高等学校试用教材

随机运筹学

赵 玮 王荫清

高等教育出版社

高等学校试用教材

随机运筹学

赵　玮　王荫清

高等教育出版社

（京）112号

出版前言

本书于1990年经全国高等工业学校应用数学专业教材委员会评审，推荐为应用数学专业试用教材。

全书共分六章，较为系统地介绍了运筹学中的七个随机分支．这些内容在技术科学与管理科学中有着广泛的应用．全书各章具有相对独立性，因此，本书可供读者选学其中部分内容．本书可供应用数学、运筹学、计算数学、管理科学和系统工程等专业本科生和工科院校研究生作为教材，还可供有关科技人员和工程技术人员作为参考书．

高等学校试用教材
随机运筹学
赵　玮　王荫清
*
高等教育出版社出版
新华书店总店科技发行所发行
河北省香河县印刷厂印装
*
开本 850×1168 1/32　印张 13.875　字数 360 000
1993年6月第1版　1993年6月第1次印刷
印数 0001—3 097
ISBN 7-04-004153-7/O·1196
定价 5.00 元

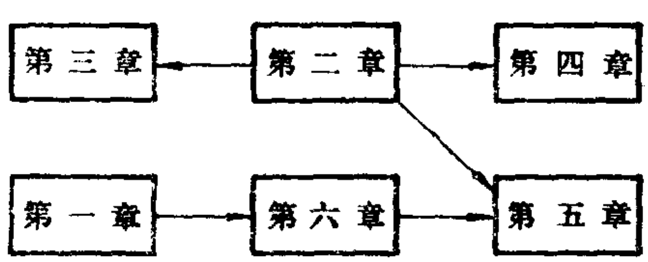
序

运筹学是研究用科学方法决定在资源不充分的情况下如何最好地设计人-机系统，并使之最好地运行的一门学科。运筹学所研究的问题一般都表现为人与物的关系，而且在大多数情况下是研究系统中各种要素之间的数量依赖关系。这就使运筹问题总是以某种数学模型的方式出现，且要依赖数学方法来解决。因此，运筹学自然成为应用数学的一个重要内容，也是应用数学专业学生的必修课程之一。

从方法论的角度来看，运筹学中的数学模型大体可分为两大类。一类是确定性模型，如线性规划、非线性规划、整数规划、图论、网络流、几何规划等等。这类模型在描述现实世界事物时，或由于事物本身不含随机性因素，或事物本身虽含有随机因素但并未扮演一个基本重要的角色，因而从数量关系上描述它们的数学模型具有确定性。另一类是随机模型，这类模型由于所描述的现实现象中随机性扮演了一个基本重要的角色，因而从数量关系上描述它们的数学模型具有随机性。运筹学中的随机模型可描述的对象十分广泛，这些模型从不同的应用角度看大致可分为排队论（随机服务系统）、系统可靠性数学理论、对策论、随机存贮论、随机模拟（仿真）理论、随机规划理论、不确定性决策理论、随机搜索与控制理论及其它等各个分支。由于教学时数的限制，本书只选择了上述运筹学中随机模型的七个主要分支编为六章，构成此教材。第一章对策论，主要介绍在带有竞争性质的现象中，参加者为争取获胜所应作出决策的理论和方法。第二章排队论，其基本内容是通过对各种到达、服务在排队等待现象中的概率特性研究，去解决服务系统的最优设计和最优运行问题。第三章系统可靠性数学理论，介绍在研究各种不同的系统结构、不

同的系统概率特性时，为寻求可修(或不可修)部件的可靠性与系统可靠性之间的数量依存关系所采用的各种统计数学分析方法。第四章随机系统与随机过程的计算机模拟(仿真)理论，其基本内容是把数学、物理、工程、管理等问题与适当的概率模型的某个数字特征联系起来，然后用统计抽样方法求近似解。特别是对那些大型复杂问题，当无法用解析表达式描述时，研究用随机模拟求出近似数值解的有关数学理论和方法。第五章随机库存论，主要介绍在带有随机因素的各种存贮系统中，决策者为寻求不同形式的最优存贮策略而采用的各种数学分析与运筹学方法。第六章随机线性规划与马氏决策规划，介绍目标函数或约束条件含有随机成分的线性规划以及一类具有无后效结构的动态随机系统的最优序贯决策的理论和方法。为便于读者理解本书内容，每章末附有一定数量的习题，这些习题大多围绕各章基本内容展开，读者选作其中一部分习题将获益不浅。

本书是根据全国高等工业学校应用数学专业教材委员会拟定的“随机运筹学教材基本要求”编写的，并分别在成都科技大学和西安电子科技大学应用数学专业和系统工程专业进行过多次讲授试用。选用本书作为教材，全书约需56学时，若选用其中部分章节，学时还可相应减少，各章讲授时数（不计带*内容），我们建议：第一、二两章各需12学时，第三、四、五、六章各需8学时。本书各章中带*内容可作读者深入了解之用。各章之间逻辑关系如下图。



此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

本书二、三、四章及附录初稿由赵玮执笔，一、五、六章初稿由王荫清执笔、全书定稿主要由赵玮完成。本书经全国高等工业学校应用数学教材委员会评审通过后推荐出版。评审责任委员胡毓达教授对全书作了极其认真、仔细的评审，对全书的形成起了重要作用。中国科学院应用数学研究所程侃、曹晋华研究员及教材委员会运筹组的各位委员和有关专家在评审过程中对本书提出了许多宝贵意见，在此特向他们致以衷心感谢。

限于编者水平，书中不妥和错误之处在所难免，欢迎广大读者批评指正。

赵　玮

王荫清

一九九一年元月于成都

目　录

第一章　对策论 …………………………………………………… 1
§1.1　对策现象的基本要素 ……………………………………… 1
(一) 局中人 ……………………………………………………… 4
(二) 策略 ………………………………………………………… 4
(三) 支付 ………………………………………………………… 5
§1.2　矩阵对策 ………………………………………………… 6
(一) 具有鞍点的矩阵对策和最优纯策略 ……………………… 8
(二) 无鞍点的矩阵对策和最优混合策略 ……………………… 14
(三) 最优策略的性质 …………………………………………… 22
(四) 矩阵对策的求解方法 ……………………………………… 30
§1.3　无限策略对策 …………………………………………… 41
(一) 具有鞍点的二人零和连续对策和最优纯策略 …………… 42
(二) 无鞍点的二人零和连续对策和最优混合策略 …………… 44
(三) 最优策略的性质 …………………………………………… 47
(四) 最优策略的求解方法 ……………………………………… 60
§1.4*　n 人零和对策 ………………………………………… 72
(一) n 人零和有限不结盟对策 ……………………………… 72
(二) 特征函数与简化型对策 …………………………………… 78
(三) 联盟与分配 ………………………………………………… 91
习题一 ……………………………………………………………… 102
第二章　排队论 …………………………………………………… 106
§2.1　排队系统的基本概念 …………………………………… 106
(一) 排队系统的基本构成 ……………………………………… 108
(二) 排队系统的分类与符号 …………………………………… 112
(三) 排队系统的特性指标 ……………………………………… 113
§2.2　Poisson 排队系统（一） ……………………………… 116

(一) $M/M/1/1$ 系统 ……………………………………………………116
(二) $M/M/c/k$ 系统 ($k \geqslant c$) …………………………………………121
(三) $M/M/c/\infty$ 系统 ($c \geqslant 1$) …………………………………………131
(四) Little 公式概要 ……………………………………………………140
§2.3 Poisson 排队系统（二） ……………………………………142
(一) 概率守恒原理 ……………………………………………………143
(二) 具有消失制的成批到达排队系统 ………………………………146
(三) 具有串、并联服务结构形式的有限源优先排队系统 ………148
(四) 具有有限等待时间制的排队系统 ………………………………152
(五) 服务速率依赖于队长的排队系统 ………………………………155
(六) *排队系统的忙期长度及其分布 ………………………………158
§2.4* 一般输入或一般服务的排队系统 ………………………163
(一) $M/G/1/\infty$ 系统 ……………………………………………………164
(二) $GI/G/1/\infty$ 系统 ……………………………………………………179
§2.5* 排队系统的统计推断 ………………………………………183
(一) 指数模型的统计推断 ……………………………………………184
(二) Poisson 流检验 ……………………………………………………188
习题二 ……………………………………………………………………192
第三章 系统可靠性数学理论 …………………………………………197
§3.1 评定产品的可靠性指标 ………………………………………198
(一) 不可修产品的可靠性指标 ………………………………………198
(二) 可修产品的可靠性指标 …………………………………………200
§3.2 典型不可修系统分析 …………………………………………201
(一) 串联系统 ……………………………………………………………202
(二) 冗余系统 ……………………………………………………………204
(三) 贮备系统 ……………………………………………………………209
(四) 混联系统 ……………………………………………………………214
§3.3 马氏可修系统分析 ……………………………………………217
(一) 马氏可修系统的一般模型 ………………………………………218
(二) 串联可修系统 ………………………………………………………225
(三) 二部件并联可修系统 ……………………………………………231

（四）二部件温贮备可修系统 ……………………………………234
（五）具有优先权的两部件冷贮备可修系统 ……………………238
§3.4* 非马氏可修系统分析 ……………………………………240
（一）基本模型及状态方程 …………………………………………241
（二）系统可用度 ……………………………………………………245
（三）系统可靠度 ……………………………………………………248
习题三 …………………………………………………………………250
第四章 随机系统与随机过程的计算机模拟理论 ………………254
§4.1 计算机模拟的基本概念………………………………………254
（一）什么是计算机模拟 ……………………………………………254
（二）Buffon 投针模拟的启示 ……………………………………257
（三）伪随机数及其产生方法介绍 …………………………………263
§4.2 随机变量的模拟………………………………………………265
（一）随机事件与离散型随机变量的模拟 …………………………265
（二）连续型随机变量的模拟 ………………………………………268
§4.3* 随机过程的模拟 ……………………………………………280
（一）n 维随机向量的模拟 …………………………………………280
（二）Poisson 流的模拟 ……………………………………………286
（三）齐次马氏链的模拟 ……………………………………………288
（四）弱平稳过程的模拟 ……………………………………………290
§4.4 随机系统的模拟………………………………………………297
（一）时间步长法 ……………………………………………………297
（二）最短时间的事件步长法 ………………………………………301
（三）随机系统模拟的一般流程 ……………………………………305
§4.5 精度估计与模拟次数的确定 …………………………………306
（一）模拟结果的精度估计 …………………………………………307
（二）模拟次数的确定 ………………………………………………313
习题四 …………………………………………………………………315
第五章 随机库存论 ……………………………………………………319
§5.1 库存问题的基本要素…………………………………………320
（一）库存问题的基本要素 …………………………………………320

（二）一个确定性库存模型 ……………………………………322
§5.2 单周期随机库存模型 ……………………………………327
（一）模型的基本假设 ……………………………………327
（二）模型的求解 ……………………………………327
§5.3 多周期随机库存模型 ……………………………………329
（一）模型Ⅰ ……………………………………329
（二）模型Ⅱ ……………………………………334
（三）模型Ⅲ ……………………………………342
§5.4* 多阶段随机库存模型求解的 MDP 方法 ………346
（一）策略迭代算法 ……………………………………347
（二）应用举例 ……………………………………348
§5.5 随机库存系统求解的排队论方法 ……………………354
（一）对应排队系统分析 ……………………………………355
（二）目标函数分析 ……………………………………356
（三）存货与缺货分析 ……………………………………357
（四）系统求解 ……………………………………358
§5.6 随机库存系统求解的计算机模拟法 ……………………359
（一）报童问题仿真 ……………………………………360
（二）企业生产的库存问题仿真 ……………………………363
习题五 ……………………………………366
第六章 随机线性规划与马氏决策规划 ……………………369
§6.1 随机线性规划 ……………………………………369
（一）随机线性规划的研究模式 ……………………………371
（二）分布问题 ……………………………………373
（三）二阶段问题 ……………………………………380
§6.2* 马氏决策规划 ……………………………………385
（一）马氏决策规划的数学描述 ……………………………388
（二）有限阶段模型 ……………………………………394
（三）折扣模型 ……………………………………398
习题六 ……………………………………417
附录一 Stieltjes 积分及其性质 ……………………………419

附录二　随机过程基础 ……………………………………………… 422
（一）随机过程 ……………………………………………………… 422
（二）Poisson 流 …………………………………………………… 423
（三）生灭过程 ……………………………………………………… 424
（四）齐次马氏过程 ………………………………………………… 426
参考文献 ………………………………………………………………… 429

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章 对 策 论

在我们生活的社会中，常常可以观察到各种各样带有竞争性质的现象。例如，日常生活中的下棋、打牌、球赛及其他各种体育竞赛和某些游戏；经济领域内的广告与销售活动，贸易谈判，价格竞争，生产管理；政治领域内的谈判策略；军事领域内的进攻与防御，战略与战术等等。这些现象的特征是冲突双方始终处于一种竞争或对抗状态中，并且由于参与竞争的双方各自采取不同策略的组合而得到不同的结果。这种带有竞争性质的现象我们称之为对策现象，或简称为对策。对策现象虽然早已为人们所关注，但最初将其抽象为策略的数学理论，则是在1921 年由E Borel作出的，1928 年 J.V.Neumann 证明的最大最小值定理首次揭示了对策现象的一个基本特性。在二次大战期间，由于在军事和生产中提出了许多对策问题，从而使对策现象成为许多数学家研究的对象。在获得了一系列的成果后，形成了数学的一个新的分支一对策论。1944 年 J.V.Neumann 和 O.Morgenstern 合著的《对策论与经济行为》一书问世，使对策论的数学理论更加系统和完善，同时也受到了各方面的充分重视。目前对策论在政治、经济和军事活动中已得到了广泛的应用，从而成为运筹学的一个重要组成内容。

§1.1 对策现象的基本要素

对策论是研究在对策现象中，参加者为争取获胜应作何种决策的数学理论和方法。为此，我们首先通过几个实例来阐明对策

现象中的基本要素是什么，然后再来介绍其有关的数学理论和方法。

例1.1 两家公司为分享某种产品的市场，正在各自拟定下一年的销售计划，以便扩大销售量（该产品的市场需求量设为定数，一家扩大销售量，另一家必减少销售量）。每家公司都在考虑用三种不同的办法来扩大自己的销售量，即：（1）改进包装；（2）加强广告宣传；（3）适当削价。这三种办法所需费用大体相当，而根据公司财力每家公司只能在这三种办法中选用一种。各种办法的组合对于公司Ⅰ销售增长的百分点如表1-1（表中正数表示公司Ⅰ销售增长数，同时也是公司Ⅱ销售减少数；负数表示公司Ⅰ销售减少数，同时也是公司Ⅱ销售增长数）。问各公司在不知道对方采用哪种办法之前，如何作出自己的决策？

表 1-1

公司Ⅱ \ 销售增长 \ 公司Ⅰ	1	2	3
1	−3	1	2
2	1	2	1
3	1	0	−2

例1.2 设某机关在秋初便要决定冬季取暖用煤的贮藏量问题。考虑到在正常的冬季气温下该机关要耗煤15吨，但在较暖与较冷的冬季则要分别耗煤10吨与20吨。假设煤的价格随着冬季寒冷程度而有所变动，并设在较暖的、正常的与较冷的冬季气温下每吨煤分别为10元、15元与20元。又设在秋初煤的价格是每吨10元。试问在没有关于当年冬季的准确气象预报条件下，该机关在秋初应买进多少吨煤才较合理？

如果我们将该机关采购员与大自然看作对策现象中的冲突双方，则机关采购员在秋初显然有三种不同的方案供选择，它们依次为（1）购进10吨；（2）购进15吨；（3）购进20吨。面

大自然在未来的冬季显然也面临着三种不同的气候状态，它们依次为（1）较暖的冬季；（2）正常气温的冬季；（3）较冷的冬季。考虑到该机关在冬季取暖用煤实际所耗的费用应等于秋初购进煤所耗费用加上冬季供煤不足时再补购煤所耗费用之和。因而对于冲突双方的每一种方案组合，可以得到该机关的支付费用表1-2(表中各负数表示机关付出的费用)。

表 1-2

机关购煤方案 \ 支付费用 \ 大自然气温状态	较暖	正常	较冷
（1）	-100	-175	-300
（2）	-150	-150	-250
（3）	-200	-200	-200

例 1.3 B上校和他的敌人都打算适当地分配自己的兵力去占领两个据点。假设B上校有四个团的兵力，敌方有三个团的兵力，双方都把这些兵力分配到两个据点去。B上校有五种不同的方案来分配他的四个团的兵力，敌方有四种不同的方案来分配其三个团的兵力。双方各种兵力分配方案的组合对B上校来说其得失如表 1-3。问B上校在不知道对方兵力分配的情况下，用何种方案分配自己的兵力，方能最好完成任务？

表 1-3

上校所用方案 \ 上校得失 \ 敌方案	（3，0）	（0，3）	（2，1）	（1，2）
（4，0）	4	0	2	1
（0，4）	0	4	1	2
（3，1）	1	-1	3	0
（1，3）	-1	1	0	3
（2，2）	-2	-2	2	2

由上述各例可以看出，在各种各样的对策现象中，它们有着共同的要素。这些要素就是局中人、策略和支付，以下来逐一介绍。

（一）局中人

一场竞争（称为一局对策）的参加者，称为局中人。如例1.1中的公司Ⅰ和公司Ⅱ、例1.2中的机关与大自然、例1.3中的B上校和他的敌人，都是局中人。显然，局中人理所当然的是对策论的基本要素，因为如果没有参加者，就不会出现竞争或斗争现象，因此也就没有对策现象。但要注意的是局中人通常指的是有决策权的参加者，而不是既无决策权且与结局无关的人。局中人也不能只理解为一个人，他可以广义地理解为利害一致的集团、公司、球队等。局中人还可以视为自然界，如气候、病虫害、自然环境等等。

对策现象依局中人的多少而分为一人对策、二人对策、多人（n人，$n \geqslant 3$）对策。所谓n人对策并非指这种对策现象恰好有n个人参加，而是按照利害冲突，一切参加者都必须被分在n个互斥的集体里（每个人只能属于一个集体）。每个集体都具有共同的利益，而不同的集体利害关系不同。于是，这n个利害不一致的集体即可看作n个局中人。如玩桥牌，虽然有四个人参加，但因南北两方利益一致，应视为一个局中人，东西两方也视为一个局中人。因此桥牌属于二人对策。

考虑到一人对策即为通常意义下的最大化问题，因此，不管这个人进行选择的方案为有限个或无限个，都可以用初等数学或微积分等工具来解决。因此，对策论只考虑二人以上对策。

（二）策略

局中人在一局对策中为对付对方而采取的一个可行的、自始至终通盘筹划的行动方案，称为策略。策略也可以理解为局中人在一场竞争中所采取的一个从头到尾的全部完整的计划方案。由

此可见，一个策略并非局中人在一场竞争中的某一步行动方案，或每步临时作出的决定。如在二人对策的象棋比赛中，甲方采用"当头炮"就不能称为这是甲方的一个策略，因为它只是甲方策略中的一个组成部份，我们把它叫做一个"着"，而一个策略则可能包含着有限个"着"。在一局对策中，局中人的一个策略有时要分成几个阶段去完成，我们把这种阶段叫做局中人的"步"。局中人的一个策略只能为有限步，而每一步只允许包含有限个着。局中人的策略的全体称为这个局中人的策略集。当然，在一局对策中，每个局中人的整个行动方案也可以只取一步，且一步中只取一着，如在例 1.1 中局中人Ⅰ（公司Ⅰ）的策略有三个。它们分别是（1）改进包装，（2）加强广告宣传，（3）适当削价。若分别用代码 1，2，3 来表示，则局中人Ⅰ（公司Ⅰ）的策略集为{1，2，3}，类似地局中人Ⅱ（公司Ⅱ）的策略集为{1，2，3}。此外，对策现象按照局中人策略的个数还可分为：有限对策与无限对策，其中各局中人的策略均只有有限个（或策略集为有限元集）的对策称为有限对策，而局中人的策略有无限个（或策略集为无限元集）的对策称为无限对策。如例 1.1 和例1.2 中每个局中人的策略集均为有限元集故为有限对策，但在经济领域中由价格竞争所出现的对策现象，因为出台的价格多种多样，所以作为策略可以有无限多个，即局中人的策略集为无限元集，因而此种对策现象为无限对策。

我们把每个局中人的策略集中各取一个策略所组成的策略组称为一个"局势"。如例 1.1 中一局对策的局势有 9 个，它们分别是（1，1），（1，2），（1，3），（2，1），（2，2），（2，3），（3，1），（3，2），（3，3）。

（三）支付

一局对策结束后，局中人所获得的结果，称为支付（又称得失，赢得）。对于每个局中人来说，可以是按照某种确定的竞争

规则得了多少或失了多少，也可以是胜利了或失败了，也可以是收入多少（赢了）或支出多少（输了）等等。一局对策结束时每个局中人的支付显然是每个局中人策略的函数，也就是局势的函数。因此，也可以把支付称为支付函数。支付函数可用$A(x, y)$来表示，如例1.1中$A(1, 2)=1$表示在一局对策中，当局中人Ⅰ采用策略1，同时局中人Ⅱ采用策略2时，局中人Ⅰ所得到的销售增长额为1%；$A(3, 3)=-2$表示在一局对策中，当局中人Ⅰ采取策略3，同时局中人Ⅱ采取策略3时，局中人Ⅰ的销售减少额为2%。如果在任一局势中所有局中人支付相加总是零，则称这种对策为零和对策，否则称为非零和对策。经济领域中的对策现象有不少是非零和的，这是因为一个经济过程总是要增加（或减少）财富。

§1.2 矩阵对策

矩阵对策又称二人零和有限对策。这种对策模型虽然是简单的，但它确是非常重要的，因为一些复杂的对策模型都可转化为矩阵对策来求解。

由上述定义可知矩阵对策的局中人只有两个，我们分别用P_1、P_2来表示，每个局中人都只有有限个策略可供选择（为了和后面的概念区别，我们把这里的策略称为纯策略）。设P_1的纯策略有m个，用$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_m$来表示，$P_2$的纯策略有$n$个，用$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_j, \cdots, \beta_n$来表示。我们用$S_1$表示局中人$P_1$的策略集，$S_2$表示局中人$P_2$的策略集，则

$$S_1=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i, \cdots, \alpha_m\}$$

$$S_2=\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_j, \cdots, \beta_n\}$$

由于对策是零和的，因此在一局对策结束时，局中一人的收入必等于局中另一人的支出。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com