差分格式理论导引

〔苏联〕C. K. 戈杜诺夫　B. C. 李亚宾基 著

上海科学技术出版社

差分格式理論导引

〔苏联〕 C. K. 戈杜諾夫
B. C. 李亚宾基 著

馮果忱 康立山 周广声 譯
李 荣 华 校

上海科学技术出版社

内容提要

本书从简单的差分格式例子出发，引入差分格式理論的基本概念，并对逼近，稳定等概念作了較为深入的討論.

书的引論和第一、二两章可作为訓练計算人員参考.

附录 I～V 是若干专题論述，可供进一步深入学习之用.

附录 VI 是作者在原书出版后发表的文章，是本书的补充和发展. 中譯本中选为附录，供讀者参考.

本书适用于大学生，高等院校教师和計算数学工作者閱讀.

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

С. К. Годунов, В. С. Рябенький

Физматгиз · 1962

差分格式理論导引

馮果忱 康立山 周广声 譯 李荣华 校

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路 450 号）

上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

洪兴印刷厂印刷 新华书店上海发行所发行

开本 850×1156 1/32 印張 9 16/32 排版字数 252,000

1966 年 7 月第 1 版 1966 年 7 月第 1 次印刷

印数 1—2,000

統一书号 13119·707 定价（科六）1.40 元

序　言

按照我們的意見，这本书应当用作初步了解差分格式理論的基本概念的，它可以供解微分方程問題的計算数学工作者以及大学三年級与高年級的学生閱讀．引論与前两章是为水平略低些的讀者写的，这一部分也可以用作培养計算員的讲义❶．

书中所有理論的闡述都是通过对例題的分析来实現的，这些例題都是所研究現象的最簡单模型．因此，不能认为，讀过本书之后讀者就有了解决差分格式中所产生的基本問題的办法了，我們只是尽力确切地提出問題．然而，在构造这些模型以及研究这些模型时，我們避免作过份的簡化，因为这样作会使所考慮的現象庸俗化；相反地，我們試图对一些基本困难給予特別注意，并且詳細的研究这些困难．

也不要认为讀这本书很容易，不动一动手固然也可以讀这本书，但是不会得到很大好处的．开始，一些演算都作得很詳細，但是在后面这种詳細程度就逐漸減少，我們认为讀者在閱讀本书的过程中其分析技巧也在逐漸提高．

书中整个內容的編排，尽可能地避免各部分之間繁瑣的引証以及过份地引証文献．固然每一章都是在它前面的材料的基础上展开的，但是这些材料并不需要詳細地記住，因为凡是用到的东西常常是要提一提的．希望了解一些文献或者問題的历史的讀者，可以参看书末的文献索引，一般的，那里所指的文献是不要求熟悉的．

現在簡要地介紹一下各章內容．

---

❶ 为了了解第一章，只要知道高等数学的一些基本概念，如极限，微商，微分方程等概念即可，这里并不需要任何微分方程理論．这些概念可以从技术学校的課本中查到．

第一章闡述了一維差分方程理論的基本知識，这些知識在后面常常要用到．在論述了常系数差分方程的解析方法之后再利用它，是企图使这些方法不至于过份抽象．这里利用这些方法用以进一步导出逼近和稳定性概念的一些基本事实．

在第二章給出了逼近和稳定的精确定义，并且說明了它們的作用，这些材料都是利用最簡单的常微分方程的例子来加以說明的．这一章在本书中起輔助作用，它是为讀者研究偏微分方程差分格式的基本概念作准备的．因此，这里并不企图求全，甚至最常用的格式，如阿达姆斯(Adams)格式，斯透梅尔(Störmer)格式及龙格-庫塔(Runge-Kutta)格式都沒有考慮．在文献中逼近和稳定概念有很多不同形式，我們这里选用了其中一种形式(与[35]中研究的类似)，并且全书中一直采用这种形式．希望这样能够更清楚地說明选擇定义的一切方便与不方便之处．我們希望讀者从这里能引起对常用术語的定义的注意．

作为引論的发展的第一、二两章，在某种意义上可看成是一个完整的部分．看来，对一定范圍的讀者来說，只讀本书的这一部分也是有益的．

从第三章起，开始叙述基本材料——偏微分方程的差分格式理論．由于逼近和稳定的术語在这一章已經不是第一次出現了，因此就使得我們在这里不必把重点放在这些定义本身，而可以把重点放在这些定义用于偏微分方程时所产生的一些特殊問題上．

在第四章中，我們要讀者注意，构造出逼近的而且稳定的差分格式，并沒有最終完成計算方法的整个計划，而还需要解出所得到的方程．这里利用热傳导方程差分格式的最簡单例子指出了所产生的困难，并且也指出了克服这些困难的途徑．

实质上差分格式理論基本概念的綜述到第四章就結束了．

最后两章是討論研究差分格式稳定性的方法，这些差分格式都是用来解不定常过程的方程式的．有很多文献研究这些方法，我們所选的看来是最常用的处理方法．但是，这里企图使論述更为严格，这就使得我們不能利用富里埃方法，而代之以使用差分算

子的譜論初步. 在第六章讲述了盖尔芳德(Гельфанд И. М.)与巴宾柯(Бабенко К. И.)所提出的研究稳定性的方法. 在选择論述方法时我們曾向什諾利(Шноль И. Э.)請教,他要我們注意殆固有函数(почти-собственная функция). 把盖尔芳德-巴宾柯的方法与什諾利的看法加以比較就导出了算子序列譜的概念,整个第六章就是使用这个很初等的概念論述的. 当然,还应当指出,我們所采用的方法只能得出很粗糙的稳定性必要条件,然而,殆固有函数概念不要費太大的劲就能用在变系数情形,我們覺得这是非常重要的.

第五章具有輔助性质,这一章中說明了,把边值問題的稳定性归結为某个算子冪的范数估計(第六章討論这个估計本身)并不是特别容易的. 在§3中討論的是最复杂的例子.

写最后两章对我們来說是最困难的. 看来这两章的論述还可以作原則性的改进,但是为了不使这本书再拖延下去,我們对这两章沒有进一步作些工作[1]. 第五、六两章的新材料对一些专家們大概会有兴趣的,我們期待着他們的建議与意見能够帮助我們进一步改进这里的論述.

在結束語中討論了几个例子,这些例子說明,书中的材料如何用来分析更复杂問題的数值方法. 此外,在結束語中还再一次提醒讀者注意逼近及稳定性概念的某种任意性.

本书作者之一是盖尔芳德应用分析討論班的参加者. 在这个討論班中曾詳細地探討了差分格式理論的各种問題,这些問題在后来彼此的談話中也常常討論. 书中所闡述的一些观点是在討論班以及后来的討論中形成的. 在选擇这些材料并把它系統化时,我們尽量借助于一些最簡单的例子把这些观点反映出来. 因为我們考虑到本书是作为这門学科导引的.

为了在某种程度上弥补所介紹的材料的不完善,我們决定安

---

[1] 在本书出版之后,作者們又对第六章所述內容作了进一步研究,并发表了若干文章. 为便于讀者参考,我們将其基本工作之一作为附录(即附录VI)列于书末. 該文也列出了与之有关的其他文献. ——譯者注

排一些附录. 另外, 讀一讀这些附录也可使讀者学会怎样研究杂志中有关差分格式的文献,因此,譬如我們并沒企图使这些附录都采用一样的逼近与稳定定义,正如我們指出的,在文献中还缺乏这种統一.

前两个附录是盖尔芳德与洛庫齐也夫斯基 (Локуциевский О. В.) 的两篇手稿, 他們殷切地提供給我們使用. 其中第一篇还是在 1952 年春写成的, 这篇文章中討論了热傳导方程的差分格式. 这里第一次指出, 解差分方程的迭代法不能认为是满意的. 因此就产生了寻求某种新方法的尝試, 这样也就发明了追赶法. 这个方法就在第二个附录中加以論述. 这个附录是 1953～1954 年在討論班上一些报告的提綱,这里只作了些不多的編輯修改.

我們把拉克斯 (Lax P. D.) 关于差分格式的能量积分作为第三个附录. 这篇文章指出了把第三章所叙述的方法用到更复杂情形的途徑. 这篇文章的翻譯工作是根据我們的請求由勃魯什林斯基(Брушлинский К. В.)完成的.

第四与第五个附录討論了差分格式理論中一些新的并且我們认为是很重要的問題. 这两篇文章是巴赫瓦洛夫(Бахвалов Н. С.)与克雷洛夫(Крылов В. Ю.)专为本书而写的.

我們十分感激盖尔芳德,巴宾柯,洛庫齐也夫斯基以及討論班的其他一些参加者,由于多次討論促使形成了我們的看法,并且他們还把一些沒有发表的材料供我們使用. 巴赫瓦洛夫也給我們很大帮助,第四章的写法就是他提出的.

在本书編写的过程中曾多次向謝緬佳耶夫(Семендяев К. А.)請教,他仔細的閱讀了初稿,并且在材料的选擇及編輯方面都对我們有所帮助.

丘多夫(Чудов Л. А.)与費利波夫(Филиппов А. Ф.)仔細地閱讀了全部手稿, 他們的意見对我們有很大帮助. 我們曾按书中的材料讲过两次課, 第一次是在 1959 年, 第二次在 1960～1961 年. 听众的意見对我們也是很有益的.

我們向所有帮助过我們的同志表示感謝.

目　录

序　言
引　論……………………………………………………… 1
第一章　簡单的例子………………………………………… 4
§1. 最簡单的差分方程，差分方程阶的概念，用特解表示通解……… 4
§2. 一阶差分方程的解……………………………………… 9
§3. 二阶差分方程的解……………………………………13
§4. 差分方程解收斂于微分方程解的研究，精确度阶的概念与逼近概念……………………………………………20
§5. 不能用于求微分方程近似解的差分格式的例子，不稳定性……27
第二章　逼近与稳定性……………………………………31
§1. 逼近概念的严格表述…………………………………31
§2. 初始条件逼近……………………………………38
§3. 稳定性定义．由逼近及稳定性推收斂性的定理……………46
§4. 最簡单差分格式稳定性的研究…………………………48
§5. 近似計算时的稳定性、逼近和舍入誤差…………………61
§6. 稳定性估計中的系数值对于差分格式适用性的影响……………62
§7. 几点注記……………………………………………66
第三章　偏微分方程差分格式的逼近概念与稳定性概念………71
§1. 微分方程的逼近……………………………………71
§2. 差分格式的构造及逼近概念的精确化…………………81
§3. 边界条件的逼近……………………………………95
§4. 稳定性定义．由逼近及稳定性推出收斂性的定理 ……………104
§5. 就最簡单情形研究差分方程的稳定性 ……………………108
§6. 用差分法証明微分方程解的存在性的程序 …………………120
第四章　差分方程的解法 ……………………………………133
§1. 問題的提出 ………………………………………133
§2. 差分方程組的状态（обусловленность） ……………………139

§3. 追赶法(метод прогонки) ……143
第五章 稳定性作为某算子幂的有界性 ……153
§1. 差分方程解的分层 ……153
§2. 将差分方程写为 $u^{m+1}=R_h u^m+\tau\rho^m$ 的形式. 稳定性作为算子 R_h 的幂的范数的一致有界性 ……157
§3. 研究稳定性时差分方程特解的利用 ……169
第六章 差分算子的譜論初步 ……184
§1. 算子族的譜的定义. 算子 R_h 的幂的有界性的必要条件 ……184
§2. 計算譜的算法 ……189
§3. 計算譜的例子 ……203
結束語 ……212
若干文献索引 ……220
参考文献 ……225
附 录 ……228
I. 解抛物方程的差分格式(蓋尔芳德,洛庫齐也夫斯基) ……228
II. 解差分方程的"追赶"法(蓋尔芳德,洛庫齐也夫斯基) ……235
III. 能量法对差分方程的应用(拉克斯) ……258
IV. 求問題近似解时所必需的計算量估計(巴赫瓦洛夫) ……262
V. 抛物方程的差分格式与連續积分(克雷洛夫) ……273
VI. 非自共軛差分方程边值問題稳定性的譜判别法(戈杜諾夫,李亚宾基) ……282

引　論

近代物理的大量应用問題和理論問題可以归結为微分方程．然而，列出这些微分方程之后，不能认为問題就已經最終解决了，还必須解这些方程．

所謂"解微分方程"，可以理解为两种完全不同的方法．

其中第一个方法是求出通过初等函数表达解的公式．例如，方程 $u''+a^2u=0$ 的通解是 $u=A\sin ax+B\cos ax$．如果我們要解更复杂一些的方程 $u''+\frac{1}{x}u'+u=0$，那么，我們就不能用初等函数表达它的解．而且已經証明，用初等函数表达这个方程的解是不可能的．因为这种方程常常会遇到，所以人們认为有必要把它的解归入所謂特殊函数里，这种特殊函数补充了初等函数类．这样，在数学中就出現了貝塞尔(Bessel)函数，这种函数是形如

$$u''+\frac{1}{x}u'+\left(1-\frac{p^2}{x^2}\right)u=0$$

的方程的解．这样做的結果，把解可以表成显形式的微分方程类扩大了．例如，方程 $u''+xu=0$ 的解不能用普通初等函数表示，但可借助于方程

$$u''+\frac{1}{x}u'+\left[1-\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{x^2}\right]u=0$$

的解表示出来．于是引进了类似于貝塞尔函数的很多别的特殊函数，这些函数都和某一种常微分方程的解有关．这些函数的引进反过来又要求对它們进行定性的研究，并且造出詳細的函数表．

然而，即使有了这些函数也不能包括所有可能遇到的常微分方程的各式各样的解．在偏微分方程里，情况更复杂．因此寻求解的明显表达式并不能就认为是解方程的正規方法．

由此也不能說这个方法就完全沒有价值了，它仍旧是定性地研究方程的解以及研究模型問題的有力而必需的工具. 但是，除解析方法外，最常見的还是数值求解的方法. 由于快速电子計算机的出現，这种方法的应用变得更容易了. 我們就是要研究用差分法求微分方程数值解的理論.

今以方程 $u'+Au=0$ 作为簡单例子来說明这个方法的实质. 用差商 $\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}$ 近似代替微商 $u'(x)$. 量 h 叫做差分格式的步长，它应当选得充分小. 这样代替之后，我們得到近似于微分方程的差分方程 $\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}+Au(x)=0$，这个方程可以改写成递推公式的形式：$u(x+h)=(1-Ah)u(x)$.

假定我們要求滿足初始条件 $u(0)=1$ 的解. 根据递推公式計算值 $u(h)$, $u(2h)$, $u(3h)$ 等等：

$$
\begin{aligned}
u(h) &= 1-Ah,\\
u(2h) &= (1-Ah)^2,\\
u(3h) &= (1-Ah)^3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
u(nh) &= (1-Ah)^n.
\end{aligned}
$$

取 $h=\dfrac{1}{n}$，代替精确解 $u(1)=e^{-A}$，我們得到 $u=\left(1-\dfrac{A}{n}\right)^n$. 然而，正象大家在数学分析教程中所熟知的，当 h 充分小，或者說，当 n 充分大时，$\left(1-\dfrac{A}{n}\right)^n$ 将与 e^{-A} 相差很小. 这就証明了当步长变小时，由此差分方程所得到的近似解收斂于微分方程的精确解. 如果用差商 $\dfrac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}$ 代替微商 u'，我們得到这个方程的另一个差分格式 $\dfrac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}+Au(x)=0$. 这个格式可以改写成下列递推公式的形式：

$$u(x+h)=u(x-h)-2Ahu(x).$$

对于解微分方程的差分法来說，处理变系数方程也沒有困难.

譬如，我們要解方程 $u'+A(x)u=0$，其中 A 是 x 的函数，那么只要利用差分格式 $\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+A(x)u(x)=0$ 就可以做到．造非綫性微分方程的差分格式也是容易的，例如方程 $u'+\sin(xu)=0$，可以用格式

$$\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\sin[xu(x)]=0$$

近似地解出．

从我們討論的例子可能产生这样一种印象，即构造差分格式以及用它解方程是非常簡单的．这种印象是不正确的．

即使在最簡单的情形，甚至对常系数綫性方程，也常常会出現下述情况：一个很合理的差分格式所給出的近似解，当步长变小时不收斂于所期望的极限．

还会发生一些别的不愉快的事情．每一个从事微分方程数值解研究的数学家，应当知道这些隐藏在差分方法中的暗礁，并且应該善于繞过它們．

我們将研究差分格式理論中的基本概念，并将尽可能利用最簡单的常系数微分方程的格式作为例子来說明这些概念．

第一章　簡单的例子

§1. 最簡单的差分方程，差分方程阶的概念，用特解表示通解

在这一节里，我們将研究最簡单的微分方程 $u'+Au=f(x)$；$u''+Au'+Bu=f(x)$ 的若干最簡单的差分格式，这里将假定系数 A 与 B 均为常数.

在引論中我們已經指出过怎样构造方程 $u'+Au=0$ 的差分格式. 这只要将 u' 近似地用差商

$$\frac{u(x+h)-u(x)}{h} \quad \text{或} \quad \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}$$

代替就可以了. 对于二阶方程，差分格式可以类似地构造. 例如，用表达式

$$\frac{\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}-\dfrac{u(x)-u(x-h)}{h}}{h} = \frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}$$

近似地代替微商 u''. 这样代替之后，我們得到了联系未知函数在几个邻近点上值的方程式，这种点把 x 軸分割成长度为 h 的一些小段. 下面就是我們这里討論的微分方程的差分格式的例子.

I. 一阶微分方程

$$u'+Au=f(x),$$

其差分格式为：

1) $\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}+Au(x)=f(x)$，或者换一种写法：

$$-\frac{1-Ah}{h}u(x)+\frac{1}{h}u(x+h)=f(x).$$

2) $\dfrac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}+Au(x)=f(x)$，或者换一种写法：

$$-\frac{1}{2h}u(x-h)+Au(x)+\frac{1}{2h}u(x+h)=f(x).$$

II．二阶微分方程

$$u''+Au'+Bu=f(x),$$

其差分格式为

$$\frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}$$
$$+A\frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}+Bu(x)=f(x),$$

或者换一种写法：

$$\frac{1}{h^2}\left(1-\frac{Ah}{2}\right)u(x-h)-\frac{1}{h^2}(2-Bh^2)u(x)$$
$$+\frac{1}{h^2}\left(1+\frac{Ah}{2}\right)u(x+h)=f(x).$$

这里所討論的差分格式属于下列两种形式之一：

$$au(x)+bu(x+h)=f(x),$$
$$au(x-h)+bu(x)+cu(x+h)=f(x).$$

系数 a, b 与 c 为常数，即它們与 x 无关．如果把那些将 x 軸分为长度为 h 的綫段的点列由左到右編号，使得 $x_n=x_{n-1}+h$，幷且用 u_n 表示 $u(x_n)$，f_n 表示 $f(x_n)$，那么，我們可以把上述差分格式改写成为下列方程：

$$au_n+bu_{n+1}=f_n, \tag{1}$$

$$au_{n-1}+bu_n+cu_{n+1}=f_n. \tag{2}$$

这种类型的方程叫做差分方程．

在这一节以及本章的第二、三节，我們就研究差分方程(1)与(2)，而且在这几节里，我們将不考虑这些方程是否是某一微分方程的差分格式．

在方程(1)与(2)中，未知数 u_k 組成一个序列 $\{u_k\}$：$\cdots u_{-3}$, u_{-2}, u_{-1}, u_0, u_1, u_2, u_3, $\cdots$，我們常常把这个序列与用数字$\cdots$，

$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$ 編号的点列相互对应，或者按一般說法，把它們与网格点相互对应. 由于暂不考虑差分方程与微分方程的联系，因此不必假定二相邻点之間的距离为 h，我們可以取为任意数，例如取成1. 称 u_k 为网格函数在第 k 号点上的值，换句話說，u 是整数变量 k 的函数.

我們說所研究的方程是常系数方程，是强調这些系数与編号 n 无关❶. 我們将只考虑这样的方程 $au_n+bu_{n+1}=f_n$，它的系数 a 与 b 均不为零. 在方程 $au_{n-1}+bu_n+cu_{n+1}=f_n$ 中，将假定系数 a 与 c 不等于零.

数列 $\{f_n\}$ 称为所考察方程的右端.

如果假定序列 $\{u_n\}$ 定义在所有整数点 $n(-\infty<n<\infty)$ 上，而对此序列不作任何进一步限制，那么，容易驗証方程(1)与(2)的解是不唯一的. 例如，方程 $qu_n-u_{n+1}=0$ 即以 $u_k=0$ 为其解，又以 $u_k=q^k$ 为其解.

为了得到方程 $au_n+bu_{n+1}=f_n$ 的唯一解，只要給定 u 在某一整数点 m 上的值，即給定 u_m 就够了. 事实上，这个方程可以写成递推公式的形式：

$$u_{n+1}=\frac{1}{b}(f_n-au_n),$$

由此公式即可逐次定出 $u_{n+1}, u_{n+2}, \cdots$，亦即所有 $k>m$ 时 u_k 的值.

如果把方程写成为另一种递推公式的形式：

$$u_{n-1}=\frac{1}{a}(f_n-bu_n),$$

那么我們可以用同样方法确定所有 $k<m$ 的 u_k 值.

为了得到方程

$$au_{n-1}+bu_n+cu_{n+1}=f_n$$

的唯一解，可以給定 u 在相邻二整数点上的值(例如給定 u_{m-1}, u_m). 只要注意所論方程可以写成如下的递推公式：

❶ 变系数方程的例子：$u_{n-1}-\alpha nu_n+u_{n+1}=0$.

$$u_{n+1}=\frac{1}{c}(f_n-bu_n-au_{n-1}),$$

$$u_{n-1}=\frac{1}{a}(f_n-b_nu_n-cu_{n+1}),$$

由此立刻可得上述論断的証明.

再重复一下所得到的結果，并且叙述差分方程阶的概念.

为得到方程

$$au_n+bu_{n+1}=f_n$$

的唯一解，只要給定 u 在一个点上的值就够了，这样的方程叫做一阶方程. 为得到方程

$$au_{n-1}+bu_n+cu_{n+1}=f_n$$

的唯一解，需要給出 u 在相邻两点上的值，这种方程叫做二阶方程.

也还可以考虑一个十分簡单的方程 $au_n=f_n$. 不必对 $\{u_n\}$ 加任何条件，此方程的解即可唯一确定，这样的方程自然叫做零阶方程.

一阶微分方程 $u'+Au=f$ 的最簡单差分格式 I.1

$$-\frac{1-Ah}{h}u(x)+\frac{1}{h}u(x+h)=f(x)$$

是一阶差分方程. 二阶微分方程 $u''+Au'+Bu=f$ 的差分格式 II

$$\frac{1}{h^2}\left(1-\frac{Ah}{2}\right)u(x-h)-\frac{2-Bh^2}{h^2}u(x)$$

$$+\frac{1}{h^2}\left(1+\frac{Ah}{2}\right)u(x+h)=f(x)$$

的阶为 2. 例如：一阶方程 $u'+Au=f$ 的差分格式 I.2

$$-\frac{1}{h}u(x-h)+Au(x)+\frac{1}{h}u(x+h)=f(x)$$

表明，針对微分方程所造出的差分方程的阶可以高于原微分方程的阶. 在所討論的例子中，微分方程是一阶的，而差分方程是二阶的.

現在我們来描述所研究的差分方程解的結构.

假定我們已經知道了方程 $au_n+bu_{n+1}=f_n$ 的某两个解，今用 $u_n^{(1)}$ 与 $u_n^{(2)}$ 表示它們. 在等式

$$au_n^{(1)}+bu_{n+1}^{(1)}=f_n,$$
$$au_n^{(2)}+bu_{n+1}^{(2)}=f_n$$

中由一个等式减去另一个等式，我們看到差 $u_n^{(1)}-u_n^{(2)}=\bar{u}_n$ 满足齐次方程

$$a\bar{u}_n+b\bar{u}_{n+1}=0$$

(差分方程右端 $f_n=0$ 时，称此差分方程为齐次的).

用 Z_n 表示齐次方程 $aZ_n+bZ_{n+1}=0$ 并满足条件 $Z_0=1$ 的解. 显然，对于任意 α, $\bar{Z}_n=\alpha Z_n$ 均为齐次方程的解. 不难証明上述齐次方程的任意解都可表成这种形式. 事实上，每一个解由它在 $n=0$ 处的值唯一确定，因此，如果两个解 $Z_n^{(1)}$ 与 $Z_n^{(2)}$ 在 $n=0$ 处的值彼此相等，那么对任意 n 它們也彼此相等. 而等式 $\bar{u}_0=\bar{Z}_0=\alpha Z_0$ 总可以适当选取常数 α 达到. 这样，我們証明了方程

$$au_n+bu_{n+1}=f_n \tag{1}$$

的通解可以表示为

$$u_n=u_n^{(1)}+\alpha Z_n,$$

其中 $u_n^{(1)}$ 为方程(1)的特解，而 Z_n 为齐次方程 $aZ_n+bZ_{n+1}=0$ 并满足条件 $Z_0=1$ 的解.

对于要研究的二阶方程，利用完全同样的討論可以証明类似的論断，这种討論我們就不进行了(讀者不难自己建立)，而只叙述其最后的結論.

方程

$$au_{n-1}+bu_n+cu_{n+1}=f_n \tag{2}$$

的通解可以表示为

$$u_n=u_n^{(1)}+\alpha Y_n+\beta Z_n$$

的形式，其中 $u_n^{(1)}$ 为方程(2)的某一特解，而 Y_n 与 Z_n 为齐次方程

$$aY_{n-1}+bY_n+cY_{n+1}=0,$$
$$aZ_{n-1}+bZ_n+cZ_{n+1}=0,$$