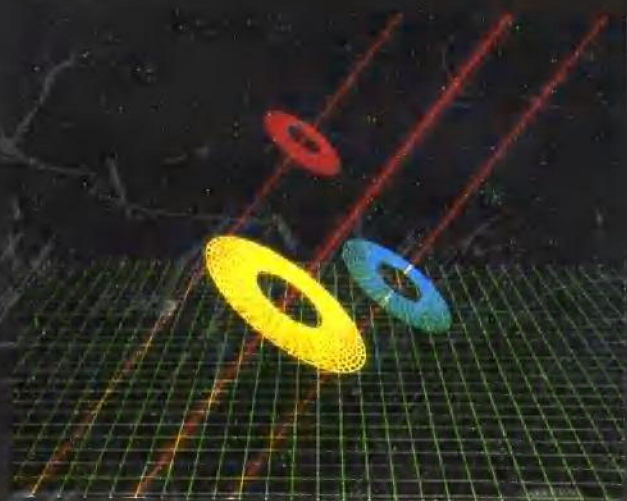


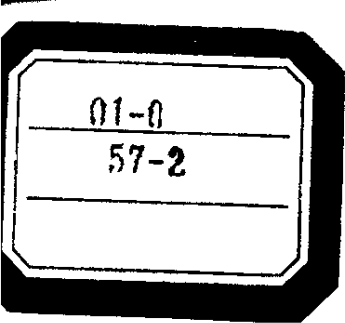
数 学 教 育 研 究 丛 书

数学 习题理论

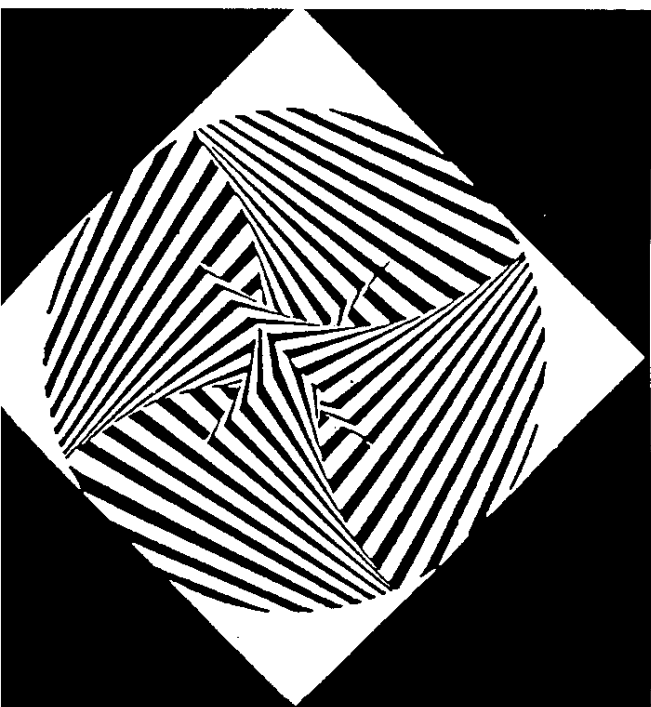
SHUXUE
XITI
LILUN



SXJY



1723935



数 学 教 育 研 究 丛 书

数学 习题理论

戴再平 著

上海教育出版社



B1024110

数学教育研究丛书

数学习题理论

戴再平 著

上海教育出版社出版发行

(上海永福路 123 号)

(邮政编码:200031)

各地新华书店经销 上海市印刷十二厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 8.75 插页 4 字数 203,000

1991 年 4 月第 1 版

1996 年 10 月第 2 版 1996 年 10 月第 3 次印刷

印数 5,701—9,350 本

ISBN 7-5320-4792-X/G · 4762 定价:(软精)11.50 元

2011/31/16

出版说明

数学是一门工具学科，这早已人所共知。然而随着社会的变革和科技的进步，特别是计算机的诞生，人们对数学的认识也在起变化，对数学教学目标的含义也起了观念上的变化。近五六十年以来，各国数学家都非常有兴趣地研究数学教育。随着改革开放和文化交流，近十多年来，我国数学家也在这股洪流中荡漾、遨游，目前正形成一支规模不小的研究队伍。在这支队伍中，有师范院校的教授，也有综合、理工科大学的教授；有数理系的教授，也有哲学系的教授；有大学教师，也有中小学教师；……他们分别在不同的岗位上和不同的领域里实践，认识，再实践，再认识，反复地深入研究。一个共同的心声，就是研究中国数学教育的特色，总结中国的数学教育理论，形成中国的数学教育学。为此，我们跟随了这股激荡的洪流去索取数学教育家研究的最新成果，编辑、出版这套《数学教育研究丛书》。目前该丛书已被国家新闻出版署列为八五规划的重点书目。

在此，我们对各位编著者所付出的辛勤劳动和编委会对这项工作的热情支持表示衷心的感谢。

一九九三年十二月

再 版 序

本书初版于1991年3月，再版本纳入《数学教育研究丛书》。再版的主要变化是第一章增添“问题解决是数学教育的核心”一节，又新增第八章“数学开放题”。笔者有可能作这样的修订，是因为近五年来我国数学教育界普遍认同“问题解决”这一国际上深得人心的提法，虽然至今它尚未见于我国教育行政部门的文件及群众团体的正式决议，但是我们毕竟已有了这方面的初步实践，如加强数学应用能力的培养与数学开放题的教学。鉴于理论工作的历史责任，笔者希望本书再版的问世，将会有助于我国数学教育改革的开展。

戴 再 平

1995年2月

初 版 自 序

对习题的广泛而深入的研究是当代中国数学教育的一大特色,但人们的注意力似乎集中于解法方面.其实对于一个数学教师来说,从数学习题的功能、结构、方法等理论问题上深入探讨,乃是提高素质和职业技能的更为重要的方面,即使是解法,掌握高层次的解题策略也比掌握低层次的具体解法意义更大.笔者深感,在我国丰富的解题实践基础上,对数学习题的有关理论问题进行反思,通过归纳、分析、批判等方法,形成系统的学问,这不仅是提高数学教师的理论水平和实践能力的迫切要求,也是数学教育理论从一般教育理论中分离出来,形成独立的科学体系的一种历史的必然.

本书反映了笔者自1982年以来就数学习题理论方面所进行的研究工作,这些工作的不尽的源泉是我国60万中学数学教师的辛勤劳动.本书的主要内容曾在浙江教育学院经过五年的教学实践的检验.笔者要特别感谢浙江教育学院对形成和出版本书的一贯的鼓励和支持.必须提到的是,本书第三章第四节是笔者与时承权副教授共同研究的成果;对于第五章的内容,章建雄副教授曾提供了不少精辟的见解和有益的建议.至于本书所引用的众多的成果,我们就恕难对有关的作者一一致谢了.

数学习题理论是一个新的概念,这个概念的内涵和外延目前尚未得到国内外专家的探讨,笔者深知目前所建立的理论框架是初步的,不完善的,但是形势的需要迫使我们不得不先作抛砖之

举。“始生之物，其形必丑。”我们热切地期待着同行和专家的斧正。

戴 再 平

1989年5月

目 录

第一章 引论	1
第一节 建立数学习题理论的必要性	1
第二节 问题是数学的心脏	4
第三节 问题解决是数学教育的核心	8
第二章 数学习题的分类与功能	18
第一节 数学习题的分类	19
第二节 数学习题的功能	29
第三章 数学习题的科学性	35
第一节 有关的概念必须是被定义的	36
第二节 有关的记号必须是被阐明的	38
第三节 条件必须是充分的、不矛盾的	40
第四节 恒等式与条件等式中的条件不足问题	50
第五节 条件必须是独立的、最少的	54
第六节 叙述必须是清楚的	61
第七节 要求必须是可行的	63
第四章 数学习题的编制	66
第一节 演绎法	68
第二节 基本量法	71
第三节 倒推法	78
第四节 变换条件法	84
第五节 类比与推广	92

目 录

第六节 演变	97
第七节 模型法	107
第五章 数学习题的解题策略	114
第一节 解题策略的概念和发现过程	115
第二节 枚举法	123
第三节 模式识别	125
第四节 问题转化	128
第五节 中途点法	133
第六节 以退求进	138
第七节 推进到一般	144
第八节 从整体看问题	147
第九节 正难则反	150
第十节 解题策略的可训练性	156
第六章 数学解题错误的分析	162
第一节 知识性错误	164
第二节 逻辑性错误	168
第三节 策略性错误	175
第四节 心理性错误	180
第五节 潜在假设	185
第六节 数学习题的检验	193
第七章 数学选择题	202
第一节 结构和类型	202
第二节 解法	210
第三节 编制	222
第四节 可靠性和评分标准	228
第八章 数学开放题	233
第一节 形式和特点	234

目 录

第二节 教学设计.....	240
第三节 编制.....	249
参考书目.....	268

第一章 引 论

数学习题理论是关于研究数学习题的功能、结构、方法等规律性知识的学问。

第一节 建立数学习题理论的必要性

数学, 由于它具有广泛的应用价值、卓越的智力价值和深刻的文化价值, 因此, 在世界各国的基础教育中均占有特殊重要的地位。在中学的数学学科中, 主导的内容不是那些正在发展中的现代数学分支, 而是人类文化宝库中业已形成的数学思想、知识和方法。数学教育活动中, “解题”是最基本的活动形式。无论是学生的数学概念的形成、数学命题的掌握、数学方法和技能技巧的获得, 还是学生智力的培养和发展, 都必须通过“解题”。同时, “解题”也是评价学生的知识和发展水平的主要手段。现代的中学数学课本都无例外地配置大量的例题和习题。蔡上鹤认为: “教科书是由正文、例题和习题三部分有机组成的。”^[1]余元庆说过: “习题是中学数学课本中的重要组成部分。习题配备得好不好, 直接影响到学生学习质量的高低。许多优秀中学数学教师的教学质量所以高, 一部分原因也是由于习题选择和处理得恰当。”^[2]当代最著

[1] 《课程教材研究十年》, 人民教育出版社, 1993 年。

[2] 《谈谈习题的配备与处理——介绍几本外国中学数学课本中的习题配备》, 《数学通报》, 1980 年第 3 期。

名的数学教育家波利亚 (G. Polya) 强调指出: “中学数学教学首要任务就是加强解题训练.” (1961 年) 因此, 在某些情况下, 解题训练的需要甚至决定了课程和课本内容的取舍. 如欧几里得 (Euclid) 几何, 虽然在科学发展上它是古老的, 但是由于它的智力价值, 能够提供不同难易程度的智力训练的题目, 因此尽管近百余年以来, 从英国的大数学家西尔维斯特 (J. J. Sylvester)、法国布尔巴基学派的创始人之一迪多内 (J. A. Dieudonné) 到中国一些数学家, 都曾经主张在中学数学课程中摒弃欧几里得几何, 但是迄今为止, 我们仍然尚未找到理想的代替物. 欧几里得几何在目前我国的中学数学课程中依旧占有其重要的位置.

我国中学数学界普遍重视解题, 特别近十余年来, 在高考制度的引导下, 解题方法的研究成果相当可观, 其中相当一部分已初具理论形态, 不少学者和教师已经从解法分类深入到解题策略和思维过程的探求. 数学习题的一般理论, 如数学习题科学性、数学习题的编制、数学习题的错误分析、数学习题的评价、客观性习题的研究等也有一定的发展. 尤其是 80 年代以来, 国际上出现的“问题解决”的热潮更推动了数学习题理论的发展, 在我国也开始着手进行关于数学知识应用和数学开放型题的研究. 但是我们必须看到, 也有相当一部分中学数学教师沉缅于解题之中, 忘记了“解答数学的习题本身不是目的, 而只是一种训练手段” (J. M. 弗里德曼), 他们不是把解题看成是培养学生创造能力的机会, 而是要求死记硬背各种套路和模式, 把学生训练成对习题作出“快速反应”的解题机器, 这种情况其危害性正如柯朗 (R. Courant) 所说: “数学的教学, 逐渐流于无意义的单纯的演算习题的训练, 固然, 这可以发展形式演算的能力, 但却无助于提高独立思考的能力.” 我们甚至可以说, 不能正确地对待解题, 将学生的手脚束缚在题海之中, 这是当前中学数学教学中亟待解决的问题.

再让我们来看几件事:

1. 目前我国三十种以上的以中学数学教育为主要内容的报刊、杂志中,数学习题文章所占的比例最大.1980年,根据张友余编的《中国中等数学文摘》(陕西科学技术出版社,1983年)辑录的当年中学数学教育文献共2140条,到1985年,仅据28种中学数学专业期刊统计,发表的文章就有3625篇,如果加上其他散见于各种报刊、杂志、书籍之中的文章,则不下5000篇,又根据对1991年我国三种有代表性的中学数学杂志——《数学通讯》(湖北省数学学会等主办),《中学数学研究》(华南师范大学数学系主办),《中学数学》(江苏省数学会等主办)——所刊登的665篇文章的统计,其中有关解题的文章共546篇,占全部文章的82.1%.在这大量的文献中有哪些数学习题理论方面的成果?有哪些数学习题的资料经过整理可以上升到理论?目前这类文章为数不多.

2. 在地区性甚至全国性的刊物、书籍和试题中不断出现错题,屡批不绝;在不应出现陈题的场合,如数学竞赛试题、高考和中考试题中的灵活题,多次出现陈题.这些现象与其说是有关人员的疏忽,还不如说是有关人员缺少评价数学习题科学性的理论和编制数学习题理论的指导.

3. 有识之士对我国数学教育应加强“问题解决”的呼吁已提了多年,在国外,对于数学课堂中应更多地进行没有固定答案的题目的研讨的趋势越来越强,为什么数学教师对于加强“问题解决”的呼吁的反响总是显得微弱?数学开放型题为什么难以进入课堂?

4. 人们都认识到,解题是数学教师的基本功,但是目前在高等师范院校的课程中,在教师的岗位培训中,却缺乏对这种基本功的系统训练,教师只能从零散的解题实践中,逐渐地积累和形成,一旦在教学中需要对教材作创造性的处理,需要对学生进行指导

时,便感到自身理论上的不足.

从上述情况来看,对数学习题的功能、结构、方法等理论问题进行反思,通过归纳、分析、实验等方法,形成系统的数学习题理论,这不仅是提高数学教师的理论水平和实践能力的迫切需要,也是数学教育理论从一般教育理论中分离出来,形成独立的科学体系的一种历史必然.

我国的数学教育要顺应历史潮流的发展,要迎接现实生活的挑战,就必须建立从本国国情出发的数学教育理论,而数学教育理论要成为一门独立的科学,就必须从本身的特点和实践经验出发,运用现代教学论、现代认知心理学、思维科学、系统科学等现代科学成果,通过科学的概括和整理,才能真正达到一种系统的、规律的、理性的认识.本书就是从“数学习题”这个领域,就有关的理论问题作出简要的叙述.

第二节 问题是数学的心脏

数学界曾经接受美国数学家哈尔莫斯(P. R. Halmos)的下述说法:数学究竟是由什么组成的?是公理?定理?证明?概念?定义?理论?公式?诚然,没有这些组成部分,数学就不存在,这些都是数学的组成部分.但是,它们中的任何一个都不是数学的心脏,这个观点是站得住脚的,数学家存在的主要理由就是解题.因此,数学的真正的组成部分是问题和解.

什么是问题?问题是认识主体想要弄清楚或力图说明的东西,也就是主体所要解决的疑难.它是客观世界的矛盾在思维过程中的反映,人们常常用困惑、焦虑等词对问题加以诠释.问题的形成是主体对客观世界矛盾的主动积极的反映.问题表明我们对一定世界的“无知”,但仅仅是这种“无知”还构不成问题,只有当它

被主体所自觉,进入思维活动,即当我们意识到了无知,也就是以思维的方式主动反映矛盾时,才会有问题产生。所以,问题一经产生,就意味着主体愿意花费劳动,愿意通过自己的努力来消除由于焦虑而引起的思维紧张的压力,即获得问题的解决。当代日本哲学家岩奇允胤和物理学家宫原将平说:“问题是基于一定的科学知识的完成、积累,为解决某种未知而提出的任务。”我国学者何毕灿把人的各种智能过程,特别是思维过程,都形式地等效成一个“问题求解”过程,并对“问题”作出以下定义:“它表示某个给定过程的当前状态与我们所要求的目标状态之间存在着某种差异。问题求解就是想消除这个差异。”^[1]

按系统论的观点,若 S 代表某个主体, R 代表某个抽象的或具体的系统的集合,则系统 (S, R) 中集合 R 称之为题系统。如果主体接触 R 后,认为其全部元素、性质及关系都是他知道的,就称 R 为稳定系统;否则便称为问题系统。问题系统以 R_0 表示。当要求某个主体从 R 中确定他所不了解的元素、性质和关系时,集合 R 对该主体就变成了题。解题就是将问题系统 R_0 转变为稳定系统。

数学,人们一直把它看成是研究客观世界的数量关系和空间形式的科学,然而,当近三百年来计算技术和科技应用的迅速发展极大地促进了数学与科学的互相繁荣,人们目睹大量的前所未有的新方法、新理论和模型产生之后,数学家更多地倾向于把数学看成是和自然科学一样的经验科学。如著名的日本数学家小平邦彦就说过:“数学也以自然现象为对象。”不过数学是在抽象方法的特定层次上,通过“相对独立的量化模式的建构”来研究客观世界的,所谓“数学即是关于量化模式的建构与研究”(徐利治、郑毓信,1993年)。美国数学家斯梯恩(L. A. Steen)更明确提出数学是

[1] 孙选中《浅释“问题”》,《百科知识》,1991年第1期。

“模式的科学”(Science of Patterns), 他认为: 1687 年, 牛顿(I. Newton)《数学原理》一书的出版是把数学建立为理论科学的方法论的范例. 牛顿从他那个时代所积累的天文数据中发现了模式, 他的理论就是一种模式的科学——源于数据、演绎推导、观察证实. 本着对数学的上述的理解, 我们说, 当人们与客观世界产生接触, 从抽象的量化的角度建立模式的过程中反映出认识与客观世界的矛盾时, 就形成了数学问题. 换言之, 以数学为内容, 或者虽不以数学为内容, 但必须运用数学概念、理论或方法才能解决的问题称为数学问题.

从历史上看, 成书于公元 1 世纪前后的我国辉煌数学文献《九章算术》就是一本问题集, 其中收集的方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程、勾股九类共 246 个问题几乎反映了当时社会生活的各个方面的实际问题, 记载了世界上最先进的分数四则、比例算法及线性方程组的解法. 我国南宋数学家秦九韶所著《数书九章》是又一部百科全书式的问题集, 他将 81 个问题分成九类, 其中包括对贾宪的“增乘开方法”(高次方程数值解法)的发展这样一些创造性的工作. 在西方, 成书于公元前 3 世纪的欧几里得《原本》已把要求作出图形的命题和要求证明的命题分开, 并开创了里程碑式的公理化工作. 在分析《九章算术》和《原本》这两部东西辉映的古代数学代表作时, 吴文俊指出: “我国的古代数学基本上遵循了一条从生产实践中提炼出数学问题, 经过分析综合, 形成概念方法, 并上升到理论阶段, 精炼成极少数一般性原理, 进一步应用于多种多样的不同问题. 从问题而不是从公理出发, 以解决问题而不是以推理论证为主旨, 这与西方之以欧几里得几何为代表的所谓演绎体系旨趣迥异, 途径亦殊.”^[1] 数学, 在演绎和算

[1] 李继闵《〈九章算术〉及其刘徽注研究》, 陕西人民出版社, 1990 年, 吴文俊序言.

法这两种倾向交替地取得主导地位的发展过程中,积累了丰富的解题知识.通过中外数学家如刘徽、秦九韶、李善兰、笛卡儿(R. Descartes)、牛顿、莱布尼茨(G. W. Leibniz)、欧拉(L. Euler)、高斯(O. F. Gauss)等人的工作,我们可以看到对解题的思维策略的探讨始终是数学发展中的一条线索.欧拉应用了从有限过渡到无限,从代数方程过渡到三角方程的方法,求得了雅各·贝努利(Jakob Bernoulli)没能解决的级数的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

迄今仍为人们所推崇,被认为是运用类比推理的典范.笛卡儿在创立了解析几何之后,进一步设想过一个包罗万象的解题方案:将任何种类的问题化归为数学问题;将任何数学问题化归为代数问题;将任何代数问题化归为方程求解.虽然笛卡儿这种可适用于各种各样问题的万灵的解题方法只能是一个古老的哲学梦想,而且永远也只能是一种梦想,但它仍不失为一个伟大的设想,它对于数学发展的影响远比那些偶然成功的小设想要深刻得多.

1900年,伟大的数学家希尔伯特(D. Hilbert)在巴黎国际数学家代表会上以“数学问题”为题发表讲演,他说道:“只要一门科学分支能提出大量的问题,它就充满着生命力;而问题缺乏则预示着独立发展的衰亡或中止.正如人类的每项事业都追求着确定的目标一样,数学研究也需要自己的问题.正是通过这些问题的解决,研究者锻炼其钢铁意志,发现新方法和新观点,达到更为广阔和自由的境界.”如果我们看到,人们为了解决诸如费马(Fermat)大定理、希尔伯特二十三个问题、庞加莱(H. Poincaré)的“三体问题”,以及由于计算机的出现摆在数学家面前的大量的应用问题对数学发展的推动,就可以清楚地认识到,本节开头所提到的哈尔莫斯的话是相当正确的.