我们知道, 在同一个平面内, 平行于同一条直线的两条直线互相平行. 我们来研究一下空间的情况.  $ABB'A'$  (图 10.13甲) 是一张矩形的纸

片, 线段  $C'C$  和边  $A'A$ 、 $B'B$  平行. 以  $C'C$  为折痕将纸片  $ABB'A'$  折成图 10.13 乙的情况, 这样  $A'A$ 、 $B'B$ 、 $C'C$  是空间的三条线段, 而且  $A'A \parallel C'C$ ,  $B'B \parallel C'C$ . 如果把  $A'A$ 、 $B'B$  放在桌面上, 可以看到  $A'A$ 、 $B'B$  在同一个平面内, 并且互相平行.

**定理 1** 不在同一个平面内的三条直线, 如果其中两条直线都平行于第三条, 那么这两条直线也互相平行(证明略).

这条定理在生产中也常用到. 例如在安装变速的皮带轮时, 轮轴必须互相平行, 这样轮的运转才比较平稳. 如图 10.14, 当轴 3 和轴 2 平行时, 只要轴 1 和轴 3 平行, 就能使轴 1 和轴 2 平行.

应当注意, 在同一个平面内的图形有某些性质, 在空间不一定也有同样的性质. 我们知道, 在同一个平面内, 如果两条直线都和第三条直线垂直, 那么这两条直线互相平行; 但是在空间, 垂直于同一条直线的两条直线就不一定平行, 例如, 两相邻的墙的交线和这两面墙的两条墙脚线都垂直, 但是这两条墙脚线是相交的.

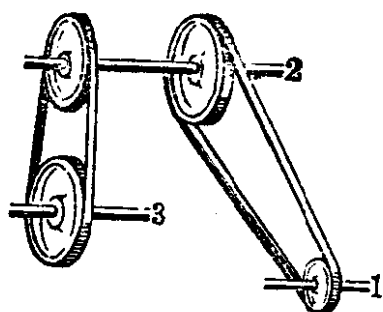


图 10.14

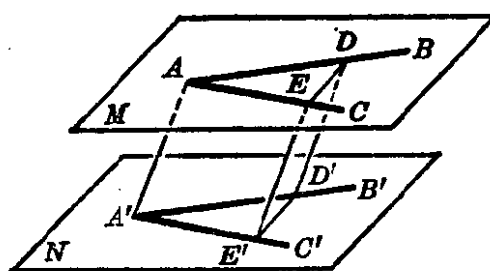


图 10.15

**定理 2** 如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同, 那么这两个角相等.

已知: 如图 10.15,  $\angle BAC$  和  $\angle B'A'C'$  的  $AB \parallel A'B'$ ,

$AC \parallel A'C'$ , 并且方向相同.

求证:  $\angle BAC = \angle B'A'C'$ .

证明: 在  $AB, A'B', AC, A'C'$  上分别取  $AD = A'D', AE = A'E'$ , 连结  $AA', DD', EE'$ .

$\because AB \parallel A'B', AD = A'D'$ ,

$\therefore AA'D'D$  是平行四边形.

$\therefore AA' \perp\!\!\!\perp DD'$ .

同理  $AA' \perp\!\!\!\perp EE'$ .

$\therefore DD' \perp\!\!\!\perp EE'$ .

$EE'D'D$  是平行四边形,

$\therefore ED = E'D'$ .

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle A'D'E'$ .

$\therefore \angle BAC = \angle B'A'C'$ .

**10.6 两条异面直线所成的角** 我们知道, 研究两条相交直线的位置关系, 需要研究它们之间所成的角. 同样, 研究两条异面直线的位置关系, 也要研究它们之间的角度关系

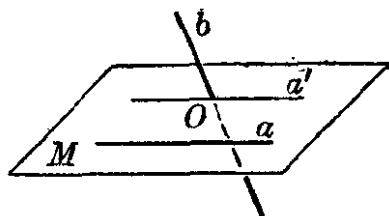
如图 10.16,  $a, b$  是两条异面直线, 经过空间任意一点  $O$ , 作直线  $a', b'$  分别平行于  $a, b, a'$  和  $b'$  相交所成的角叫做异面



图 10.16

直线  $a$  和  $b$  所成的角 (如果在  $a$  和  $b$  上确定了方向, 那么在  $a'$  和  $b'$  上也取相同的方向). 在一般情况下,  $a$  和  $b$  所成的角

指的是  $a'$  和  $b'$  所成的锐角（或直角）。因为两边对应平行的两个锐角相等，所以两条异面直线  $a$  和  $b$  所成的角的大小是由  $a$  和  $b$  的位置来决定的，和  $O$  点的位置无关。



$O$  点也可以取在  $a$  上或  $b$  上。如图 10.17, 把  $O$  点取在  $b$  上, 经过  $O$  点作

图 10.17

$a' \parallel a$ , 那么,  $a'$  和  $b$  所成的角就是异面直线  $a$  和  $b$  所成的角。

如果两条异面直线所成的角是直角，我们说这两条异面直线互相垂直。图 10.18 是一个正方体， $A_1A$  和  $B_1C_1$  是两条互相垂直的异面直线。房子中间下垂的电线和墙脚线也是互相垂直的。

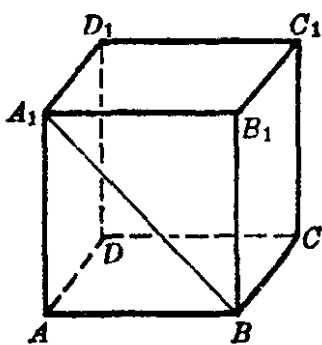


图 10.18

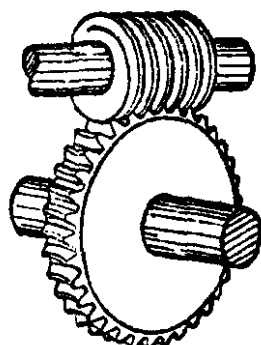


图 10.19

图 10.19 是蜗轮和蜗轮杆的装置，它们的轴线是互相垂直的两条异面直线，它说明了由蜗轮杆到蜗轮的传动方向转了  $90^\circ$  的角。

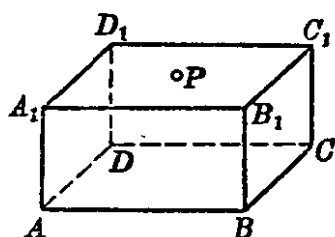
今后我们说两条直线互相垂直，这两条直线可以是相交直线，也可以是异面直线。

### 习题三十六

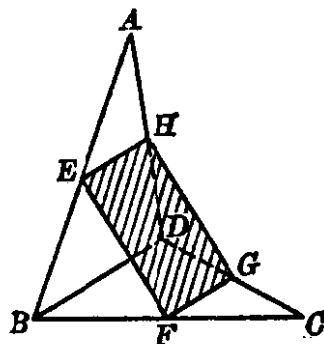
1. (口答) 分别在两个平面内的两条直线，一定是异面直线

吗？举出异面直线的几个实际例子。

2. 直线  $a$  和两条异面直线  $b$  和  $c$  相交，画出每两条相交直线所确定的平面，并且注上字母。
3. (口答) 在一个长方体木块(如图)的  $A_1B_1C_1D_1$  面上有一点  $P$ ，要经过  $P$  点画一条直线和  $DC$  平行，怎样画法？

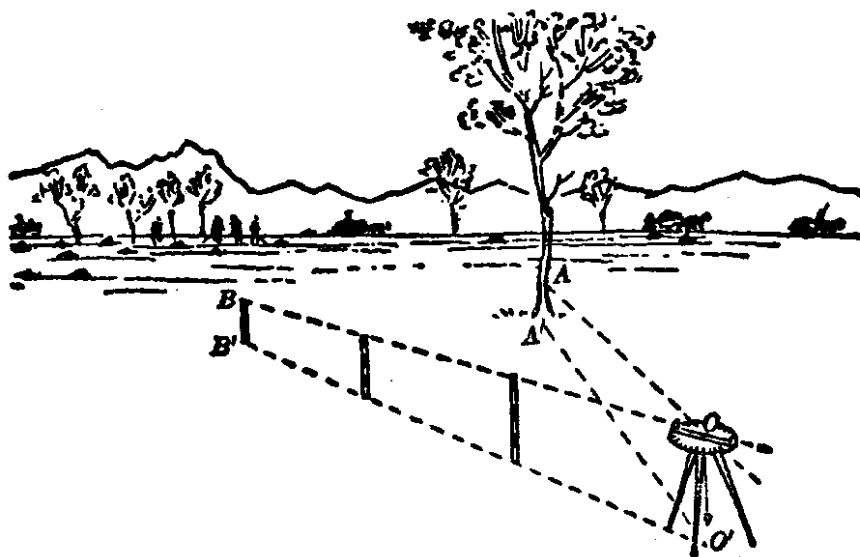


(第3题)



(第4题)

4. 如图，已知： $E, F, G, H$  分别是空间四边形  $ABCD$  的四条边  $AB, BC, CD, DA$  的中点。求证：
  - (1)  $E, F, G, H$  在同一平面内；
  - (2)  $EF \parallel HG$ 。
5. (口答) 如图，在测量水平角时，我们在度盘上用照准器所

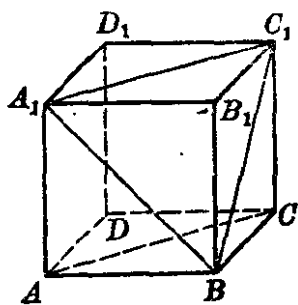


(第5题)

指出的两条射线  $OA$ 、 $OB$  分别和地面上的两条射线  $O'A'$ 、 $O'B'$ ，平行，为什么  $\angle AOB = \angle A'O'B'$ ？

6. 求证：如果一条直线和两条平行直线中的一条垂直（不一定相交），那么也和另一条垂直（不一定相交）。

7. (口答)在附图所示的正方体里，下列每一对直线各是什么位置关系的直线？如果它们不是平行直线，它们所成的角是多少度？(1)  $AB$  和  $CC_1$ ，(2)  $A_1A$  和  $BC_1$ ，(3)  $A_1B$  和  $BC_1$ ，(4)  $A_1C_1$  和  $AC$ ，(5)  $AC$  和  $A_1B$ 。



(第7题)

8. 一架敌机在河岸上空(即飞机在通过河岸的竖直平面内)平行于河岸飞行。河岸是东西方向的。河岸上有一门高射炮，炮身水平地指向西北。炮身和敌机的航线成多大的角？为了要打中敌机，炮弹的弹道和敌机的航线应当在同一个平面内，炮身要怎样转动？

### III 直线和平面的位置关系

**10.7 直线和平面的相关位置** 我们常常要考虑直线和平面的位置关系。例如，电线杆必须和地面垂直，电线杆才树立得牢固。工厂里吊车的轨道必须和地面平行，吊车才走得平稳和安全。

一条直线和一个平面的位置关系有：

1. 直线和平面平行 没有公共点，
2. 直线和平面相交 只有一个公共点，



3. 直线在平面内 有无数个公共点.

画直线和平面相交时, 要把直线伸出表示平面的平行四边形的外面, 如图 10.20 甲的画法比较好, 乙的画法就不明

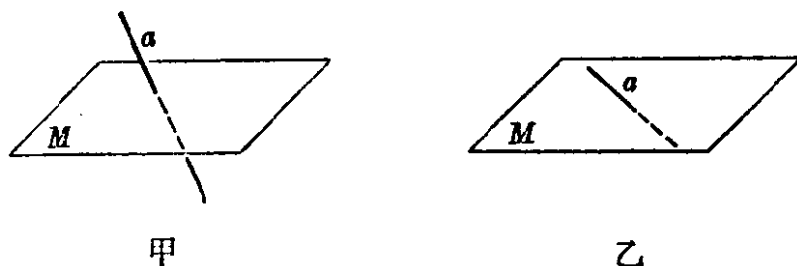


图 10.20

显. 画直线和平面平行时, 要把直线画在表示平面的平行四边形的外面, 如图 10.21 甲的画法比较好, 乙的画法就不明显.

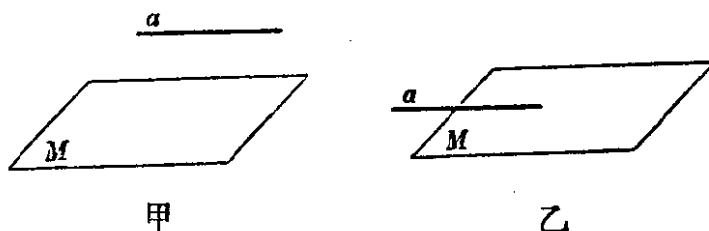


图 10.21

直线  $a$  和平面  $M$  平行, 写作  $a \parallel \text{平面} M$ , 或者  $\text{平面} M \parallel a$ .

**10.8 直线和平面平行的判定和性质** 我们来观察一架立着的梯子, 它的每一根横木如果和梯脚的连线平行, 那么这些横木就和地面平行. 一般地, 我们有下面的定理.

**直线和平面平行判定定理** 平面外的一条直线如果和这个平面内的一条直线平行, 那么这条直线就和这个平面平行.

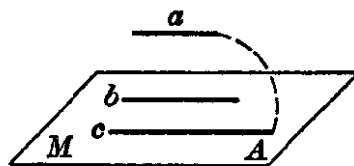


图 10.22

已知: 如图 10.22, 直线  $a \parallel$  直线  $b$ ,  $a$  在平面  $M$  外,  $b$  在