水波引论

陶明德 编著

复旦大学出版社

水 波 引 论

陶明德 编著

复 旦 大 学 出 版 社

责任校对　马金宝

水　波　引　论
陶明德　编著
复旦大学出版社出版
（上海国权路579号）
新华书店上海发行所发行　复旦大学印刷厂印刷
开本 850×1168　1/32　印张 11.125　字数 321,000
1990年11月第1版　1990年11月第1次印刷
印数 1—1,000
ISBN 7-309-00512-0/O·77
定价：9.85元

前　言

波动现象是自然界最普遍的现象之一，波的概念已经渗透到许多学科中，在工程中波动理论也得到了广泛的应用。近年来，还有人尝试把大城市中交通阻塞作为一个波动问题来研究。因此，可以说几乎所有科学和工程领域都涉及到波动的某些问题。尽管波动问题所涉及的领域不同，但是描述波动现象的方法却是相同的，因此，如果熟悉了某一问题中的波动现象后很容易去考察另一个波动问题，这也是波动理论所具有的一个特点。

在空间的某点上某一物理量在平衡状态受到扰动后，该扰动以确定的速度向四周传播的这种现象称为**波**。因为用肉眼就能考察水的波动，所以水波是人们最为熟悉的一种波，从而很早就被作为研究的对象。例如，我国的钱塘潮由于它的壮观，所以约在二千多年前古人就作了许多精采的描绘；同时鉴于涌潮的破坏性，古人也曾采取了不少防灾措施。他们都对钱塘潮作了大量的观测和研究。

1984 年编者曾编过一本《水波讲义》，作为大学生选修课和硕士研究生专业课的教材。根据几年来的教学实践，在上述讲义的基础上，现在编著的这一本《水波引论》充实和加深了原有的内容。但本书仍是一本具有入门性质的书，以叙述水波的基础知识为主。有些波动现象不使用细致的数学推理是不容易搞清楚的。为了弄清一些波动现象的本质，本书从描述水波的方程着手，通过数学的方法来求出波动问题的精确解或近似解，再从所得的解来阐明水波的特征。本书的目的主要有两个：一是使读者了解产生水波的机理和能够解释一些有关的波动现象，二是使读者初步掌握水波的数学处理方法。作为一本教材，首先应该便于教学，故对内容作了一些选择，使得难度恰当，叙述尽量完整。由于波动问题的共性和波动现象的典型性，因此本书对从事其他波动研究的读者肯定也会有所裨益。

在撰写过程中，编者主要参考了文圣常、余宙文的《海浪理论和计算原理》，梅强中的《水波动力学》，易家训的 Stratified Flow、Stoker 的 Water Waves 和 Whitham 的 Linear and Nonlinear Waves。由于编者能力有限以及时间仓促，谬误之处在所难免，恳请读者赐教。

吴正同志与编者作过不少有益的讨论，复旦大学出版社范仁梅同志对书稿也提出了不少有益的意见，在此谨致谢意。

编　　者

于复旦大学 1989 年 12 月

目　　录

第一章 小振幅波理论

把水波问题的解用渐近级数展开，一级近似的解即为**小振幅波**。小振幅波的振幅和速度都是小量，其压力由静水压力和动压力组成。本章除了讨论简谐变化的周期解外，还考察了自由面受到初始扰动后而产生的不定常运动。最后，我们还讨论了水波的绕射和折射等现象，这些现象在任何波动中都是会产生的。

§1-1 水波问题

水波是一种用肉眼就能观察到的波，而且由于水波的千姿百态，因此很早就引起了人们的注意。例如，具有敏锐观察力的达·芬奇就观察过由物体撞击水面而造成的水波，虽然他并未理解其机理，但他认为波动是可以叠加的。我国古代诗人也注意到风能产生水波。曾写道："风乍起，吹皱一池春水"。当然这仅是许多文字记载中的两个例子。

水波是一种典型的自然现象。我们知道，物体产生振动需要恢复力，要产生水波也必须有使水质点因受扰动而离开平衡位置后再回到原位置的力。当这个力是表面张力时，它所造成的波就称为**涟漪**，或者称为**毛细波**；当这个力是重力时，它所造成的波就称为**重力波**。另外，这种恢复力也可以是旋转系统中的 Coriolis 力，也可以是宇宙中太阳和月亮的引力。外力可以改变波动参数的值，但是各种波动现象还是具有许多相同之处的。

由于在水波问题中还有一个自由面（空气与水的界面）问题，而且自由面在波动过程中不断变化，因此，自由面这一边界不能预先给定，其位置是一个未知函数，只有在问题解决以后才能确定；这就是所谓的**不定边界问题**。除此而外，在自由面边界上通常还带有非线性边

界条件，这些正是处理水波问题的困难所在。因此，我们在归结水波问题时就要作些假定和简化，在求解问题时还需要作进一步的假定和简化。从数学上来说，由于处理一般的非线性问题是很困难的，因此，在使用水波问题的精确关系式来求解具体波动这一方面，以前在很长的一段时间内几乎没有取得什么进展。但近年来，在浅水中有限振幅波的研究方面却取得了一系列成果。在解的存在性方面，虽然人们仅证明了在均匀水深时二维有限振幅周期行波的存在性以及在均匀水深条件下二维孤立波的存在性，但这并不妨碍我们去求解各种各样的水波问题。

如图 1-1 所示，假定在初始时流体处于静止状态，并充满了空间
R

R：$-h(x,z)\leqslant y\leqslant 0,\ -\infty<x,z<\infty$ 当 $t=0$ 时在自由面上的某

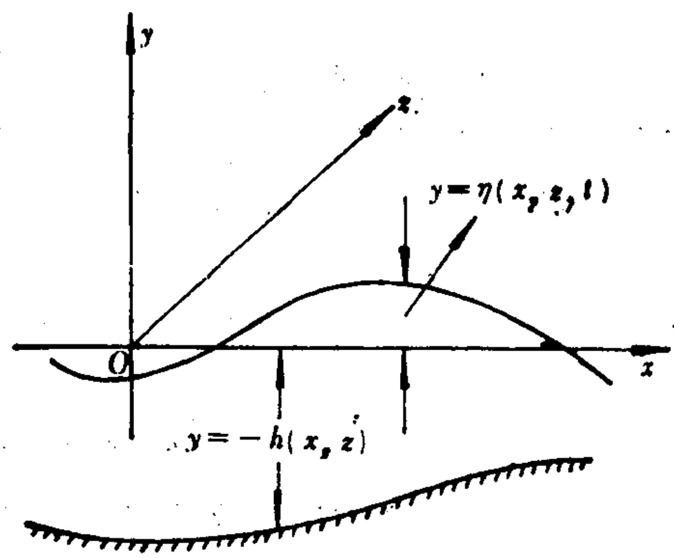

图 1-1

一区域 D 中产生了一个扰动（例如一阵风），要求确定 $t>0$ 以后流体的运动，同时，还要确定自由面的形状 $y=\eta(x,z,t)$。

一般来说可假定流体是理想和正压的，作用在流体上的体力是有势的，而且流体从静止开始运动，那么根据Helmholtz 定理可知流体的运动是无旋的。设流体的速度矢量为 $\boldsymbol{V}$，由于无旋，则有 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}=0$，因此，存在着速度势 φ，使得 $\boldsymbol{V}=\mathrm{grad}\,\varphi$。通常我们还假定流体是不可压缩的，即 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{V}=0$。所以，最后有 $\mathrm{div\,grad}\,\mathrm{d}\varphi=0$，亦即

$$\nabla^2\varphi=0 \qquad (\text{在 } R \text{ 中}) \tag{1.1}$$

其中算子$\nabla^2=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2$。

底部$y=-h(x,z)$上的**边界条件**是：速度的法向分量为零，即

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0 \tag{1.2}$$

自由面上的**运动学条件**是：自由面上的流体质点永远在自由面上。下面我们用 Lagrange 方法来推导这个条件。设$F(x,y,z,t)=0$为自由面方程，自由面上某质点P的坐标为

$$x=f(a,b,c,t)$$
$$y=g(a,b,c,t)$$
$$z=h(a,b,c,t)$$

其中a，b，c为$t=0$时该质点的直角坐标，我们来考察质点P的运动。根据运动学条件可知点P的坐标恒满足自由面方程，即

$$F(f(a,b,c,t),\ g(a,b,c,t),\ h(a,b,c,t),t)\equiv 0$$

所以有

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=0$$

即

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial F}{\partial t}=0$$

在现在的情况中，$F(x,y,z,t)=\eta(x,z,t)-y$，将该式代入上式后就有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\eta}{\partial t}=0 \tag{1.3}$$

(1.3)式就是自由面上的运动学条件。为了进一步了解(1.3)式的含义，我们来考察二维的情况。在二维情况中，上式简化为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} \tag{1.4}$$

如图 1-2 所示，质点P在垂直方向上的速度$\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$应该包括两个部分：

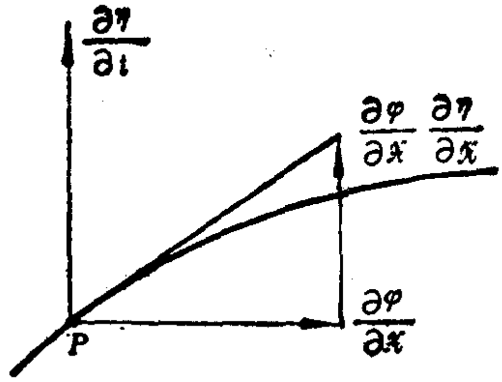

图 1-2

一部分是因为点 P 在自由面上，故随着自由面的升降而获得速度 $\partial\eta/\partial t$；另一部分是因为点 P 只能沿着自由面运动，故水平方向的速度 $\partial\varphi/\partial x$ 必须使点 P 获得一个垂直方向的速度 $\partial\varphi/\partial x\cdot\partial\eta/\partial x$。这两个部分分别为 (1.4) 式右边的前后两项。

自由面上的**动力学条件**是：自由面上的压力为常数(大气压)。因此，根据 Bernoulli 定理有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2+g\eta=0 \tag{1.5}$$

其中常数 $c(t)$ 已经吸收到 φ 中去了。在无穷远处，即当 $x\to\pm\infty$，$z\to\pm\infty$ 时，还要求 φ 和 η 保持有限值，或者它们的函数值及其导数值都要趋于零，这要视问题的性质而定。

水波问题的**初始条件**要求在初始时给定自由面的形状和速度场，初始条件以后将根据具体问题另行给出。

在上述定解条件下，原则上我们可以求得未知函数 φ 和 η，但从 (1.3) 和 (1.5) 两式可知这两个关系式关于未知函数都是非线性的，而且都在不定边界 $y=\eta(x,z,t)$ 上成立，这就使求解十分困难。为此，我们采用一种近似处理的方法——小振幅波理论来讨论水波问题。在用这种方法处理问题时，总是先把 φ 和 η 分别展开成某一小参数 e 的渐近级数

$$\varphi=e\varphi^{(1)}(x,y,z,t)+e^2\varphi^{(2)}(x,y,z,t)+\cdots \tag{1.6}$$

和

$$\eta=\epsilon\eta^{(1)}(x,z,t)+\epsilon^2\eta^{(2)}(x,z,t)+\cdots \tag{1.7}$$

将(1.6)式代入(1.1)式和(1.2)式后，比较等式两边 ϵ^k 的系数，得

$$\nabla^2\varphi^{(k)}=0 \tag{1.8}$$

和

$$\frac{\partial\varphi^{(k)}}{\partial n}=0 \tag{1.9}$$

再将(1.6)和(1.7)两式代入(1.5)式，并把 $\varphi^{(k)}(x,y,z,t)$ 及其偏导数都在 $y=0$ 处展开，则有

$$\begin{aligned}&\varphi^{(k)}(x,y,z,t)\big|_{y=\eta(x,z,t)}\\&=\varphi^{(k)}(x,o,z,t)+\frac{\partial\varphi^{(k)}(x,o,z,t)}{\partial y}\eta\\&+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi^{(k)}(x,o,z,t)}{\partial y^2}\eta^2+\cdots\end{aligned}$$

相应地偏导数也有类似的展开式。然后再比较等式两边 ϵ^k 的系数，得

$$\epsilon^1: \quad g\eta^{(1)}+\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial t}=0 \tag{1.10a}$$

$$\begin{aligned}\epsilon^2: \quad g\eta^{(2)}+\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial t}&=-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial z}\right)^2\right]\\&-\eta^{(1)}\frac{\partial^2\varphi^{(1)}}{\partial t\partial y}\end{aligned} \tag{1.10b}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\epsilon^n: \quad g\eta^{(n)}+\frac{\partial\varphi^{(n)}}{\partial t}=F^{(n-1)} \tag{1.10c}$$

注意在 $y=0$ 上已成立(1.10)式了，其中记号 $F^{(n-1)}$ 表示 $\eta^{(k)}$ 和 $\varphi^{(k)}$ $(k\leqslant n-1)$ 的某一函数组合。最后，将(1.6)和(1.7)两式代入(1.3)式，按照推导(1.10)式的方法，可得

$$\epsilon^1 \qquad \frac{\partial\eta^{(1)}}{\partial t}=\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial y} \tag{1.11a}$$

$$\epsilon^2 \qquad \frac{\partial\eta^{(2)}}{\partial t}=\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial y}-\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial x}\frac{\partial\eta^{(1)}}{\partial x}-\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial z}\frac{\partial\eta^{(1)}}{\partial z}$$

$$+\eta^{(1)}\frac{\partial^2\varphi^{(1)}}{\partial y^2} \tag{1.11 b}$$

$\vdots \qquad \vdots$

$$\epsilon^n: \qquad \frac{\partial\eta^{(n)}}{\partial t}=\frac{\partial\varphi^{(n)}}{\partial y}+G^{(n-1)} \tag{1.11 c}$$

注意在 $y=0$ 上已成立(1.11) 式，其中记号 $G^{(n-1)}$ 也表示 $\eta^{(k)}$ 和 $\varphi^{(k)}$ ($k\leqslant n-1$) 的某一函数组合。由此可见，上述处理方法是将速度势在水平的静止位置附近展开的方法，利用得到的这些式子，原则上可逐次计算级数(1.6)和 (1.7) 中的各项。当然我们要假定这些级数是收敛的。

下面我们来考察一种近似方法,即**小振幅波理论**。如果级数(1.6)和(1.7)只取一阶项,就是说 $\varphi=\epsilon\varphi^{(1)}$ 和 $\eta=\epsilon\eta^{(1)}$。这时，方程(1.8)和底部条件(1.9)就化为

$$\nabla^2\varphi=0 \qquad (-h(x,z)<y<0) \tag{1.12}$$

和

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0 \qquad (y=-h(x,z)) \tag{1.13}$$

自由面上的边界条件(1.10 a)和(1.11 a)就分别化为

$$g\eta+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0 \qquad (y=0) \tag{1.14}$$

和

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=\frac{\partial\varphi}{\partial y} \qquad (y=0) \tag{1.15}$$

把上述两个条件在消去 η 后组合起来就可得到 Cauchy-Poisson 条件

$$g\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0 \tag{1.16}$$

用上面的几个式子确定了速度势 φ 后，就可以求得一阶近似下的压力 p。假定自由面处的压力为零,根据 Bernoulli 方程可知水中某点的压力为

$$\frac{p}{\rho}=-gy-\frac{\partial\varphi}{\partial t} \tag{1.17}$$

由此可见，上式右边的第一项表示流体的静压力，而第二项则表示由波动引起的动压力。

由于把自由面上的边界条件取为一阶近似，故问题得到了很大的简化。这样做不仅使整个问题变为线性问题，同时也使不定边界问题转化为固定边界问题。因此，从数学观点来看，小振幅波理论只是位势理论中典型的边值问题，处理起来当然就非常简单了。

§1-2 行波和驻波

为简单起见，这里我们只考虑二维的情形。假定各物理量沿z轴是不变的，而且底部是水平直线(图1-3)。那么，速度势φ满足

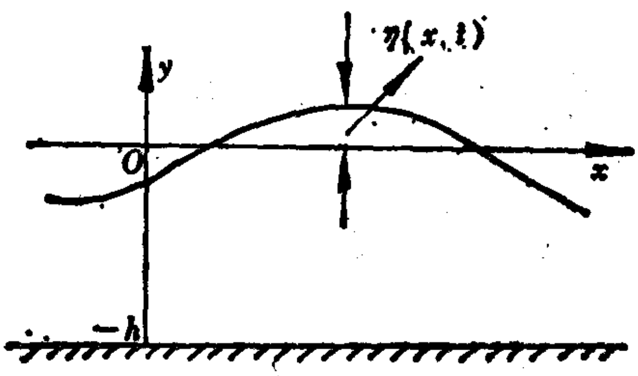

图 1-3

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0 \tag{2.1}$$

在自由面 $y=0$上，有

$$g\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0 \tag{2.2}$$

在底部$y=-h$上，有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \tag{2.3}$$

在由上面三个式子求得φ后，可再分别由(1.14)和(1.17)两式求得自

由面的形状和压力。

暂时我们不考虑初始条件，而是先找出边值问题的周期解，以便能对波的性质和一些重要参数有所了解。然后，把这些周期解叠加起来，就可以得到满足初始条件的水波问题的解(见§1-6)。

由于上述方程和边界条件都是线性和齐次的，故可采用分离变量的方法来求解。首先设

$$\varphi(x,y,t)=\varphi_1(x,y)\,\mathrm{e}^{-i\omega t} \tag{2.4}$$

当然，所需的结果应取 φ 的实部或虚部，这是一种随时间简谐变化的周期解，其中 ω 为波动频率，周期 $T=2\pi/\omega$。把 φ 代入(2.1)～(2.3)各式可得

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}=0 \tag{2.5}$$

$$g\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}-\omega^2\varphi_1=0 \qquad (y=0) \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=0 \qquad (y=-h) \tag{2.7}$$

如再设

$$\varphi_1=X(x)\varphi_2(y)$$

则由(2.5)式可得

$$-\frac{X''}{X}=\frac{\varphi_2''}{\varphi_2}=k^2$$

常数取成正数 k^2 是为了保证在 x 方向具有波动特征。由上式得到关于 X 的方程为

$$X''+k^2X=0$$

这是一个最简单的 Helmholtz 方程，其解为 e^{ikx}。如果从物理观点来看，只能在 x 方向引起波动，故也可直接设

$$\varphi_1=\varphi_2(y)\,\mathrm{e}^{ikx} \tag{2.8}$$

其中 k 为波动波数，波长 λ 为 $\lambda=2\pi/k$。这样，关于 φ_2 的方程和边界条件就化为

$$\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}-k^2\varphi_2=0$$