3

进　　展

数　　学

拓 扑 学

正如法国 Bourbaki 学派在二十世纪七十年代末所归结的那样[1]：在整个数学发展历史中，二十世纪将是一个"拓扑的世纪"（The Century of Topology）。

十九世纪末，H. Poincaré 对 B. Riemann 提出的直观几何概念，给出坚实的拓扑数学基础，促成二十世纪三十年代一般点集拓扑和组合拓扑的初步建立。拓扑学在三十年代以后从开始的缓慢进展逐渐变成现在的腾飞形势。

从拓扑学各个分支发展到今天的整个形势来说，一般拓扑学和拓扑向量空间这两个方面几乎处于稳定的状态。拓扑学发展的主流已经是从过去的"组合拓扑"转变为现今的"代数拓扑和微分拓扑"，它和"微分几何""李群"在互相渗透、互相影响中发展；它在促进着"常微分方程"，"偏微分方程"，"代数几何"，"同调代数"的发展。从 N. Bourbaki 讨论班[2] 1948 年以来所进行的五百个以上数学问题的密度来看，"代数拓扑和微分拓扑"列居首位。

如果说，拓扑学的进展主要是指"代数拓扑和微分拓扑"的进展，它主要可分成下列四个方面来介绍：

1. 同伦和同伦群

通常，拓扑学研究的一个主要目的，就是用同胚性来将各种不同的拓扑空间加以分类，这种分类将对所有数学各个分支都带来很大的方便，从本质上区别了各种不同的数学研究。

比较同胚较强一些的概念是"合痕"(Isotopy)，它是陈述一个拓扑空间 X 的子空间 Y_1 变形到另一子空间 Y_2 的问题，这种强化了的同胚概念很难研究，只有较少的实质性结果[3]。

用弱于合痕的"同伦"（Homotopy）概念，虽然它比较用同胚的分类要粗糙些，但是容易掌握。

从同伦等价映射的研究，可以给出两个拓扑空间 X 和 Y 属于同一"同伦型"的"不变性"。代数拓扑中几乎所有的"不变性"都是同伦型的不变性。

如果同伦$(x,t)\mapsto F(x,t)$是对 X 的一个给定子空间 A 与 t 无关，就得到一个相对于子空间的同伦概念。最常见的是 A 由一个单点 x_0 组成，这时称（X, x_0）是一个有点空间，并且，它的道路空间 C(I, X）也是一个有点空间。特别是由道路 $\gamma: I\to X$，$\gamma(0)=\gamma(1)=x_0$所组成的有点空间，称为（X, x_0）的圈空间，以ΩX 表之。

把圈的同伦类取商以后，就得到一个群构造，所以和ΩY 同伦等价类的集合$[X, \Omega Y]$是有群构造的，并且，当 $k\geqslant 2$ 时，$[X, \Omega^k Y]$ 群还是可交换的。当$n\geqslant 1$时，群 $[S_0\Omega^n X]$称为 X 的n次同伦群，表为$\pi_n(X)$。

特别是$\pi_1(X)$，它是 X 上圈同伦类的群，也称为 X 的基本群。

同伦群是很难计算的。有意义的情况是球的同伦群$\pi_m(S_n)$，它在 $m<n$时，$\pi_m(S_n)=0$，且$\pi_n(S_n)=Z$，但是，当 $m>n$时，$\pi_m(S_n)$群还没有完全清楚。

1980 年 W. Jaco 指出：关于闭的 3 流形，一个同胚映射是同伦于恒等映射而不合痕于恒等映射的存在性还是一个没有解决的问题。[4]

J. L. Friedman 和 D. M. Witt 最近研究了球空间的胚伦（Homeotopy）群[5]，找到关于一个闭 3-流形，当其质因子包含一定球空间时的这样一种同胚映射。

一个流形的胚伦群是它的同胚映射空间的同伦群[6]，一个合成 3-流形的胚伦群具有每个质因子的圆盘固定或点固定的胚伦群为其子群[7]。

2 同调和上同调

一个空间 X 和一个群G，若 $i\neq n$（n 是≥ 1 的整数)则$\pi_i(X)=0$，$\pi_n(X)=G$，这样的空间是对所有的（G, n）存在，这样的 X 空间称为一个 Eilenberg-MacLane 空间，表为$K(G,n)$[8]。

若 G, G_1 是两个群，则 $[K(G,n), K(G_1,n)]$ 是在 G 到G_1 同态集合中的一种典型一一对应。特别是对给定的 G 和 n，空间 K(G, n）有同一同伦型，而且在 $n\geq 2$ 时，$\Omega K(G,n)$是一个 $K(G,n-1)$。

对于一个空间 X，集合 $[X, K(G,n)]$ 是一个具有可交换群构造的，这个群称为X 在 G 中系数的 n 次上同调群，表为 $H^n(X,G)$。

特别在 $G=Z$ 时的 $H^n(X,Z)$，这种上同调群有一个更早的历史，它们起源于同调群$H_n(X,Z)$ 的概念[9]。

若 X 是一个多面体，A 是一个交换环，对每个整数 $n\geq 0$，研究系数在 A 中，X 的 n 单形所形成的形式线性组合的 A 模 C_n；对于一个任意的拓扑空间 X，定义 C_n 是连续映射$\Delta(n)\to X$，其中 $\Delta(n)$是标准 n 单形，就得到连续同调 A-模 $H_n(X,A)$

关于一个同伦于有限多面体的拓扑空间，空间的连续同调是同构于多面体的，这时，可以研究 C_n 的对偶C^*，在这个复形上的 n 次上同调就同构于用同伦定义的 A 模 $H^n(X,A)$。

后来，根据这些同构性，Eilenberg-Steenrod 给出上同调的公理体系[8]。

1980 年到 1984 年，M. Goresky 提出“相交同调群”的概念[10~12]，这种“相交同调群”出现在奇异空间的某些不是同伦不变的拓扑不变性之中。这种发现开僻了奇异空间研究的新途径。

相交同调不变性可以用来检验几何问题的障碍，诸如浸入和嵌入的问题。最近有的已经利用 Thom 运算研究了这类的浸入问题[13]。

3. 纤维化

设 $p: X \to B$ 是一连续映射，F 是一拓扑空间，若对每一点 $b \in B$，有 b 的一个开邻域 U 及一同胚映射

$$\varphi: U \times F \longrightarrow p^{-1}(U)$$

使所有的 $y \in U$ 和 $Z \in F$ 有

$$p(\varphi(y, z)) = y$$

则称 X 是一个具有 B 基，F 纤维，投影是 p 的一个局部平凡纤维丛。对于每个 $y \in U$，"纤维" $p^{-1}(y)$ 是同胚于 F的。

B 的一个复盖 X 是在 B 上具离散纤维的一种局部平凡丛。

一个向量丛是使上述定义中的 F 以及每一个纤维 $p^{-1}(y)$ 都是在 R 上的一个向量空间，且对每 $y \in U$，映射 $z \mapsto \varphi(y, z)$ 是 F 映上 $p^{-1}(y)$ 的一个线性映射。

古典的例子是一个微分流形 B 的切丛 T(B)，此时，纤维是在 B 的各点的切空间。一个"主丛"是一个纤维丛 X 具有投影 $p: X \to B$，并由一个在 X 上拓扑群 G 的作用所组成的附加构造，这种作用是连续的，G 的轨道就是纤维 $p^{-1}(y)$，而且 G 是在每一纤维上简单可迁的[1]。

纤维丛的一个重要性质是"同伦升腾性质"：若 P 是一个多面体，$g: P \to X$ 是 P 映入一个丛 X，底是 B，投影是 p 的连续映射，且若 $F: P \times I \to B$ 是从 $f = p \cdot g$ 到映射 $z \mapsto F(z, 1)$ 的一个同伦，则有一个同伦 $G: P \times I \to X$ 使 $p \cdot G = F$。更一般的，一个映射 $p: X \to B$ 称为一个 Serre 纤维化映射（或简称为一个"纤维化"），若 p 满足同伦升腾性质。

一个典型例子是对一个有点空间 (B, b_0) 的映射

$$p: E(B) \to B$$

E(B) 是具原点 b_0 的道路 $I \to B$ 的空间，而且，p 将每一道路映到它的终点，所以 $p^{-1}(b_0) = \Omega B$。

给出一个群的序列 $G_1, G_2, \cdots G_n, \cdots$，$h \geq 2$ 时是可交换的，定义一个空间序列 $X_1, X_2, \cdots X_n, \cdots$ 其中 $X_1 = K(G, 1)$，而且 $n \geq 2$ 时，X_n 是以 X_{n-1} 为底的丛，纤维是 $K(G_n, n)$。序列 (X_n) 的反极限 X 是对所有 n 有

$$\pi_n(X) = G_n$$

且每一空间 Y 有和这一样的一个反极限的同一同伦型，这种同伦型由 G_n 所刻划，同时，对每 $n \geq 2$，从 X_n 以 X_{n-1} 为基的同构类，这些同构类是和 $H^{n+1}(X_{n-1}, G_n)$ 中的上同调类一一对应。

1983 年，Lashof 等利用 Segal 提出的拓扑群上同调[15]概念，推广证明了一种自然变换是同构的[16]，从而得到 1976 年 Hattori 和 Yoshida 关于"纤维丛中升腾紧李群作用"主要结果[17]的简单证法。

1986 年，A. Kozlowski 使用一种 G－空间的"等变化上同调用 Segal 方法直接得到上述结论的证明[18]。

设 G 是一个拓扑群，A 是一个 Abel 拓扑群，且令

$$\alpha: G \to \mathrm{Aut}(A)$$

是从 G 映入 A 的自同构群的一个同态，使作用

$$G \times A \to A$$

是连续的，则在一 G－空间 X 上的一个 (G, α, A)－丛是指一个"主 A－丛" $p: E \to X$ 使

（1）E 是一个 G-空间且 p 是一个等变化映射。

（2）对所有 $g \in G$，$a \in A$，$e \in E$，有 $g(ea) = (ge)\alpha_g(a)$。对于一个预紧 Hausdorff G-空间 X，令 $\beta(G, \alpha, A)(X)$ 表示 X 上 (G, α, A) 丛的等价类集合。关于一个预紧 Hausdorff 空间 Y，用 $\beta(A)(Y)$ 表示 Y 上主 A-丛的等价类的集合。$\beta(G, \alpha, A)(X)$ 和 $\beta(A)(Y)$ 都有一个自然群构造。

在 A 是一 Abel 紧李群，G 是一紧李群，α 是平凡同态，X 是有一个 G-CW 复形的同伦型时，Lashof 等[16]指出自然变换 $\beta(G, 1, A)(X) \rightarrow \beta(A)(X_G)$ 是一个同构，此中 $X_G = EG \times_G X$，EG 表示一个可压缩的 G-自由空间。用此定理，他们得到上述主要结果的一个简单证明。

4. 一些应用

（1）流形的各种分类　开始给出拓扑概念的目的是来阐明"流形"。一个 n 维拓扑流形是一个可度量空间 X，它的每一点有一邻域 U 同胚于 R^n 的一个开子集：然后，从：的一个图册和其中同胚映射的可迁性，定义了"按段线性流形"，微分流形（表为 DIFF），解析流形等。

可以指出，每一个 DIFF 流形是可以三角化的，所以就带有唯一的"按段线性构造"；反之，是否每一"按段线性构造"流形容有一种 DIFF 流形构造？这种流形是否唯一？拓扑流形在"和谐性"意义下是否具有同一同伦型？所有这些问题几乎都完全解决了，它们的方法都是采用切丛或其他类似的构造方法。

Goldman 和 Hirsch 特别针对"仿射流形"进行研究，首先，探索了"幅射障碍的外幂"这种特征类的特性，得知仿射流形各个性质之间的关系[19]；其次，是肯定 1962 年的 Markus 猜想[20]，指出一个紧仿射流形是完备的是当且仅当它有平行体积[21]。

（2）Poincaré 猜想　代数拓扑最早指出了"每一紧的有向单连通曲面是同胚于球 S_2 的"，Poincaré 猜想对于三维流形，它也成立。

对于 n 维情况，Smale 对于 DIFF 流形，Stallings 对按段线性流形，M. H. A. Newman 对一般拓扑流形证明了 $n \geq 5$ 的定理。

Akbulut 和 Kirby 给出了四维 Poincaré 猜想的一个反例[22]。

（3）配边问题　微分拓扑的近代成果是从 1950 年 Thom 解答 Steenrod 所提出的两个问题开始的：在一个微分流形 M 中，什么情况下，它是用一个子流形表出的同调类；什么时候，一个 n 维流形是一个（n+1）维流形的边界？Thom 的主要论证方法是把这两个问题转变为"当 N 充分大时，在分类空间 BO（N）上，一个主丛所连带的一个球丛所构成的 Thom 复形，研究从映射到这复形的同伦问题；另一个想法，是在有向流形集中引出一个等价关系：两个流形 v, v' 是配边的，若 v' 与 v 反向的流形 −v 的非交并，即有向流形 v'-v 是一个流形的边界。n 维"配边类"集合 Ω^n 是自然具有一种交换群构造，群运算是由非交并来定义的。

一个值得注意的事实是 DIFF 的某些构造的不变性也是配边关系的不变性。一种重要的不变性就是 h-配边，它要求上述内射 v→w 和 v'→w 是同伦关系。Smale 就是根据 h-配边的一个基本结果推演他关于 Poincaré 猜想的定理的。

关于 Steenrod 问题的某种意义下的反问题：给出一个无边界的非紧流形 v，是否有一具边界的流形 w 使 v 是 w 的内部？这个问题已由 Siebenmann 用 K－理论解决。

（4）浸入，嵌入和K-理论　一个m维微分流形M在一个n>m维的微分流形N中的浸入，是一个C^∞映射$f:M\to N$，它的切映射是处处单射的。映射本身不必是单射；一个单射浸入称为一个嵌入。嵌入的分类法是："f和g是在一个微分合痕下是合痕的"。关于浸入，我们必须用"正则同伦"代替"合痕"，它表示一个同伦$(x,t)\to F(x,t)$，使$x\to F(x,t)$是对每一个$t\in I$为一个浸入。

最有趣的情况是$N=R^n$，M是紧的；浸入的分类首先由Smale对$M=S_m$完成，M.Hirsch对一般情况加以分类。

K-理论就是纽结理论，它的古典理论是关于$M=S_1$，$N=R^3$的嵌入分类的一种特例；当$n>3(m+1)/2$时，在R^n中没有"纽结的m-球"，而且所有在R^n中S_m的嵌入都是正则合痕；若$n\leq 3(m+1)/2$，纽结球的理论还很难着手。

最近，Habegger得到$S'\times R^{n-1}$流形中余维大于2的连接的分类[23]，在余维大于2中包含古典纽结和连接群的正合序列得到一种换球法的理论解释。

（5）不动点和群作用空间　代数拓扑一开始的最著名定理就是Brouwer不动点定理，另一重要结论就是Lefschetz迹公式用上同调表出不动点的个数。

如果$f:X\to X$是一个同胚映射，正幂和负幂f^n形成一个作用在X上的群G，f的不动点就是由一单点组成的G的轨道。所以，从拓扑观点，我们就引向一个拓扑群连续作用在一个空间上的轨道和轨道空间的研究。这种研究涉及不动点的存在性，李群的拓扑和它的齐次空间等等。

实际上，Goldman和Hirsch关于仿射流形的研究[21]，就是引用了Abel群的轨道概念。

最后，我们知道微分拓扑已经发展成近代动态系统的研究，它在系统结构稳定性，分歧问题，紊乱现象等等都是方兴未艾的发展方向。

（程极泰）

[1] Jean Dieudonné, *A Panorama of pure Mathematics*, Academic Press, 1982

[2] Cartan H. 1985年12月参加中国数学会五十周年纪念时的报告

[3] Hudson J., *Piecewise Linear Topology*, Benjamin, New York, 1969

[4] Jaco W., *Lectures on Three-Manifold Topology*, Am Math.Soc., Providence (1980)

[5] John L. Friedman and Donald M. Witt, *Topology* **25**, 1, (1986) 35

[6] McCarty G. S., Jr., *Trans. Am. Math. Soc.* **106** (1963) 293

[7] Hatcher A., *Proc. Am. Math. Soc.* **83** (1981) 427

[8] James W. Vick, *Homology Theory*, Academic Press, 1973

[9] Maunder C. R. F., *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 1980

[10] Goresky M., MacPherson R., *Topology* **19** (1980) 135

[11] ——, *Invent. Math.* **72** (1983) 77

[12] Goresky M., *Comment. Math. Helv.* **59** (1984), 485

[13] Habegger N., *Proceedings of The Am. Math Soc.*, **96**, 4 (1986) 693

[14] Chillingworth D. R. J., *Differential Topology with a view to Applications*, Pitman Publishing, 1976

[15] Segal G. B., *Symposia Math.* vol. IV, INDAM, Rome, 1968/1969, PP. 377-387

[16] Lashof P. K., May J. P., Segal G. B., *Contemporary Math.* **19** (1983), 167

[17] Hattori A., Yoshida T., *Japan J. Math.* **2** (1976) 13

[18] Kozlowski A., *Trans. of The Am. Math. Soc.*, **296**,1, (1986) 181

[19] Goldman W., Hirsch M. W., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **286** (1984), 629

[20] Markus L., *Cosmological models in Differential Geometry, mineographed notes*, Univ. of Minnesota, 1962, p. 58

[21] Goldman W., Hirsch M. W., *Trans. Amer. Math. Soc.* **295** (1986) 175

[22] Selman Akbulut, Robin Kirby, *Topology*, **24** (1985) 375-390

[23] Nathan Habegger, *Topology*, **25** (1986) 253

数 理 逻 辑

根据我国数理逻辑学科发展的具体情况，参照《数学评论》的分类，我们将数理逻辑分为七部分：1. 一般逻辑，2. 模型论，3. 递归论，4. 集合论，5. 证明论与构造数学，6. 代数逻辑，7. 非标准模型.

1. 一般逻辑

（1）段志刚[1]从反复析因的角度给出构造布尔函数的对偶族的一个新算法．通过双取对偶，可以在较短时间内用微机求得布尔函数或者非相干故障树的全部质蕴涵项．

（2）罗铸楷[2]通过讨论所有保 m 项关系 G_m 的函数集 $T(G_m)$，定出了一切完全或非完全 K 值逻辑函数集 P_K^*（$K\geq 4$）的极大封闭集．他证明了保 E 函数集 T_E、保 G_m 函数集 $F_{S,m}$、单纯可离函数集 $S_{1,m}$、正则可离函数集 $S_{R,m}$、拟线性函数集 L_P 和 V 型集 $V_{G4,2}$ 都是极大封闭集．

（3）罗铸楷[3]继续采用保关系的方法定出了 P_K^*（$K\geqslant 4$）的全部极大封闭集．他证明了 P_K^*（$K\geq 3$）中全部极大封闭集是 $P_K\cup\{*\}$、保 E 函数集 T_E、完满对称函数集 $F_{S,m}$、单纯可离函数集 $S_{1,m}$、正则可离函数集 $S_{R,m}$、拟线性函数集 L_P 和 V 型集 $V_{G4,2}$，从而解决了 $A\subseteq P_K^*$ 的完备性判定问题，即 $A\subseteq P_K^*$ 为完备集的充要条件是，A 不包含于极大封闭集 $P_K\cup\{*\}$、T_E、$F_{S,m}$、$S_{1,m}$、$S_{R,m}$,L_P 或 $V_{G4,2}$ 中．

（4）高恒珊[4]研究了带量词的模态系统 S5，讨论了其代数函义与 Kripke 函义的相互可转化性，并由此得到了强完全性定理．

2. 模型论

（1）沈复兴[5]用图像方法证明了格值模型论中的强升降 Löwenheim-Skolem-Tarski 定理，即每个无限模型都有任意大的初等扩充模型，以及若 $\mathscr{U}$ 为势 α 的模型，$\|\mathscr{L}\|\leqslant\beta\leqslant\alpha$，$X\subseteq A$，$|X|\leqslant\beta$，则 $\mathscr{U}$ 有含 X 的且势 β 的初等子模型．他并用 Σ_n 初等子模型的概念推导出分组理论 T 成为模型完备理论的充要条件．

（2）沈复兴[6]把力迫法引进格值模型论，证明了格值可数语言的遍交模型（generic model）存在定理，并应用有限力迫法给出了格值模型论中省略型定理的一个证明．

（3）沈复兴[7]把无限力迫法引进值格 L 为具有性质 F_1、F_2 的弱可补完备格的格值模型论，建立起理论 T 的模型类 Σ 与遍交模型类 $\mathscr{C}$ 之间的关系：如遍交模型的存在定理；当 T 完备时，Σ 与 $\mathscr{C}$ 一致等．证明了 $\mathscr{C}$ 的一些模型论性质：如 $\mathscr{U}$、$\mathscr{U}'\in\mathscr{C}$，$\mathscr{U}\subseteq\mathscr{U}'\Rightarrow\mathscr{U}<\mathscr{U}'$；$\mathscr{C}$ 在初等归约下封闭；当 T 和谐时， 在链并下封闭等．还给出格值力迫伴随理论、格值模型伴随理论和格值拟遍交模型的一些基本性质．这是很值得注意的结果．

（4）王世强[8]用模型论方法研究了三次数环，其中有些是具有 Goldbach 性质的扩环，另一些则否，从而得到 Goldbach 性质相对于一些命题集的和谐性，以及相对于一些命题集的独立性．

（5）王世强[9]继续文献[8]的研究工作，考查整数环 I 的一种具有 Goldbach 性质的扩环 R。R 有很多与 I 相同的性质，也有很多与 I 不同的性质，这说明了一些数论命题间的和谐性．

（6）王世强、沈复兴、岳其静[10]继续文献[8，9]的工作，用模型论方法讨论了非

Goldbach 环 S 中与 Goldbach 环 R 所具有的一些数论性质相对应的性质，得到一些既与 Goldbach 性质和谐，又与非 Goldbach 性质和谐的数论命题，从而证明了 Goldbach 性质对于这些命题的独立性。

3. 递归论

（1）莫绍揆、丁德成[11]把递归算术系统简化为下列三个系统：$A_0 V_2$、$A_0 V_1 I_2 \theta_2$ 和 $A_0 V_1 I_2 \theta_2^*$。其中 A_0 为存在性公理：任给 $H(x,y)$，存在函数 $F(u,x)$，满足

$$F(u,o)=u,\ F(u,S_x)=H(x,F(u,x));$$

V_n 为唯一性规则：

$F(u_1,\cdots,u_n,S_x)=H(F(u_1,\cdots,u_n,x))\vdash^{x} F(u_1,\cdots,u_n,x)=H^{x}(F(v_1,\cdots,u_n,o))$，"$\vdash$"表示"可推导出"；$x$ 为约束变元，它在前件中不能进行代入；I_n 是 V_n 当 $H(x)=x$ 时的特例；θ_n 是 V_n 当 $H(x)=0$ 时的特例；θ_n^* 是 θ_n 当 $F(u_1,\cdots u_n,0)=0$ 时的特例

新的系统比 H.E.Rose 系统优越。

（2）沈百英[12]考虑若使用递归式 A^0，并在基础系统中加入一个前驱函数 Dx 以及刻划它的两条初等公理：$D0=0$ 和 $DSx=x$（其中 Sx 为后继函数），则为了推出 M.D.Gladstone[13] 1971 年的结果，该有怎样的高等规则。其中存在性公理 A^0：任给一元函数 $\pi(x)$，存在二元函数 $\varphi(u,x)$，满足

$$\varphi(u,0)=u,\ \varphi(u,Sx)=\pi(\varphi(u,x)).$$

沈的回答是，有唯一性规则 H_1、I_2 即行。其中

$$H_1:\quad \left.\begin{array}{l}\varphi(u,0)=\psi(u,0)\\ \varphi(u,Sx)=\pi(h(u,x)\ \ \varphi(u,x))\\ \psi(u,Sx)=\pi(h(u,x),\ \psi(u,x))\end{array}\right\}\vdash^{x}\varphi(u,x)=\psi(u,x);$$

$$I_2:\quad \varphi(u_1,u_2,Sx)=\varphi(u_1,u_2,x)\vdash^{x}\varphi(u_1,u_2,x)=\varphi(u_1,u_2,0).$$

这样就构成了 $A^0(D甲)$系统。沈证明由这个系统可以得到莫绍揆和他[14]在 1966 年得到的 B_1V_2 系统，从而证明了系统 $A^0(D甲)$的合用性。

（3）沈百英指出[15]，若使用(无参数)原始复迭式 A^0，但不在基础系统中增加前驱函数 Dx 及有关公理，则为了推出 M.D.Gladstone 1971 年的结果，对唯一性规则的要求就严格得多。这时新系统应满足高等规则 V_2、L、U、VS，初等元规则 P_1、P_2 和混合规则 PZ。

（4）沈百英[16]研究了在原始递归算术的基础系统中加入存在性公理 B^1 和唯一性规则 HS、V_1、I_2、O_2 所构成的系统 B^1 甲。其中 B^1：任给二元函数 $\pi(x,y)$，存在二元函数 $\varphi(u,x)$，满足

$$\varphi(u,0)=u,\ \varphi(u,Sy)=\pi(u,\varphi(u,x));$$

$$HS:\quad \left.\begin{array}{l}\varphi(x,0)=\psi(x,0)\\ \varphi(x,Sy)=\pi(h(x,y),\ \varphi(Sx,y))\\ \psi(x,Sy)=\pi(h(x,y),\ \psi(Sx,y))\end{array}\right\}\vdash^{x,y}\varphi(x,y)=\psi(x,y);$$

$$V_1:\quad \left.\begin{array}{l}\varphi(u,0)=\psi(u,0)\\ \varphi(u,Sx)=\pi\varphi(u,x)\\ \psi(u,Sx)=\pi\psi(u,x)\end{array}\right\}\vdash^{x}\varphi(u,x)=\psi(u\cdot x);$$

$$I_2:\quad \varphi(u_1,u_2,Sx)=\varphi(u_1,u_2,x)\vdash^{x}\varphi(u_1,u_2,x)=\varphi(u_1,u_2,0);$$

$$O_2:\quad \left.\begin{array}{l}\varphi(u_1,u_2,0)=\psi(u_1,u_2,0)\\ \varphi(u_1,u_2,Sx)=0\\ \psi(u_1,u_2,Sx)=0\end{array}\right\}\overset{x}{\vdash}\varphi(u_1,u_2,x)=\psi(u_1u_2x)$$

沈证明了系统 B^1 中的合用性并推出和改进了 M.D.Gladstone[17] 1967 年的结果。

（5）丁德成[18]将一般递归算术系统中的递归式存在公理减弱为复迭式，即用复迭式存在公理 A^1、唯一性规则 V_2、W建立复迭算术。其中 A^1：任给二元函数 $\pi(x,y)$，存在三元函数 $F(u_0,u_1,x)$，满足 $F(u_0,u_1,0)=u_0$，$F(u_0,u_1,Sx)=\pi(u_1,F(u_0,u_1,x))$；

$$V_2:\quad \left.\begin{array}{l}F(u_1,u_2,0)=G(u_1,u_2,0)\\ F(u_1,u_2,Sx)=\pi(F(u_1,u_2,x))\\ G(u_1,u_2,Sx)=\pi(G(u_1,u_2,x))\end{array}\right\}\overset{x}{\vdash}F(u_1,u_2,x)=G(u_1,u_2,x);$$

$$W:\quad \left.\begin{array}{l}F(u,0)=G(u,0)\\ F(u,Sx)=\pi(C(u,x),F(Su,x))\\ G(u,Sx)=\pi(C(u,x),G(Su,x))\end{array}\right\}\overset{x,u}{\vdash}F(u,x)=G(u,x)。$$

（6）沈百英[19]对迄今在递归算术中出现的高等规则，即在前件中含有不准作代入的变元的规则，作了较详尽的探讨及多方面的推广，得到了 P归纳规则 P、Q拟归纳规则 Q、广义归纳规则 Z_{AB}、广义唯一性规则 U_{AB}、广义 P归纳规则P_{AB}、广义 Q拟归纳规则Q_{AB}、串值归纳规则 Z_h、串值唯一性规则 U_h、串值 P归纳规则 P_h、串值 Q拟归纳规则Q_h等高等规则，讨论了它们的合用性，以及它们之间在适当的初等系统中的强弱关系与等价关系。

（7）沈百英[20]继续莫绍揆与他[21]在 1982 年所做的工作，对数论函数的逆函数作了进一步的研究。他首先给出一类一元函数的强、弱左逆函数的存在性及其下降归宿步骤式表示，其次给出一类二元函数的强、弱左逆函数的存在性及其参数下降递归式表示，最后研究由原始复迭式

$f(x,0)=Ax$，$f(x,Sy)=\pi f(x,y)$（其中 $A(x)$ 与 $\pi(x)$ 为已知的一元函数）定义的二元数论函数 $f(x,y)$的左、右逆函数对，并能行地作出一种特殊类型的二元数论函数的左逆对与右逆对。

（8）沈百英[22]在莫绍揆与他[21]的 1982 年工作的基础上，给出了求复合函数左、右逆函数的方法。

（9）沈百英[23]在一般的形式下研究了各种类型的配对函数组，证明了配对左、右函数之间可以互相表达的关系，讨论了几种类型的二元函数可成为配对合函数的充分条件，给出了由已知配对函数组构造第一型、第二型平梯性配对函数组的方法，建立了配对函数组为一一对应的充要条件。

（10）丁德成[24]深化了 Lachlan 和 Yates 关于递归可枚举的极小对存在性的结果，证明了递归不可分的 r.e. 极小对的存在性。

（11）涅罗德·黄文奇[25]应用纯粹递归论的近代结果，研究了单位闭区间 I 上可计算实函数最大值点集中诸点可计算度的结构，建立了 I 上非空Π^0_1集与递归实函数最大值点集之间的紧密联系，证明了 H：$f\in\omega 2\mapsto Hf=\Sigma_{i=0}^{\omega}2f(i)/3^{i+1}$保$\Pi^0_1$，保度，揭示了递归实函数最大值点与度、r.e. 度之间的关系。

（12）史念东[26]定义了 Kalantari 和 Retzlaff 的能行拓扑空间 X 中的创造集，研究了 ζ 为 X 中创造集的必要条件、充分条件及充要条件，讨论了创造集与 r.e. 开集对和单纯开

集之间的关系，构造出 X 的两个创造开集，一个有了开拓的 r.e. 分割，另一个则否，显示了 X 上古典拓扑与能行拓扑的不同。

4. 集合论

（1）张锦文[27]把 GB 系统推广到研究比类更广泛的对象——聚合，它不仅允许以真类为元素，而且任一聚合都可以作为其他聚合的元素。除了沿用 K.Gödel 1940 年关于集与类的公理外，张用 A、B、C、D、E 五组公理来刻划聚合，其中 A 组 4 条，B 组 8 条，C 组 4 条，D 组 E 组各一条，共 18条。他还给出序量、基量的定义，得到了它们的一些性质如果能进一步证明新系统相对于 ZF 的协调性，无疑是很有意义的。

（2）孙文植[28]讨论了带本元（即具有性质 $x=\{x\}$的集合）的新集合论。将 ZFC的正规公理改为

$$\forall u(u\neq\varphi\wedge\forall x(x\in u\rightarrow x\neq\{x\})\rightarrow\exists x(x\in u\wedge x\cap u=\phi)),$$

并增加本元无限公理，即

$$\exists u(\forall x(x\in u\leftrightarrow x=\{x\})\wedge u\text{无穷}),$$

称这样的公理系为 ZFU。孙证明了两个与修改后的正规公理等价的命题，以及 ZFU 关于 ZFC 的相对相容性。

（3）杨守廉、祁金城[29]研究了 $\beta\omega$ 中 Rudin-Keisler 序的极小元性质。在 CH 下，证明了存在 P 点不以 $\beta\omega\backslash\omega$ 中任一极小元为后继，从而解决了 A.Blass[30] 在 1973 年提出的一个问题；证明了在 CH 下每个 $\beta\omega\backslash\omega$ 的极小元存在紧邻的 P 点前驱，从而深化了 M.E. Rudin[31] 1971 年的一个结果。

5. 证明论与构造数学

（1）王元元[32]给出了不同于 Robinson 替换方法的广义替换方法，王湘浩等曾给出不同于 Robinson 归结方法的广义归结方法，把两种方法联合使用，称为广义替换-归结方法。王元元证明了广义替换-归结方法的合理性与完备性，这种方法可对带等词的一阶谓词演算定理的一般形式直接进行机器证明。

6. 代数逻辑

（1）梁朴[33]讨论了 $VA\in B$ 的非原子布尔代数与原子、无原子布尔代数在结构上的关系：证明了 $E=\{V(A_0):A_0\subseteq A\}$ 与原子布尔代数 $E(B)$ 格同构；$G_\varphi=\{x\in B:x\leq A^*\}$ 与无原子布尔代数 $G_\varphi(B)$ 格同构；给出了任意两个这种类型布尔代数同构的充要条件。

（2）沈百英[34]给出了可换 BCK 代数和满足条件（S）的 BCK 代数字问题可解的肯定答案，即对于任何两个项 s、t，分别存在一个能行的方法，可以在有限步骤内判定方程 $s=t$ 是否为 BCK 代数中的定理。

（3）沈百英[35]仿照 M.W.Bunder 的处理方式把 BCI 代数的公理归结为与组合子 B、C、I 相对应的三个公理 B、C、I。B、C、I 加上 E 就得到一个更简单的 BCI 代数新系统 Y。

B：$y\dot{-}z\dot{-}(x\dot{-}z)\dot{-}(y\dot{-}x)=0$；

C：$z\dot{-}x\dot{-}y\dot{-}(z\dot{-}y\dot{-}x)=0$；

I：$x\dot{-}x=0$；

E：$\alpha\dot{-}\beta=0$，$\beta\dot{-}\alpha=0\vdash\alpha=\beta$.

把公理 B 换成 BI：$\alpha\dot{-}\beta=0\vdash\alpha\dot{-}\gamma\dot{-}(\beta\dot{-}\gamma)=0$，又得到等价的新系统 Y^*。

（4）沈百英[36]给出了BCI代数的四个等价的新系统 $Y1 \sim Y4$，它们的组成都比原来的系统简单。特别有意义的是他将 K.Iséki[37] 在 1980 年给出的定义加以简化，删去其中多余的公理 BCI 4。

（5）沈百英[38]通过拟序关系研究了一些不含"0"的减法系统 BCY、BCYB、BCYI 代数及它们的字问题。BCY 代数由下列公理构成：

P 1：$t \leqslant t$；

P 2：$s \leqslant t$，$t \leqslant u \vdash s \leqslant u$；

S 1：$s \leqslant t$，$u \leqslant w \vdash s \dot{-} w \leqslant t \dot{-} u$；

S 2：$s \dot{-} t \dot{-} (s \dot{-} u) \leqslant u \dot{-} t$；

S 3：$s \dot{-} (s \dot{-} t) \leqslant t$。

BCYB 代数的公理系由 BCY 公理系添加

S4：$s \dot{-} t \leqslant s$

而构成，它是有下界的 BCY 代数 BCYI 代数的公理系由BCYB公理系添加

S5：$t \leqslant s \vdash t \leqslant s \dot{-} (s \dot{-} t)$

而构成，它是有下确界的BCY 代数

在这些代数中，对任意项 t、s，关系式 $t \leqslant s$ 是否为该系统中的定理，恒可在有限步内能行地判定。

（6）沈百英[39]引入几个 ZY 代数 ZY 1 ～ZY 3，它们是在 BCY 代数中添加一个常个体，及相应的公理 Z 1 、Z 2 和 Z 1 + Z 2 而得，故都强于 BCY 代数而弱于 BCI 代数。他得到关系式 $s \leqslant t$ 在 ZY 1 、ZY 2 和 ZY 3 代数中可证的充要条件，因而恒可在有限步内能行地判定 $s \leqslant t$ 是否为相应代数中的一个定理。

7. 非标准模型

李邦河、李雅卿[40]应用非标准分析将李邦河[41] 1978 年定义的一维广义函数乘积推广到任意维。推广的乘积具有通常乘积所具有的性质，对于偶数维还有一个新情况，就是 δ 函数的自乘有非零 Hadamard 有限部分。

（**应制夷**）

[1] 段志刚，《科学通报》，31，21（1986）1617

[2] 罗铸楷，《数学学报》，27，6（1984）795

[3] 罗铸楷，《数学学报》，27，5（1984）676

[4] 高恒珊，《科学通报》，31，12（1986）884

[5] 沈复兴，《北京师范大学学报（自然科学版）》，2（1985）9

[6] 沈复兴，《数学年刊》A 辑，7，1（1986）46

[7] 沈复兴，《数学年刊》A 辑，7，2（1986）161

[8] 王世强，《中国科学》A 辑，1（1984）16

[9] 王世强，《中国科学》A 辑，3（1984）210

[10] 王世强等，《北京师范大学学报（自然科学版）》，4（1984）27

[11] 莫绍揆，丁德成，《数学年刊》A 辑，5，2（1984）169

[12] 沈百英，《数学学报》，27，3（1984）345

[13] Gladstone M.D., *J. Sym. Logic*, 36（1971）653

[14] 莫绍揆，沈百英，《数学进展》，9（1966）1

[15] 沈百英，《数学学报》，28，3（1985）294

[16] 沈百英，《数学学报》，27，2（1984）203

[17] Gladstone M.D., *J.Sym.Logic*, 32（1967）505

[18] 丁德成，《数学年刊》A 辑，7，3（1986）289

[19] 沈百英，《数学年刊》A 辑，4，6（1983）743

[20] 沈百英，《数学年刊》A 辑，5，4（1984）483

[21] 莫绍揆，沈百英，《数学年刊》，3，1（1982）103；3，3（1982）381

[22] 沈百英，《南京大学学报（自然科学版）》，2（1984）203

[23] 沈百英，《数学年刊》A 辑，4，3（1983）299

[24] 丁德成，《南京大学学报》数学半年刊，2（1984）268

[25] 涅罗德，黄文奇，《数学学报》，28，5（1985）625

[26] 史念东，《数学年刊》A 辑，7，3(1986)347
[27] 张锦文，《数学学报》，29，2(1986)217
[28] 孙文植，《数学年刊》A 辑，5，1(1984)41
[29] 杨守廉，祁金城，《数学学报》，27，4(1984)512
[30] Blass A., *Trans. Amer. Math. Soc.*, 179(1973)145
[31] Rudin M.E., *Trans.Amer. Math. Soc.*, 155 (1971)353
[32] 王元元，《南京大学学报(自然科学版)》，2 (1986)
[33] 梁朴，《数学研究与评论》，5，2(1985)15
[34] 沈百英，《南京大学学报》数学半年刊，1(1984)71
[35] 沈百英，《南京大学学报(自然科学版)》，4(1983)616
[36] 沈百英，《数学研究与评论》，5，2(1985)9
[37] Iséki K., Math. Seminar Notes Kobe Univ., 8 (1980) 125
[38] 沈百英，《数学学报》，29，1(1986)112
[39] 沈百英，《数学年刊》A 辑，7，1(1986)113
[40] Li Banghe, Li Yaqing, *Scientia Sinica*, 28A，7 (1985)716
[41] Li Banghe, *Scientia sinica* 21 (1978)561

模糊数学

1985年，正值模糊集合论诞生二十周年之际，全世界统一的模糊数学学术性组织——国际模糊系统协会宣告成立。在这一年中，还有两件事引人注目：日本熊本大学山川烈博士研制出模糊逻辑大规模集成电路，美国贝尔实验室研制成功模糊推理的芯片。这两件事标志着美、日两国已经把模糊集合论的数学思想的应用从计算机软件的设计深入到计算机硬件的革新上。山川烈声称正在研制的模糊计算机将引起计算机科学的一场革命。

国内的进展，只能挂一漏万地简述如下。

不分明拓扑是我国学者在其中颇有成就的研究领域。近年来，刘应明、梁基华就不分明拓扑的度量化问题给出了乌里松定理的不分明形式。梁基华给出了不分明度量空间的点式刻划。罗懋康给出反例说明不分明度量空间具有奇特性质，例如其 α 开重盖不必具有点可数开加细。对于不分明拓扑的相应代数结构问题，刘应明、何明把保并映射类上的代数运算理论与 Galois 联络联系起来，作了较大的拓广工作。在序同态工作中，刘应明给出了简洁的 Fuzz 函数成为 Zadeh 型函数的充要条件，给出了序同构的点式结构。刘应明、罗懋康证明了值域为 Fuzzy 格的不分明单位区间的良紧性，并借助格值上半连续映射的研究，给出了这类映射的整体性质，由此从嵌入理论入手寻找较理想的基本空间，建立较合理的 Stone-Čech 紧化理论。他们举例说明，一个空间的诸紧化空间所构成的预序确实可以不满足反对称律，原有的 Stone-Čech 紧化可能不是最大的 T_2 型紧化。在确立一个较理想的基本空间后，他们证明在所建立的紧化理论中，Stone-Čech 型紧化确实是某 T_2 型紧化中唯一的最大紧化。王国俊结合不分明拓扑的研究对Fuzzy格(即具有逆序对合对应的完全分配格)的构造作了探讨。他提出了极小(大)族的概念：设 $a\in L$，$B\subset L$，若(1) $\mathrm{Sup}\,B=a$，(2) $C\subset L$，$\mathrm{Sup}\,C\geq a\Rightarrow\forall x\in B$，$\exists y\in C$ 使 $x\leq y$，则称 B 为 a 的极小族。他证明了，当且仅当(1)完备格 L 上有一满足 De Morgan 对偶律的对合对应，(2) $\forall a\in L$，a 有一极小族时，L 是 Fuzzy 格。刘旺金、郑崇友引入了 Fuzzy 拓扑空间的同调群、基本群等概念，并证明了它们的 Fuzzy 拓扑(伦型)不变性。刘旺金研究了 Fuzzy ξ 闭包空间、Fuzzy ξ 邻近空间的关系，得到一些较好的性质。王戈平对 Lowen Fuzzy 实直线 $\mu_c(R)$ 进行了进一步的研究，证明了当 X 为至少含两点的 Borel 集时，$\mu_c(R)$ 不是适当的，当 $0<\alpha<1$ 时，$\mu_c(X)$ 上的半闭包算子 C_α 不是闭包算子，但 C_0 是闭包算子，由它所诱导出的 $\mu_c(X)$ 上的分明拓扑具有某些有趣的性质。他还在 $\mu_c(X)$ 上定义了 Fuzzy 加法算子，显示了不分明实

直线的应用前景。

1985 年吴从炘、方锦暄引进了（QL）型 Fuzzy 拓扑线性空间，给出了利用 Lasalle 伪范数族的刻划定理。接着，吴从炘、马明进一步研究了这类空间的性质，证明了可用满足某种条件的平衡 Fuzzy 一致基来刻划这类空间，并发现它们与经典拓扑线性空间有深刻的差异。他们还借助重域理论引入并建立了 Fuzzy 拓扑代数的邻近结构理论以及双连续的充要条件，利用 Fuzzy m 凸集的 Minkowski 泛函族刻划了所定义的局部 m 凸 Fuzzy 拓扑代数，利用 Fuzzy 赋范代数给出了这类 Fuzzy 拓扑代数的一种表示。此外，他们还解决了实数域和复数域上这类 Fuzzy 拓扑代数的分类问题。

王震源在 Fuzzy 测度空间上引进"几乎"与"伪几乎"的概念，基于对 Fuzzy 测度的渐近结构特征的研究，系统地讨论了可测函数列及相应的 Fuzzy 积分列的收敛性质。他还引进 Fuzzy 卷积的概念，并把它应用于表示 Fuzzy 数的加法运算。赵汝怀研究了（N） Fuzzy 积分及其与极限换次序的问题。

刘叙华等给出了 Fuzzy Abel 群的若干基本定理，米洪海提出了共轭 Fuzzy 子群的概念。于纯海研究了 Fuzzy 环的极大 Fuzzy 理想。刘文斌对代数结构的模糊化作出了统一处理。

随着理论的发展和应用的深入，模糊数学逐渐产生了自己特有的一些数学概念、理论和方法。

近几年来，朱梧槚和肖奚安深入地探索了模糊集合论的数学基础，开创性地建立了中介逻辑与中介公理集合论的体系，为处理模糊现象的数学和精确性经典数学提供了一个共同的理论基础，从而在数学基础理论意义下完成了数学研究对象由清晰到模糊的再扩充，并解决了如何修改概括原则的历史遗留问题。这个体系共有 300 余个引理与定理，有关的系列论文的简报已见于《自然杂志》8 卷 4 ～12期和 9 卷 7 ～12期的"研究通讯"栏。

汪培庄等经较长时间研究提出了模糊落影的理论框架。它以张南纶等提出的 Fuzzy 统计试验为背景，将模糊集视为随机集的落影。它吸取了 Shafer 信任函数、Choquet 容度以及非可加测度等理论所共含的思想萌芽，发展成这样的思想：下层的模糊性联系着上层的随机性；心理的主观现象要放到更高一层次的论域上去描述。这一思想突出了集值映射的重要性。序、拓扑、可测性等数学结构要从论域 U 向其幂 $\mathscr{P}(U)$ 上提升，展现了丰满的数学研究领域。汪培庄、梁学军、张连文等相继把著名的 Chaquet 容度定理从强拓扑限制下的定理拓展成为纯测度论的定理，把测度扩张的起点从半环前移到 π 系。汪培庄提出格化拓扑的概念，统一地形成了八种超拓扑，著名的几种经典超拓扑均被概括在其中。对于新的几种超拓扑，阎建平、李洪兴、张星虎、李庆德等人作了较系统的研究。何家儒引入了 A^x 及 B^x 型随机 Fuzzy 集等概念，并建立了相应的理论框架，李西和研究了一般随机集的经验分布，证明了中心统计定理。江佩荣、李西和都分别对随机区间的落影分布进行了探讨，李西和还得到了正则 Fuzzy 集的随机隶属频率的一致稳定性定理和两种 Fuzzy 统计方法，提出和研究了广义区间值函数的多种可测性及有关的极限和运算性质。

张文修、马计丰、乐惠玲、李华贵等在充分掌握集值映射在经济与控制系统理论和模糊集落影理论等多方面的发展的基础上，系统地研究了集值测度理论，给出了一系列的闭凸集值测度的判定定理、闭凸集值测度的 Lebesgue 分解定理、集值测度的选择定理和集值测度的表示定理。

围绕模糊集与随机集落影理论，汪培庄等先后提出了贴近度与择近原则、综合评判、程度分析、变权综合、落影滤波、因素空间以及集值统计（以张南纶等的Fuzzy统计方法为背景）等应用性较强的理论和方法。刘锡荟、冯德益、王光远、刘贞荣将模糊集理论和这些方法系统地应用于地震预报和地震工程，刘锡荟荣获北美模糊信息协会1985年颁发的K.S.Fu纪念奖状。张洪敏、张凤鸣等应用这些理论研制成了STIM专家系统，提出了意识树的新概念模糊。李安华、李葆文、程里春、查建禄等将这些理论应用于模糊决策，实际开展了几个县、市的区域规划工作。李洪兴等把程度分析和变权综合应用于干部管理方面，建立了一套干部管理测评的软件系统。这套系统先后在天津市委组织部等单位推广使用。胡兆光等运用这些理论和思想于我国电力系统，研制了电厂选址等专家系统。贺仲雄基于综合评判的思想，结合灰色系统与物元分析，建立了实用的专家咨询的软件系统，改进了德菲尔法。陈世权提出了Fuzzy回归等方法，应用于医药卫生等方面。

吴望名解决了求Inf-α型关系方程 $Q \textcircled{a} R=S$ 的最大（小）解问题。他把Sup-T型关系方程应用于近似推理，把Zadeh提出的推理合成规则（CRI）中的Sup-min合成改为Sup-T合成，在广义的假言推断（GMP）准则和广义的反驳推断（GMT）准则下，证明了蕴涵式 Rna 在Sup-$\wedge$合成下是Fuzzy关系方程 $Q \textcircled{T} R=S$ 和 $\bar{S} \textcircled{T} R^{-1}=\bar{Q}$ 的解或近似解。陈永义提出了特征展开近似推理方法。这方法与Zadeh、Baldwin等方法等效，但简便易行。他们以PROLOG语言为支撑研制了天气预报专家系统，此系统已通过鉴定并推广使用。

张文修将三角范式与余范式作了适当修改，用它们建立了比较系统的模糊集运算和变换理论。于延栋研究了三角模与TNP-σ代数，回答了Klement所提出的一个问题：是否存在更多的 t 模，使对任意的否定 N，总存在 U 上的非生成的TNF-σ代数？回答是，只要T是连续、奇异且Archimedes的 t 模即可。陈图云、马谋超结合心理测量研究了模糊集运算的合理性问题，提出了心理模糊统计的若干方法。

罗承忠、王德谋利用他们的区间套理论研究了模糊数的运算微积问题。欧阳合运用Radstron嵌入定理在抽象拓扑线性空间中解决了模糊数微积运算的互逆问题，并建立了抽象的模糊动力系统理论。巫世权就具体情况研究了模糊微分方程的求解问题。王光远、欧进萍提出了动态模糊集合与模糊过程，把Zadeh扩展原理应用到算子的Fuzzy化上。王光远等还发表了模糊参数的随机干扰作用下多自由度体系的模糊随机振动的计算理论，并把它应用于抗地震结构计算，提出了抗震结构模糊可靠性分析理论。

李中夫对Shafer的证据组合问题进行了系统的研究，他在Purdue大学把这些成果应用于SPRIL专家系统的研制。张连文、李庆德等将Shafer的信任函数理论与模糊集理论紧密结合，改进了证据的合成规则。

李相镐深入研究了Fuzzy相似矩阵的特征值问题，发现了Fuzzy线性空间（（[0，1]，$\vee$，$\wedge$）生成模）所具有的许多奇异性质。例如，对每一 $\lambda \in [0,1]$，特征向量集 $x(\lambda)$ 均构成一Fuzzy线性子空间且基底唯一；特征值的等价类划分可由传递闭包矩阵非对角元中的相异元素来确定。他利用Fuzzy矩阵的特征值理论，提出了动态直接聚类法。这种聚类法统一了最短聚类法、传递闭包法、最大树等方法，而且计算量小。李洪兴提出了模糊关系方程的摄动理论和基于摄动的模糊聚类方法，回答了"如何寻找按某种距离与已知的模糊相似矩阵最接近的模糊等价矩阵"的问题。朱剑英将模糊等价矩阵理论及ISODATA法用于模式识别，提出了特征均匀度函数的概念，给出了特征权重的确定方法，并把此法应用

于金属切屑的形态分类，识别的正确率达 95% 以上，大大高于传统的统计模式识别方法在 1985 年 CIRP 年会上受到国际同行的重视和好评。

赵红研究了模糊控制的自学习问题，实际研制了太钢 3 号高炉含硅量预报的系统，通过了鉴定。涂象初等研究了自寻优 Fuzzy PID 控制理论，韩学功等将模糊控制与优化理论用于采油系统，均取得较大经济效益。

（汪培庄　彭先图）

组　合　学

组合学以离散现象的数学方面作为其研究对象，它与计算机科学、数字通讯、经济管理、试验设计、运筹学、电子工程等应用学科，以及物理学、化学等基础理论学科都有很密切的联系，并为这些学科提供了重要的原理和方法。因此，它的理论意义和实际价值都很大。二十多年来，现代组合学发展很快，新的分支不断形成，使组合学界为之震动的成果也时有出现。我国古代对组合学很有贡献，但现代研究则起步较晚。虽然如此，国内学者已在这方面得到了一些可喜的成果，其中如陆家羲对 Steiner 三连系大集问题的整体解决，受到了国际组合学界的高度评价和赞扬。这里仅就我国学者在国内外主要杂志上公布的成果作一介绍。因限于篇幅和写作水平，无法在较短的时间内搜集、阅读所有杂志上的有关论文，故非主要杂志上发表者未能写入。主要杂志上发表的个别结果已为前人先得者，也未述及。国外学者的工作仅当介绍国内学者的成果而必须涉及时，才予介绍。又，图论的内容很丰富，且有其独立性，当另待专文，这里不论。

1. 偏序集的组合问题　设 S 是一个 n 元集，用 2^S 记 S 的全体子集按集包含关系所组成的偏序集。偏序集 2^S 的最有趣的组合性质之一由 Sperner 定理给出。P. Erdös、柯召和 R. Rado 考虑与 Sperner 定理相反的问题，证明了：对于任一 t（$1\leqslant t\leqslant \frac{n}{2}$），$S$ 中两两相交的 t 元子集的最大个数是 $\binom{n-1}{t-1}$；达到这个最大个数的子集族可由 $S\setminus\{a\}$（a 为 S 中任一固定元）的全体（$t-1$）元子集的每一个添上 a 来得到；而且，除了 a 的选取外，这是唯一的。

对于偏序集是否具有 Sperner 性质的问题，E.R. Canfield 证明了，当 $n>6.5\times10^{24}$ 时，n 元集的分拆所成的格不具有 Sperner 性质。沙基昌和 D.J. Kleitman 改进了这一结果，证明了当 $n\geqslant3.4\times10^6$ 时上述结论成立。设 2^S 的秩函数为 $|x|$（$x\in2^S$）。Lih 曾提出下述猜想：若 F 是 2^S 的某些具有相同秩 t 的元生成的序滤子，则 F 具有 Sperner 性质。朱迎宪否定了这个猜想，他证明了，当 $n\geqslant7$，$\frac{n}{2}<t<n-2$ 时，存在由 2^S 的某些具有相同秩 t 的元素生成的序滤子 F，它没有 Sperner 性质。

对于偏序集 2^S 的线性扩张的个数，D.J. Kleitman 和沙基昌给出了它的上界估计和下界估计。

设有 kn（$k\geqslant2$）个人员，他们之间的能力大小是一偏序关系，这个偏序关系可由若干有根树所组成的林来表示。现要把他们分成 n 组，每组 k 人，一人作组长，其余 $k-1$ 人作组员，要求组长的能力比同组组员的能力大，组员之间的能力大小则不论。把符合条件的分组叫做可行分组。又假定每一人员在担任组长时和担任组员时各有其贡献。有以下两个问题：对这 kn 个人员，存在可行分组的条件是什么？如果存在可行分组，何为总贡

献最大的可行分组？魏万迪、蔡沅之、C．L．Liu 和 A．M．Odlyzko 解决了这两个问题

2．组合计数

（1）反演理论　徐利治对级数的反演理论作了一系列工作，对自反函数和互反函数得到许多结果．他和杨家福指出，互反级数关系可以成为等距插值公式的一个来源，并从广义 Möbius-Rota 反演公式出发造出了一类借助差分而表出的插值公式．

Schwenk 从 Pólya 定理的研究出发，魏万迪从 ménage 问题的研究出发，独立地把容斥原理推广为广容斥原理．魏万迪用广容斥原理解决了一般情形的 ménage 问题，并给出了该原理的其他一些应用．韩绍岑、查晓亚和万宏辉应用广容斥原理对 Bonferroni 不等式作了推广

（2）递归关系　屠规彰给出了常系数三项齐次递归关系 $a_{n+p}=\alpha a_{n+q}+\beta a_n$ 的一般解的公式，这里 $p>q>0$，α 和 β 是常数．陈银通、李立鹏和余长安给出了常系数四阶齐次递归关系 $a_{n+4}=\alpha_0 a_{n+3}+\alpha_1 a_{n+2}+\alpha_2 a_{n+1}+\alpha_3 a_n$ 的解的一般公式，这里诸 α_i 是常数，$\alpha_3\neq 0$；并把这一结果用来构造一类四阶线性偏微分方程的解。乐茂华给出了任意常系数 m 阶齐次线性递归关系 $a_{n+m}=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{n+m-i}$ 的一般解的公式，这里诸 α_i 为常数，且 $\alpha_m\neq 0$．张福基研究了广义线性递归关系 $a_{m+n}=\sum_{i=1}^{m+n}\alpha_i a_{m+n-i}+b_n$，这里 $n\geqslant 0$，诸 α_i 和 b_i 为常数，它以前述几种递归关系为其特款，张成功地给出了它的一般解的公式。此外，康泰和顾同新关于线性递归算子得到了若干结果。

（3）Pólya 计数定理　韩绍岑和查晓亚把 Pólya 基本计数定理精细化，得到了计算每个等价类中元的个数的公式．韩绍岑应用 Pólya 计数定理求得有限集的互不等价的某些子集系的个数．

（4）分配问题　钟集和柳柏濂给出了环分配数的计算公式。魏万迪对于某些类限量分配数给出了计算公式．初文昌对限量分配问题给予统一的处理并加以推广，引入点对称函数讨论了有关的计算．

（5）排列与积和式　栾汝书研究了一些类排列的计数问题，魏万迪提出了 k-积和式、全-积和式的概念，研究了它们的性质和计算公式，为处理限位排列问题提供了工具。他的这些概念和结果对于研究同任一(0，1)-矩阵相结合的单纯复形也是有用的，例如 G.-C. Rota 和 S. A. Joni 关于这种单纯复形的主要结果只是他的一个定理的特例

（6）论述组合计数的书籍　屠规彰：《组合计数方法及其应用》，科学出版社，1981；柯召、魏万迪：《组合论（上册）》，科学出版社，1981；徐利治、蒋茂森、朱自强：《计算组合数学》，上海科学技术出版社，1983；卢开澄：《组合数学——算法与分析（上册）》，清华大学出版社，1983；陈景润：《组合数学》，河南出版社，1985．

3．组合设计

（1）BIB 设计

Steiner 系　陆家羲整体解决了历史悠久的著名难题——Steiner 三连系的大集问题。他证明了，当 $v\equiv 1$、$3\pmod 6$，且 $v\neq 141$、283、501、789、1501、2365 时，$D(v)=v-2$，这里 $D(v)$ 表两两无公共区组的 v 阶 Steiner 三连系的最大个数。朱烈给出了参数（t，v，k）为（3，5，7）的一对正交 Steiner 系．当 gcd（n，6）= 1 时，他构造了三个两两正交

的（2^n-1）阶 Steiner 系，而且证明了，存在六个两两正交的 127 阶 Steiner 系。

可分解 BIB 设计　陆家羲解决了另一著名难题——可分解 BIB 设计 RB［$k,\lambda;v$］渐近存在条件问题。他证明了，对于任给的正整数 k 和 l，除了有限个正整数 v 外，可分解 BIB 设计 RB［$k,\lambda;v$］存在的充要条件是 $v\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ k)$，$\lambda(v-1)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ (k-1))$

差集　孙琦、沈仲琦和屈明华得到了（v,k,λ）-循环差集中至少有一个元与 v 元素的充分条件。吴晓红证明了，3 不可能是循环差集的额外乘数，5 不可能是平面循环差集的额外乘数。沈国祥研究了 Abel 群相对差集，得到了一些有用的性质，给出了一些构造方法，并用来产生一些新的 PBIB 设计。魏万迪不借助计算机证明了，互不等价的（40，13，4）循环差集是唯一的，且构造出了这个差集。魏万迪给出了 Ⅱ 型循环拟差集的一些不存在性定理，构造了 $v=24$ 的这类差集，并对不超过 100 的偶数 v 考察了这类差集的存在性。

Hadamard 矩阵　张西华证明了以下猜想：不存在 k（>1）阶完全循环的 Hadamard 矩阵。杨义先证明了下述三个猜想：（1）可以造出 m^n 个二维 m 阶完全正常的 Hadamard 矩阵；（2）存在阶数为 $4s+2$ 的高维 Hadamard 矩阵；（3）由等式 $d_{ij\ldots z}=2\sin[\frac{\pi}{4}(2s-k)]$ 所确定的 n 维 2 阶矩阵是唯一的一类 n 维 2 阶完全正常 Hadamard 矩阵，其中 s 为足标之和，$k=0$ 或 1

BIB 设计的一般理论　设 q 为素数幂。沈灏利用有限域 GF(q) 上的辛几何构作了 BIB 设计，他还用 GF(q) 上的非奇异 Hermite 矩阵、交错矩阵与对称矩阵构作了若干类 BIB 设计。设 F 是任一域。魏万迪研究了与 BIB 设计密切相关的矩阵类 $\mathscr{D}=\{\alpha I_r+\beta J_r \mid \alpha,\beta\in F,\ \det(\alpha I_r+\beta J_r)\neq 0\}$ 的群性质，证明了 $\mathscr{D}$ 在一般线性群 $GL_r(F)$ 中的中心化子和正规化子都是 $\mathscr{C}=\{Z\in GL_r(F)\mid Z$ 的诸行和与诸列和都相等$\}$，并对 Connor 关于 BIB 设计的完备化定理中的一个关键引理给出了一个更为明朗的证明。

（2）正交拉丁方

正交拉丁方的计数　用 $N(v)$ 记两两正交的 v 阶拉丁方的最大个数。王元证明了，当 v 充分大时，$N(v)\geqslant v^{1/25}$。陆鸣皋把这个下界改进为 $N(v)\geqslant v^{\frac{10}{143}}-2$。易知 $N(v)\leqslant v-1$。张里千证明了，$N(v)\neq v-2$。Euler 关于正交拉丁方的著名猜想可述为 $N(4t+2)=1$，$t\geqslant 1$。这个猜想于 1960 年被否定：当 $v>6$ 时，$N(v)\geqslant 2$。朱烈给这一著名结果以一个简洁而优美的证明。他还证明了，$N(36)\geqslant 4$，$N(46)\geqslant 4$，$N(69)\geqslant 6$。

正交拉丁方的构造　朱烈给出了用和复合方法构作正交拉丁方的一般性定理。当 $v=p+q$ 且 p 为素数，q 为 $p-1$ 的正因数时，史既济提出了构造 v 阶正交拉丁方的一种方法，并用此改进了 $N(v)$（$v=46$、93、106、118、154）在当时（1964 年）的下界。陶照民提出了一种由幻方构造奇阶正交拉丁方的一种方法。

正交对角拉丁方　朱烈对于两两正交的 v 阶对角拉丁方的最大个数作了一系列研究。利用他本人及其他学者的结果，他最后证明了，当 $v\geqslant 7$ 时，除了 28 个可能的例外值，存在三个两两正交的 v 阶对角拉丁方。用 d_r 记符合下述条件的最小正整数：当 $v>d_r$ 时，存在 r 个两两正交的 v 阶对角拉丁方。已知 $d_2\leqslant 10$。W. D. Wallis 和朱烈证明了，$d_3\leqslant 446$，$d_4\leqslant 510$，$d_5\leqslant 2723$，$d_6\leqslant 6277$。

有正交子方的正交拉丁方　朱烈对此论题作了一系列工作。用 LS（v,n）记具有 n 阶正交子方的一对 v 阶正交拉丁方。已知 LS（v,n）存在的一个必要条件是 $v\geqslant 3n$。又已知 LS（v,n）存在的一些充分条件。例如，当 $v\geqslant 4n+3$，$n\geqslant 304$ 时，存在 LS(v,n)