成人高等学校大专教学参考书

张廷杰　陆秀媛　编

XIANXING DAISHU

线性代数
与
线性规划

YU

XIANXING GUIHUA

机械工业出版社

成人高等学校大专教学参考书

线性代数与线性规划

北京市丰台区职工大学
张廷杰 陆秀媛 编

机械工业出版社

内 容 简 介

全书共七章，内容包括行列式、向量与矩阵、线性方程组、投入产出分析、线性规划、对偶线性规划和灵敏度分析、运输问题。每章末均有习题，书后附有习题答案。

本书内容通俗易懂，逻辑严谨。适合作各类成人高等学校财经类专业大专教学用书、教学参考书或自学用书，还可供普通高等学校财经类专业师生参考。

线性代数与线性规划

北京市丰台区职工大学

张廷杰　陆秀媛　编

●

责任编辑：贾克勤

封面设计：郭景云

●

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南里一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

中国农业机械出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行・新华书店经售

●

开本 787×1092 1/32・印张 9 1/4・字数 204 千字

1989年7月北京第一版・1989年7月北京第一次印刷

印数 0,001—3,000・定价：4.40元

●

ISBN 7-111-01788-9/O・44(X)

前　言

本书是根据北京市成人教育局颁发的成人高等学校财经类专业《线性代数与线性规划》课程教学大纲编写的。

本书的编写，除注意到学科的内在系统性、逻辑性外，还尽可能结合成人学员的知识基础和在职、业余学习的特点。本书还充实了在实际经济活动中应用很广的一些内容，如投入产出分析、单纯形方法、对偶线性规划、灵敏度分析和运输问题等。考虑到这门学科理论上的严密性，对于一些比较重要的定理和公式都给予了严格的论证和推导。对于一般的理论，则只使用其结论，而略去其论证，着重分析基本概念、基本运算、基本思路和方法，论述力求深入浅出、通俗易懂。本书包括了财经类专业线性代数和线性规划的基本内容，对于学时不多的学校，可根据实际需要，略去个别章节不予讲授。

本书的初稿曾经过反复试用、修改、整理直至成书。在此过程中，得到了北京市丰台区职工大学、丰台区成人教育局和北京市成人教育局有关领导的关心和支持。中国科学技术大学研究生院数学教学部牛实为教授、北方交通大学管理科学研究所陈长荫教授仔细审阅了全部书稿，并提出了不少修改意见。杨莲子、史建奎二位同志参加了教学试用、修改讨论，提出了很多修改意见，给了很多支持和帮助。作者对他们表示衷心的感谢。

本书与《微积分讲义》、《概率论与数理统计》是一套经济应用数学教学用书，都是为了适应成人在职、业余学习而

编写的。《微积分讲义》已于1988年9月出版。

本书内容深入浅出、通俗易懂、逻辑严谨、联系实际、便于自学。适合作各类成人高等学校财经类、管理类专业大专教学用书、教学参考书或自学用书，也可作为普通高等学校和中等专业学校的教学参考书。全书共七章，第二、三、五章由张廷杰编写，第一、四、六、七章由陆秀媛编写。

本书虽经反复修改、试用，但由于作者水平所限，难免还有不少缺点错误，敬请读者批评指正。

编者

1989年3月

目 录

第一章 行 列 式

行列式是一个很重要的数学工具，不但在数学的各个分支中，而且在其它学科中都有着极为广泛的应用。特别是在线性代数中，它是一个不可缺少的工具。

本章首先讨论行列式的概念、基本性质和计算方法，然后利用行列式求解线性方程组。

§1-1 行 列 式 的 概 念

一、二阶行列式

行列式的概念是从解线性方程组的问题中引进来的。所谓线性方程组是指未知量的最高次数是一次的方程组。对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1-1}$$

可用加减消元法将它化为含有一个未知量的方程。用a_{22}乘方程组（1-1）中第一个方程，用a_{12}乘方程组（1-1）中第二个方程，然后将两式相减，得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2$$

同样，用a_{21}乘方程组（1-1）中第一个方程，用a_{11}乘方程组（1-1）中第二个方程，然后将两式相减，得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

如果$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，那么方程组（1-1）就有一组唯一解

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{1-2}$$

为了用行列式表达式（1-2），我们引入下述定义。

定义1 符号

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

称为二阶行列式，它的值为$ad-bc$。即

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

a、b、c、d 称为二阶行列式的元素。$ad-bc$也称为二阶行列式的展开式。二阶行列式含有 2 行、 2 列，横写的为行，竖写的为列。

按照这个定义，易知式（1-2）中两个分子可以分别写成

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

如果记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

于是，方程组（1-1）的唯一解式（1-2）便可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\qquad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{1-3}$$

显然，式（1-3）的分母就是方程组（1-1）中四个系数按照原来位置所排列成的行列式。在求x_1时，分子是用常数

项代替分母的行列式的第一列元素，即x_1的系数而得到的二阶行列式；在求x_2时，则用常数项代替分母的行列式的第二列元素，即x_2的系数所得到的二阶行列式。

例1 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2=9 \\ x_1+7x_2=-4 \end{cases} \tag{1-4}$$

解 由方程组（1-4）得

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}=11,\quad D_1=\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ -4 & 7 \end{vmatrix}=75$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}=-17$$

因此方程组（1-4）有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{75}{11},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{17}{11}$$

二、三阶行列式

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1-5}$$

同样可用加减消元法求解：先从前两式，再从后两式消去x_3，得到只含有x_1与x_2的两个新方程式，再从这两个新方程式消去x_2，就得到x_1。按照同样的方法，求得x_2与x_3，结果是

$$x_1=\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}}$$
$$\frac{-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}$$

$$x_2=\frac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}}$$
$$\frac{-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}}{-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}} \tag{1-6}$$

$$x_3=\frac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}}$$

当分母不为零时，式（1-6）便是方程组（1-5）的唯一解。

为了用行列式来表达式（1-6），仿照二元线性方程组的方法，我们引进了下述定义。

定义2 规定三阶行列式之值如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1-7}$$

上式右端六个项的代数和也称为三阶行列式的展开式。它可用图1-1帮助记忆：其中实线上三个元素的乘积构成的三项都取正号，虚线上三个元素的乘积构成的三项都取负号，然后相加。这种方法称为对角线法则。

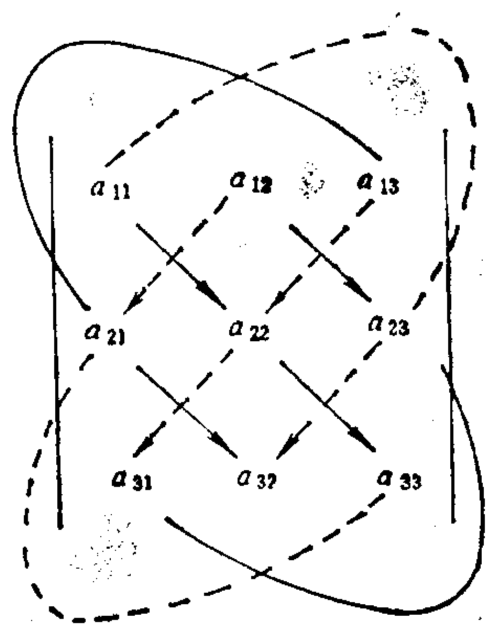

图 1-1

于是，在方程组(1-5)的解的表达式（1-6）中，分母都是行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

而分子是把行列式D中第一、二、三列分别换成常数项b_1、b_2与b_3所得到的行列式D_1、D_2、D_3。即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

因此，式（1-6)可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}, \quad x_3=\frac{D_3}{D} \tag{1-8}$$

例2 用对角线法则计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & a & b \\ c & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & a & b \\ c & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=1\times a\times(-1)+(-2)\times b\times c+1\times 2\times 0$$

$$-1\times a\times c-(-2)\times 2\times(-1)-1\times b\times 0$$

$$=-a-2bc-ac-4$$

例3 解三元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3=0 \\ 2x_1-x_2+2x_3=2 \\ x_1+x_2-x_3=1 \end{cases} \tag{1-9}$$

解 由方程组（1-9)可得

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=2, \quad D_1=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=1$$

$$D_2=\begin{vmatrix}3 & 0 & -1\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=-12,\ D_3=\begin{vmatrix}3 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-9$$

所以方程组（1-9)的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{1}{2},\ x_2=\frac{D_2}{D}=6,\ x_3=\frac{D_3}{D}=4\frac{1}{2}$$

三、n 阶行列式

前面讨论的二阶和三阶行列式的展开式有一个共性，就是每一项都是从不同的行、不同的列各取一个元素的乘积，这样尽其可能地组成所有各项，它们的代数和即为该行列式之值。因此二阶行列式恰有2!项，一项为正，一项为负；三阶行列式恰有3!项，其中三项是正的，另外三项为负的。

若将三阶行列式写成如下形式：

$$\begin{aligned}&a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}\\ &+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}\\ =&a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

则有

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}\tag{1-10}$$

式（1-10）给出了用二阶行列式来定义三阶行列式的方法。类似地，可用三阶行列式来定义四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$-a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$-a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

这样，以逐次递推的方式，用 n 个 $n-1$ 阶行列式（$n \geqslant 2$，n 是正整数）可以给出 n 阶行列式的定义。

定义3 n 阶行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$-a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+(-1)^{n+1} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} \end{vmatrix} \qquad (1\text{–}11)$$

n 阶行列式有 n 行、n 列，是由n^2个元素组成的。其中 a_{11}，a_{22}，…，a_{nn}称为主对角线上的元素，简称主对角元素。

将式（1-11）的右端继续展开下去，共有 $n!$ 项，其中 $\frac{n!}{2}$ 个是正的，另外有 $\frac{n!}{2}$ 个是负的；每一项都是 n 个不同行不同列的元素的乘积。

形如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad 与 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行列式称为三角形行列式。前者叫下三角形行列式，它的主对角线上的元素皆为零；后者叫上三角形行列式，它的主对角线下方的元素皆为零。

显然，三角形行列式之值等于其所有主对角元素之积。

例如

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 2 \times 4 = 24$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 2 \times 1 \times (-1) \times (-5) = 10$$

§1-2 行列式的性质

根据行列式的定义直接计算一个行列式是很费事的。为了简化行列式的计算，我们来研究它的一些基本性质，现仅以二阶或三阶行列式为例加以说明或验证，这些性质对于 n 阶行列式也成立。

性质1 把行列式的各行变为相应各列，其值不变。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

这一性质说明在行列式中行与列所处的地位是相同的。因此，凡是对行成立的性质，对列也成立；反过来对列成立的性质，对行也成立。

性质2 行列式某一行（或列）有公因子k，那么k可以提到行列式外面。

如对二阶行列式有

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= ka_{11}a_{22}-ka_{12}a_{21} \\ &= k\,(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}) \\ &= k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

推论 若行列式中某一行（或列）的元素都为零，则这个行列式的值为零。

性质3 如果行列式中某一行（或列）是两组数的和，则此行列式等于两个行列式的和。这两个行列式的这一行（或列）分别是第一组数和第二组数，而其余各行（或列）与原来行列式的相应各行（或列）相同。即

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

性质4 行列式的任二行（或列）相交换，行列式的值改变符号。

如把二阶行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$中的二行交换，得$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$。由二阶行列式的定义，得

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} &= a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} \\ &= -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ &= -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

性质5 若行列式中有二行（或列）相同，则行列式的值为零。

如将三阶行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$的第一、二行相交换，根据性质 4，得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

所以

$$2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

故有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$