最优过程理论及其在飞行力学中的应用

李忠应　编著

北京航空航天大学出版社

最优过程理论及其在飞行力学中的应用

李忠应 编著

04

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书比较系统地介绍了动态系统的最优化过程理论。主要内容包括最优过程中的变分原理、庞特里雅金最小值原理、贝尔曼动态规划及微分对策等基本理论及其在导弹飞行力学中的应用。其中第四章专门研究各种系统数学模型、各种性能指标情况下的最优制导规律，具有文集性质，有一定的独立性。

本书可作为高等工科院校系统设计专业及工程力学专业类的研究生、本科生的教材，也可作为其它专业教师、学生的参考书；对于从事工程设计及工程力学工作的广大工程技术人员也是一本有益的参考书。

本书由浅入深，易于了解，并附有大量的例题与习题，便于自学。

最优过程理论及其在飞行力学中的应用

ZUIYOU GUOCHENG LILUN JIQI ZAI
FEIXING LIXUE ZHONGDE YINGYONG

李忠应　编著

责任编辑　郭维烈

北京航空航天大学出版社出版

新华书店总店科技发行所发行　各地新华书店经销

北京密云华都印刷厂印装

*

850×1168　1/32　印张：13　字数：349千字

1990年12月第一版　1990年12月第一次印刷　印数：1500册

ISBN 7-81012-206-1/TB·036　定价：2.95元

前　言

随着科学技术的发展，学科之间相互渗透、相互交叉，因而以往的动力学与控制理论分家的局面已经打破，这将有助于学科之间互相学习、互相促进，使科学技术得到进一步的发展。

人类在改造自然、改造社会的过程中所遇到的一切事物，严格说来都是运动的、变化的，而且是相互制约的，也就是说一切事物都是在一定的状态条件下有约束的动态过程。作为一个过程，必然存在着优劣，怎样寻找有利于事物发展的最优过程，自然成为人们所关心的问题。本书的编写目的，就是为非控制专业的研究生、本科生及有关的工程技术人员向工程控制方向的渗透，掌握寻找最优过程的基本理论及方法提供条件，这就是此书取名为《最优过程理论》的原因。它的主要内容包括：变分法、最小值原理、动态规划及微分对策的基本理论与解题方法，其中第四章专门介绍了最小值原理在飞行力学中的应用。

在本书的编写过程中参考了书末所列文献，尤其是部分章节的内容直接取材于《极值控制与极大值原理》、《拦截问题中的导引律》、《应用最优控制——最优化·估计·控制》等，在此对于作者们的辛勤劳动表示深切的谢意。

北京理工大学钱杏芳副教授对本书进行了审阅并提出了宝贵意见；门长华同志为本书绘制了全部图线。对于她们的辛勤劳动表示感谢。

由于作者水平有限，错误在所难免，希望读者批评指正。

编著者

目　录

第六章 微分对策及其应用

附 录

第一章　绪　论

§1-1　引　言

在过去的四十年里，对于线性时不变动态系统的反馈控制得到了充分的发展，积累了丰富的知识，这些知识对科学技术的发展起了重要作用，这是人所共知的。但是许多动态系统（如航空航天系统）是非线性的、或者是时变的，一般说来，线性时不变系统的分析和设计技术不能适用于这些更复杂的系统。

高速电子数字计算机的出现对处理非线性和时变系统提供了有力的工具。工程师们利用它在纸上进行大量的试探法设计来代替实验室中的研究工作。这种试探法具有一定的盲目性。在许多情况下，尤其是设计航空航天器的制导和控制系统时，需要有一个更加系统化的方法就变得更为迫切了。这导致对变分法这一古老的学科产生了新的兴趣，并取得了突破性的进展，随后最小值原理、动态规划相继问世，并得到迅速的发展及广泛的应用。

在最小值原理及动态规划的基础上最优控制理论产生了并得到迅速的发展与应用，飞行器性能的提高，导弹命中目标的高准确度以及航天飞行器的空中会合与对接等等，都是在电子技术发展的基础上应用最优控制理论的结果。

最优飞行过程问题，其实也就是飞行器的最优控制过程问题。我们只限于研究传统的飞行力学最优问题——最大速度、最大航程、最优爬升规律及各种指标下的最优制导规律等，以及由于火箭技术及航天技术的发展而产生的最优问题——如最优引入、最优轨道转移、最优拦截及最优会合等。至于技术上如何实现则已超出本书的研究范围。

最优过程理论不同于参数优化理论，后一类问题是非动态问题，其优化理论主要是利用电子数字计算机，以各种方法去进行逼近计算，找出使给定指标函数取最小（最大）值的设计参数数值的最优组合；而最优过程理论，则是要在限定条件下寻找使指标泛函取极值的控制函数，这种控制一般是状态参数的反馈控制。

最优过程理论的意义在于，它消除了某些旧有方法的经验论和局限性，并促进了在相邻领域中所获得的方法和有价值成果的交流。

最优过程理论能够解决广泛的动力学系统的优化问题，而在解决这些问题时能够考虑到对系统所附加的大多数技术性限制。近年来由于高速电子数字计算机及设备的小型化，并广泛应用于设计及过程控制，因而大大增强了最优过程理论方法的作用。

本课程主要介绍最优过程理论的数学原理，给出各种类型最优问题的数学提法，以及求解这些问题的一般方法。这些方法是以应用古典变分法、最小值原理、动态规划等为基础的。同时应用这些原理于导弹飞行力学各种优化问题的研究中。

§1-2 函数的简单最优问题

一、无约束问题

大家都知道，对于在 $-\infty<x<+\infty$ 范围内的二次连续可微函数 $y=f(x)$，要求其极值，只要对 $f(x)$ 求一次导数并令其等于零，即

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=0 \qquad (1\text{-}2.1)$$

便可求出极值点 $\bar{x}$，至于此极值是极大还是极小值，则可由二阶导数

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}$$

的正负号来定。若$\left.\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{\bar{x}}<0$，则$f(x)$在$\bar{x}$取极大值；若$\left.\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{\bar{x}}>0$，则$f(x)$在$\bar{x}$取极小值。若$\left.\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{\bar{x}}=0$，则需另加判断。

若$f(x)$只限于$a\leqslant x\leqslant b$上连续可微，在此区间上求极值的话，则除了由式(1-2.1)求出极值点$\bar{x}$外，还需将$f(\bar{x})$与$f(a)$、$f(b)$相比较，最后确定最大值（最小值）是$\bar{x}$还是某一边界点。

若f是n个变量x_1、x_2、…、x_n的函数，要确定一组使函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$取极小值的$\bar{x}_1$、$\bar{x}_2$、…、$\bar{x}_n$，同样可以将$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$对x_i，$i=1,2,\cdots,n$求偏导数令其等于零，即

$$\frac{\partial f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_i}=0 \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{1-2.2}$$

事实上若$(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n)$是极小值点必具有下述性质：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)-f(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n)\geqslant 0 \tag{1-2.3}$$

设$x_1=\bar{x}_1+\delta x_1$，δx_1为绝对值很小的量，而$x_2=\bar{x}_2,\cdots,x_n=\bar{x}_n$，若$\delta x_1>0$，则

$$\frac{f(\bar{x}_1+\delta x_1,x_2,\cdots,x_n)-f(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n)}{\delta x_1}\geqslant 0 \tag{1-2.4a}$$

若$\delta x_1<0$，则

$$\frac{f(\bar{x}_1+\delta x_1,x_2,\cdots,x_n)-f(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n)}{\delta x_1}\leqslant 0 \tag{1-2.4b}$$

当$\delta x_1\to 0$时，不等式左端趋向于$\frac{\partial f(\cdot)}{\partial x_1}$[注]在$(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n)$点所

注　$f(\cdot)=f(x_1,x_2,\vdots,x_n)$后面均同

取的值，由式(1-2.4a)可见，此偏导数不会为负值；从式(1-2.4b)又可看出，此偏导数不会为正值。要满足两个不等式必须使 $\frac{\partial f(\cdot)}{\partial x_1}=0$.同理，对于所有的$x_i$, $i=1,2,\cdots,n$，在$(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n)$点取极小值的必要条件为

$$\frac{\partial f(\cdot)}{\partial x}=0 \tag{1-2.5}$$

其中$x=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$，意即$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}=0, i=1,2,\cdots,n$，和

$$\left.\frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial x^2}\right|_{\bar{x}}\geqslant 0 \tag{1-2.6}$$

意即$\frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial x_i \partial x_j}$的$n\times n$矩阵必须是半正定的。即具有零或正的特征值。

凡满足式（1-2.5）的各点均称为驻点。

局部最小值的必要充分条件是式（1-2.5）和

$$\left.\frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial x^2}\right|_{\bar{x}}>0 \tag{1-2.7}$$

即全部特征值都必须为正。

在满足式(1-2.5)的条件下，若$\left.\frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial x^2}\right|_{\bar{x}}=0$，即矩阵行列式为零（即一个或多个特征值为零），则需要另外的信息才能确定此点是否是最小值。这样的点称为奇异点。若$f(\cdot)$是线性函数，则处处有$\frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial x^2}=0$，此时在无约束的条件下不存在最小值。

如果满足式（1-2.5），但$\left.\frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial x^2}\right|_{\bar{x}}$的特征值为一正、一

负，此时的驻点称为鞍点，是极大极小或极小极大值点。

二、具有等式约束的极值问题

上面是对于不受约束的$f(\cdot)$求其取极小值的点，若取极值的函数$f(\cdot)$其中$x_1, x_2, \cdots, x_n$还受

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \tag{1-2.8}$$

的约束，其中g为$m(m<n)$维向量函数。在此情况下怎样确定$f(\cdot)$的极值点呢？

不失一般性，为了简便只取两个变量的函数，即要求极小的函数为

$$y = f(x_1, x_2) \tag{1-2.9}$$

约束条件为

$$g(x_1, x_2) = 0 \qquad (1\text{-}2.8)'$$

用几何方法来说明问题既形象又方便。取一系列的y值，在x_1, x_2平面上画出取极值的函数式（1-2.9）的曲线族

$$f(x_1, x_2) = c_i$$

及约束条件式（1-2.8）′的曲线。

如图1.1中所示：曲线$g(x_1, x_2) = 0$与$f(x_1, x_2) = c_i$的曲线族

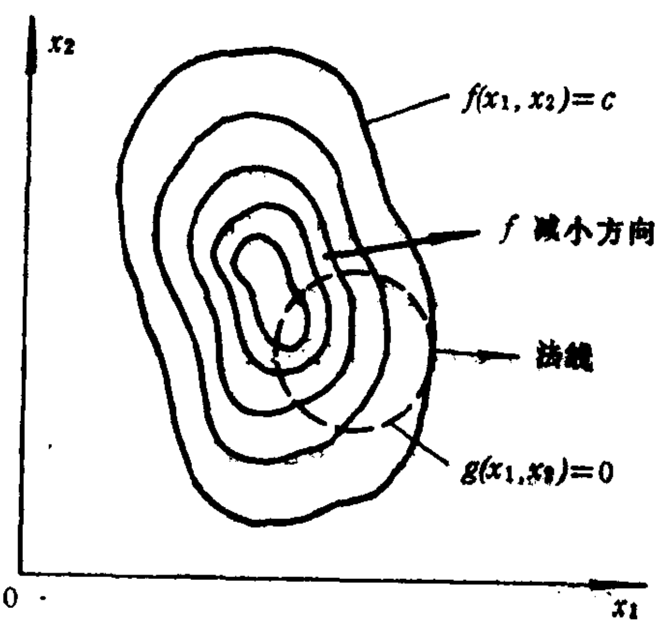

图 1.1 求极值的几何方法

相交，与其中$f(x_1,x_2)=c_i$为最小的曲线的交点即为所要求的解。若两曲线在该点附近斜率是连续变化的，则两曲线应在该点相切。即两曲线在该点有共同的切线与法线。由于曲线$g(x_1,x_2)=0$法线的方向余弦与$\dfrac{\partial g(x_1,x_2)}{\partial x_i}$成比例，而曲线$f(x_1,x_2)=c_i$的法线的方向余弦与$\dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_i}$成比例，由于两曲线在该点共法线，故取最小值的必要条件为$\dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_i}$与$\dfrac{\partial g(x_1,x_2)}{\partial x_i}$成比例。可写成

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}+\lambda\dfrac{\partial g(x_1,x_2)}{\partial x_1}=0 \\ \dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}+\lambda\dfrac{\partial g(x_1,x_2)}{\partial x_2}=0 \end{cases} \tag{1-2.10}$$

下面从数学上来证明上述结果的正确性。

设$(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$为$f(x_1,x_2)$的极小值点，将函数$f(x_1,x_2)$在$(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$的邻域内展成泰勒级数：

$$\begin{aligned} f(\bar{x}_1+\delta x_1,\bar{x}_2+\delta x_2)=f(\bar{x}_1,\bar{x}_2)+\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{(\bar{x}_1,\bar{x}_2)}\delta x_1 \\ +\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_{(\bar{x}_1,\bar{x}_2)}\delta x_2 \\ +o[\max(|\delta x_1|,|\delta x_2|)] \end{aligned}$$

因$(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$为$f(x_1,x_2)$的极小值点，故

$$\begin{aligned} & f(\bar{x}_1+\delta x_1,\bar{x}_2+\delta x_2)-f(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \\ =& \frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\bar{x}}\delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_{\bar{x}}\delta x_2+o[\max(|\delta x_1|,|\delta x_2|)]\geqslant 0 \end{aligned} \tag{1-2.11}$$

这里δx_1、δx_2不能任意选择，因为其中任意选定一个，根据约束

条件（1-2.8）′将确定另一个。因此，只能自由选择一个，例如任选δx_1，δx_2则由下式给出：

$$g(\bar{x}_1+\delta x_1,\bar{x}_2+\delta x_2)-g(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$$
$$=\left.\frac{\partial g}{\partial x_1}\right|_{\bar{x}}\delta x_1+\left.\frac{\partial g}{\partial x_2}\right|_{\bar{x}}\delta x_2+o[\max(|\delta x_1|,|\delta x_2|)]=0 \tag{1-2.12}$$

将上式乘以常数λ（称为Lagrange乘数）并与方程(1-2.11)相加得：

$$\left.\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)\right|_{\bar{x}}\delta x_1+\left.\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)\right|_{\bar{x}}\delta x_2$$
$$+o[\max(|\delta x_1|,|\delta x_2|)]\geqslant 0 \tag{1-2.13}$$

此式对任意λ都成立，但是为了方便，我们可以这样来选择λ，当$x_1=\bar{x}_1$、$x_2=\bar{x}_2$时，使不能自由变化的项（δx_2）的系数等于零，即

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x_2}=0 \tag{1-2.14}$$

这就是方程（1-2.10）的第二式。于是方程（1-2.13）成为

$$\left.\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)\right|_{\bar{x}}\delta x_1+o[\max(|\delta x_1|,|\delta x_2|)]\geqslant 0$$

由于δx_1可以任意选择，现取δx_1为

$$\delta x_1=-\varepsilon\left.\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)\right|_{\bar{x}}$$

将其代入上式得

$$-\varepsilon\left.\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)^2\right|_{\bar{x}}+o[\max(|\delta x_1|,|\delta x_2|)]\geqslant 0$$

将上式除以ε，取$\varepsilon\to 0$的极限，给出

$$\left.\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)^2\right|_{\bar{x}}\leqslant 0$$

平方项不可能是负的，因此只能是

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x_1}=0 \tag{1-2.15}$$

此即为方程（1-2.10）的第一式。由式（1-2.14）、（1-2.15）及式（1-2.8）′即可确定三个未知量$\bar{x}_1$、$\bar{x}_2$和λ。为了方便引入由下式定义的拉格朗日函数（又称为增广函数）$L(x_1,x_2,\lambda)$

$$L(x_1,x_2,\lambda)=f(x_1,x_2)+\lambda g(x_1,x_2) \tag{1-2.16}$$

于是方程（1-2.14）、（1-2.15）及（1-2.8）′可以改写为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_1}=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda\dfrac{\partial g}{\partial x_1}=0\\[2ex]\dfrac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_2}=\dfrac{\partial f}{\partial x_2}+\lambda\dfrac{\partial g}{\partial x_2}=0\\[2ex]\dfrac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial \lambda}=g(x_1,x_2)=0\end{cases} \tag{1-2.17}$$

此即为拉格朗日乘数法则。此法则可推广到n维变量的情况。

对于具有n个变量的求极值函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，在约束条件（1-2.8）下，函数$f(\cdot)$取极值的必要条件是：函数$f(\cdot)$取极值的点，是在拉格朗日函数取极值的点上（在该点上函数的所有一阶偏导数都等于零），即

$$L(\cdot)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\lambda^T g(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{1-2.18}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=0 \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{1-2.19}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}=0 \qquad j=1,2,\cdots,m \tag{1-2.20}$$

其中　$g^T=[g_1,g_2,\cdots,g_m]$，$\lambda^T=[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m]$

方程式（1-2.19）及（1-2.20）中共有$n+m$个变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$及$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，正好也是$n+m$个方程，因而可以解出极值点来。

例1　试求函数

$$f(x,y)=ax+by$$

达到最小值的点，所加约束条件为

$$g(x,y)=y-kx^2=0$$

其中 $k>0, g(x,y)=0$为一条抛物线，对$f(x,y)$的每一个给定常数$ax+by=c_i$给出一个直线，其间的关系如图1.2所示。由图可见，满足约束的$f(x,y)$的最小值在直线与抛物线的相切点。

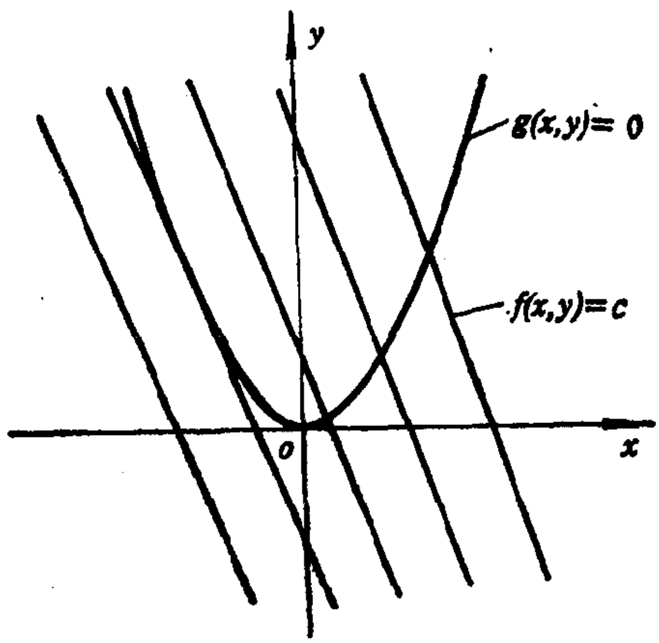

图 1.2 受约束的最小化举例

用解析法求解，其拉格朗日函数为

$$L(x,y,\lambda)=ax+by+\lambda(y-kx^2)$$

而取极值的必要条件为

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial x}=a-2k\lambda x=0$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial y}=b+\lambda=0$$

$$\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \lambda}=y-kx^2=0$$

由此可解得

$$\lambda=-b$$

$$\bar{x} = -\frac{a}{2kb}$$

$$\bar{y} = \frac{a^2}{4kb^2}$$

$(\bar{x},\bar{y})$ 点，即为$f(x,y)=c$与$g(x,y)=0$的切点。$f(x,y)$的最小值为

$$f_{\min} = -\frac{a^2}{4kb}$$

例2 求飞机定常爬高速率。当飞机作定常爬高时，作用在飞机上的力的合力为零。在图1.3所示的坐标系上力的平衡方程为

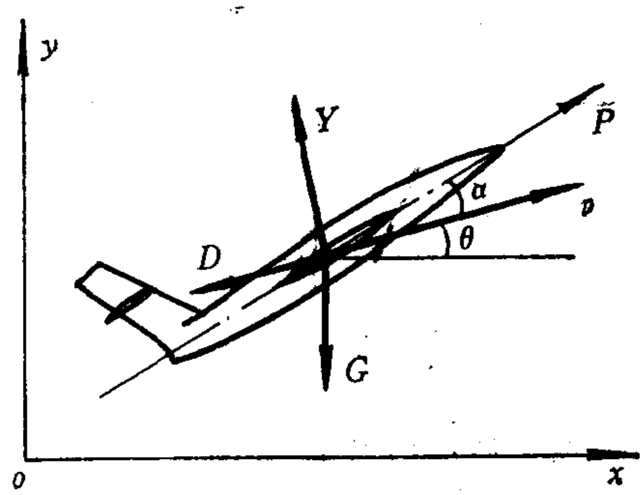

图 1.3 飞机定常爬高时力的平衡关系

$$g_1(v,\theta,\alpha) = P\cos\alpha - D - G\sin\theta = 0$$
$$g_2(v,\theta,\alpha) = P\sin\alpha + Y - G\cos\theta = 0$$

其中 $P=P(v)$为发动机推力；

$D=D(v,\alpha)$为作用在飞机上的空气阻力；

$Y=Y(v,\alpha)$为作用在飞机上的升力；

v、θ、α分别为飞行速度、航迹倾角和迎角；

G为飞机的重量。

要求爬高速率最大，即要求