现代数学基础丛书

线性偏微分算子引论

上 册

齐民友 编著

科学出版社

现代数学基础丛书

线性偏微分算子引论

上 册

齐民友 编著

科学出版社

1986

内 容 简 介

本书介绍线性偏微分算子的现代理论，主要论述拟微分算子和 Fourier 积分算子理论，同时也系统地讲述了其必备的基础——广义函数理论和 Sobolev 空间理论. 本书分上、下两册. 上册着重讨论拟微分算子及其在偏微分方程经典问题 (Cauchy 问题和 Dirichlet 问题) 上的应用. 下册将主要介绍 Fourier 积分算子理论和佐藤的超函数理论.

本书可供有关专业的大学生、研究生、教师和研究工作者参考.

现代数学基础丛书

线性偏微分算子引论

上 册

齐民友 编著

责任编辑 吕 虹 张鸿林

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1986 年 8 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1986 年 8 月第一次印刷 印张：17 7/8

印数：0001—3,800 字数：472,000

统一书号：13031・3257

本社书号：4651・13—1

定价： 5.00 元

序　　言

五十年代以来，线性偏微分算子理论有了很大的发展. 这当然是由于四十年代末出现的广义函数论为线性偏微分算子理论提供了一个极好的框架. 可以说，它总结了以前的重大成果又为以后的发展提供了强有力的工具. 因此，无怪乎在六十年代以后，在这个领域中连续不断地出现了许多重大的成果，如拟微分算子理论、Fourier 积分算子理论、微局部分析、超函数理论等等. 大概没有什么人会怀疑，这些成果都获得了“生存权”，成为数学宝库的一个很有价值的部分了. 事实证明，它们的价值不仅在于它们将这个领域的研究大大地深化了，而且还在于它们在其它领域（微分几何、理论物理）中发挥着越来越大的作用. 但是这种情况也说明，要想跟上这个领域的发展也是一件相当困难的事. 要想在这个领域中工作，不得不有相当深厚的功力，不得不懂得越来越多的其它数学分支. 还应该指出，这个领域还在迅速发展，看不出有停下来或者是放慢步伐的迹象. 例如，正当我们用了很大的力量来掌握微局部分析时，它却已被人称为“七十年代算法”（见 Fefferman [2]），而到了八十年代中期的现在，它又发展到新的水平了. 这种情况对于我们曾在十多年中脱离了数学发展主流的人，是幸乎？不幸乎？

因此，想要写出一本书帮助我国读者能“跟上形势”，是作者力所不及的事. 幸好，我们有了 Hörmander 的新著 “The analysis of linear partial differential operators, I—IV”，它当然会是一部影响深远的巨著，特别是按许多同志的看法，它的第一卷是关心现代分析的读者所必备的知识. 因此，我们只能提出一个低得多的目标：对于这个领域中已经成熟的若干主要部分作一个入门的介绍. 这里说若干，是因为对许多当前十分活跃的问题就几乎没有提到. 按时间说，最多也只到七十年代初期. 这本书的中心内容是拟微分

算子和 Fourier 积分算子理论. 即使如此，这还是一个超出作者能力的尝试. 如果它能引起读者对偏微分算子理论的兴趣，并且去攻读例如 Hörmander 的新著和最新的文献，那就使作者十分满意了.

这本书不少部分是研究生教材，写的时候，假定读者具有经典的偏微分方程理论、泛函分析和函数论(实的和复的)的基本知识. 书中有个别地方用到一些不太常见的结果时，只能提出出处，或者假定读者自己会去补足. 这本书分上、下册，下册的内容按作者现在的设想将是辛几何、Fourier 积分算子理论、主型算子以及如果有可能的话还有佐藤的超函数理论.

对这本书中必然存在的缺点和错误，衷心欢迎读者批评指正.

作者

1984 年 3 月 11 日

目　　录

第一章　广义函数论

现代的微分算子理论是离不开广义函数论的. 在介绍它的历史起源之前,我们先规定一些常用的记号.

令 R^n 为 n 维 Euclid 空间,其中的点 $x=(x_1,\cdots,x_n)$. 我们记

$$|x|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2},\qquad \langle x\rangle=\sqrt{1+|x|^2}.$$

又设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in Z_+$ (即非负整数集),称数组 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 为重指标,用 α 来记它: $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, 并记

$$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n,$$
$$\alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_n!,$$
$$x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}.$$

我们又规定记 $\partial_x=(\partial_{x_1},\cdots,\partial_{x_n})=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$. 但由于 Fourier 变换的需要，我们更多地要用到 $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}$. 因此我们定义 $D_x=(D_{x_1},\cdots,D_{x_n})=(D_1,\cdots,D_n)=(\frac{1}{i}\partial_{x_1},\cdots,\frac{1}{i}\partial_{x_n})$, $D_x^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}$, 这样，一个 m 阶线性微分算子将是

$$P(x,D_x)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x)D_x^\alpha.$$

例如,几个古典的数学物理算子成为:

$$\Delta=\sum_{j=1}^{n}\partial_{x_j}^2=-\sum_{j=1}^{n}D_{x_j}^2,$$

$$\partial_t^2 - \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2 = -D_t^2 + \sum_{j=1}^{n} D_{x_j}^2,$$

$$\partial_t - \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2 = iD_t + \sum_{j=1}^{n} D_{x_j}^2.$$

设 α, β 是两个重指标，我们还规定

$$\alpha \geqslant \beta \Longleftrightarrow \alpha_j \geqslant \beta_j,\ j=1,\cdots,n,$$

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} = \binom{\alpha_1}{\beta_1}\cdots\binom{\alpha_n}{\beta_n},$$

$$\alpha-\beta = (\alpha_1-\beta_1,\ \cdots,\ \alpha_n-\beta_n).$$

数学分析的建立，使人们可以用数学工具来描述许多新的自然现象，因而取得了前所未有的成功：用函数来描述一个自然过程，对它进行微分积分运算，然后得出种种结论，这可以说是基本的方法．当时，人们都认为，描述自然现象的函数总是很规则的，用我们现在的语言来说，就是充分光滑的．函数的光滑性似乎是大自然和谐的反映．

但是数学的进一步发展表明，还存在许许多多不规则的函数．例如 Weierstrass 作出了处处连续但处处不可微的函数的例子．Fourier 级数的研究使人们不得不扩大必须研究的函数的范围．到十九世纪中叶，进入了对数学分析基础的批判和重新建立的时期．人们懂得了并不是任何函数都可以微分或积分的，许多运算只在一定的条件下才能进行．数学分析得到了长足的进步，然而不能不承认，直观性减少了，作为描述自然现象的工具的灵活性也减少了．有办法恢复这种直观性和灵活性吗？

挑战和启示首先来自物理学．十九世纪末英国工程师 Heaviside 首先引入以他命名的函数

$$Y(x) = \begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x<0. \end{cases} \tag{1}$$

本世纪初，另一个英国物理学家 Dirac 为了使量子力学中一般的

固有函数正规化，又引入了著名的"δ 函数"，其定义是

$$\delta(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ \infty, & x=0,\end{cases} \tag{2}$$

且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1.$$

这个函数有一个重要的特性，即对任一连续函数 $f(x)$ 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x)dx=f(0). \tag{3}$$

事实上

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\delta(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(0)\delta(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x)-f(0)]\delta(x)dx$$

$$=f(0)+\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}[f(x)-f(0)]\delta(x)dx$$

($\varepsilon>0$ 是任意的)。

后一积分等于 0，因为当 ε 充分小时

$$\left|\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}[f(x)-f(0)]\delta(x)dx\right|\leqslant\max_{|x|\leqslant\varepsilon}|f(x)-f(0)|\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\delta(x)dx$$

$$=\max_{|x|\leqslant\varepsilon}|f(x)-f(0)|\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx$$

$$=\max_{|x|\leqslant\varepsilon}|f(x)-f(0)|\to 0.$$

从而式(3)得"证"。

从古典分析的观点看来，这个结果是站不住脚的. 首先 $\delta(0)=\infty$ 就是无意义的，而且既然 $\delta(x)$ 几乎处处为 0，则应有 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=0$ 而不是 1. 可是它在物理上如此直观而且有用，除此之外，人们还发现它正是 Heaviside 函数的微商，因为

$$\int_{-\infty}^{x}\delta(x)dx=\left\{\begin{matrix}0, & x<0,\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1, & x>0\end{matrix}\right\}=Y(x). \tag{4}$$

因此不能不设法去解释它，以便有把握地应用它.

除了物理学以外，数学的发展，尤其是偏微分方程的发展，也

需要对某些“不合法”的运算提供新的说明．由于研究波动方程的基本解，J. Hadamard 在本世纪二十年代提出了发散积分的有限部分的概念；其后，M. Riesz 也提出了一种给发散积分赋以意义的方法．因为两个方法是很接近的，我们只介绍后者．考虑积分

$$I(\lambda)=\int_0^x f(t)t^{-\lambda}dt,\ \lambda \text{ 是复数}, f(t) \text{ 充分光滑}. \tag{5}$$

这个积分当 $\mathrm{Re}\lambda<1$ 时收敛，而且是 λ 的解析函数．但当 $k\leqslant \mathrm{Re}\lambda<k+1$ 时又当如何？仍然看 $\mathrm{Re}\lambda<1$ 的情况，将 $f(t)$ 用Taylor公式展开：

$$f(t)=\sum_{n=0}^{k-1}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}t^n+R_k(t)t^k,$$

代入式(5)有

$$\begin{aligned}I(\lambda)&=\sum_{n=0}^{k-1}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\int_0^x t^{n-\lambda}dt+\int_0^x R_k(t)t^{k-\lambda}dt\\&=\sum_{n=0}^{k-1}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\frac{x^{n-\lambda+1}}{(n-\lambda+1)}+\int_0^x R_k(t)t^{k-\lambda}dt.\end{aligned} \tag{6}$$

这个结果虽是在 $\mathrm{Re}\lambda<1$ 时得出的，其右方却在 $\mathrm{Re}\lambda<k+1$ 时有意义且为 λ 的解析函数(但有单极点 $\lambda=1\cdots,k$)，所以它是 $I(\lambda)$ 在半平面 $\mathrm{Re}\lambda<k+1$ 中的解析拓展．现在以(6)作为 $I(\lambda)$ 在 $\mathrm{Re}\lambda<k+1$ 时的定义，则发散积分有了意义．

1936 年 Sobolev (С. Л. Соболев) 在研究双曲型方程的 Cauchy 问题解的唯一性时提出了广义微商的概念．古典的 C^1 函数的微商有如下性质：若 $f(x)\in C^1(a,b)$，则记 $f'(x)=g(x)$，对任一光滑函数 $\varphi(x)$ 且在 a，b 附近 $\varphi(x)\equiv 0$ 者，有

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx=-\int_a^b g(x)\varphi(x)dx. \tag{7}$$

反之，若 $f(x)\in C^1(a,b)$，$g(x)\in C^0(a,b)$ 且对任意上述的 $\varphi(x)$ 式(7)恒成立，则必有 $f'(x)=g(x)$．但式(7)对于局部可积(即在 (a,b) 之任一紧子集上可积)的 $f(x)$，$g(x)$ 即已有意义，如果

能对任意上述的 $\varphi(x)$，式 (7) 均成立，则不妨定义 $g(x)$ 即 $f(x)$ 的广义微商. Sobolev 的广义微商概念有一个本质上新的想法：过去人们只认为函数是变量之间的一种对应关系，Sobolev 则因为函数可以生成一个泛函就把函数看成一个泛函. 就上例而言，令 $\Phi=\{\varphi(x):\ \varphi(x)$ 充分光滑且在 a, b 附近 $\varphi(x)\equiv 0\}$(Φ称为“基本空间”)，则局部可积函数 $f(x)$ 生成 Φ 上的线性泛函

$$\langle f, \varphi\rangle=\int_a^b f(x)\varphi(x)dx. \tag{8}$$

因此，我们就把 $f(x)$ 等同于 Φ 上的这个泛函. 但是 Φ 上的线性泛函很多，而不一定都由局部可积函数生成，例如可以定义泛函 δ 如下：

$$\langle \delta, \varphi\rangle=\varphi(0). \tag{9}$$

可以证明，δ 不可能由局部可积函数生成. 但是不妨认为式 (9) 也是一个广义的“函数”记作 $\delta(x)$，而且模仿式 (8)，也不妨将式 (9) 写作

$$\langle \delta, \varphi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\varphi(x)dx=\varphi(0). \tag{10}$$

这样就对式 (3) 作出了新的说明. 这里的思想又进了一步；式(7) 虽然推广了微商概念，但 $f(x)$ 的广义微商 $g(x)$ 仍旧是局部可积函数，这里则提出泛函是函数概念的推广，则广义函数可以是极为广泛的对象. 这就是法国数学家 L. Schwartz 建立广义函数论(他称为分布论)的基本思想.

广义函数论的另一个来源是 Fourier 变换的推广. 对于 $f(x)\in L^1(-\infty, +\infty)$，其 Fourier 变换定义为

$$\hat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix\xi}f(x)dx. \tag{11}$$

但若 $f(x)\notin L^1(-\infty, +\infty)$，又当如何定义其 Fourier 变换？暂时仍设 $f(x)\in L^1(-\infty, +\infty)$，则对任一 $\varphi(\xi)\in C^\infty(-\infty, +\infty)$ 且当 $|\xi|\geqslant M$ (M 由 φ 决定)时 $\varphi(\xi)\equiv 0$，有

$$\hat{\varphi}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ix\xi}\varphi(\xi)d\xi$$

存在. 再认为 f 与 $\hat{f}$ 都生成泛函(都是泛函),则

$$\langle \hat{f}(\xi), \varphi(\xi)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} \varphi(\xi) d\xi = \langle f(x), \hat{\varphi}(x)\rangle. \tag{12}$$

但是,即令 $f(x) \notin L^1(-\infty, +\infty)$, $\langle f, \hat{\varphi}\rangle$ 仍可能有意义而且可能找到另一个泛函 $\hat{f}$ 适合式(12). 这时我们自然有理由认为 $\hat{f}$ 即 f 的 Fourier 变换. 一般地,若有泛函 f 与 $\hat{f}$ 适合式(12),就说 $\hat{f}$ 是 f 的 Fourier 变换. 因此,利用基本空间上的泛函这个思想也可以推广 Fourier 变换.

大量材料的积累使 L. Schwartz 有可能在本世纪四十年代末提出广义函数论(他的分布论一书[1]出版于 1948 年): 广义函数就是某个基本空间上的连续线性泛函. 几十年来广义函数论在数学的各个分支(特别是偏微分方程理论)和理论物理中得到越来越广泛的应用,是现代数学中的一个重要的分支.

§1. 基本空间

1. 拓扑线性空间和 Fréchet 空间. 前面已经指出,广义函数就是某基本空间上的连续线性泛函. 这些"基本空间"都是拓扑线性空间. 在介绍这个概念之前我们先列举一些以下常用的基本空间,由于暂时还没有讨论其拓扑结构,所以现在我们只说它们是一些函数族. 以下,Ω 恒表示 $\mathbf{R}^n$ 的开子集.

$C^m(\Omega)$ 和 $C^\infty(\Omega)$. $C^m(\Omega)$ (m 为非负整数)表示在 Ω 上具有直到 m 阶在内的连续微商的函数族. $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$ 表示在 Ω 上具有任意阶连续微商的函数族, $C^0(\Omega)$ 时常被写作 $C(\Omega)$.

$B^m(\Omega)$ 和 $B^\infty(\Omega)$分别是 $C^m(\Omega)$和 $C^\infty(\Omega)$之子集,但其中函

数的直到相应阶的微商均在Ω上有界. 所以，$f\in B^m(\Omega)(B^\infty(\Omega))$，则 $\|f\|_\alpha=\sup\limits_{\Omega}|D^\alpha f|<+\infty, |\alpha|\leqslant m\ (\forall\alpha)$，$\|\cdot\|_\alpha$ 之值与α有关.

设$f(x)$在Ω上连续，我们定义其支集为 $\mathrm{supp}f=\{x,\ x\in\Omega;\ f(x)\neq 0\}^c$，即使 $f(x)$ 在其外为0的最小闭集.

$C^m(K)$ 和 $C^\infty(K)$. K表示Ω的一个紧子集：
$C^m(K)=\{f:\ f\in C^m(\Omega),\ \mathrm{supp}f\subset K\}$; $C^\infty(K)=\{f:\ f\in C^\infty(\Omega),\ \mathrm{supp}f\subset K\}=\bigcap\limits_{m=0}^{\infty}C^m(K)$.

$C_0^m(\Omega)$和$C_0^\infty(\Omega)$. $C_0^m(\Omega)=\bigcup\limits_K C^m(K)$, $C_0^\infty(\Omega)=\bigcup\limits_K C^\infty(K)$, "$\bigcup\limits_K$"表示对含于$\Omega$内的一切紧子集取交. 所以 $C_0^m(\Omega)$ ($C_0^\infty(\Omega)$) 即具有紧支集的 $C^m(\Omega)$ ($C^\infty(\Omega)$) 函数之集.

以后，当 $\Omega=\mathbf{R}^n$ 时，我们时常略去Ω而写作 C^m, C_0^∞ 等等. 又，若无特殊声明，光滑函数恒指具有任意阶连续微商的函数.

对于这些函数族，我们需要赋以某种拓扑结构，使之成为拓扑线性空间.

定义 1.1.1 设V既是拓扑空间，又是$\mathbf{R}$上(或$\mathbf{C}$上)的线性空间，而且其线性运算在此拓扑结构下是连续的，则V称为实(或复)拓扑线性空间.

拓扑空间的拓扑结构既可用开集来规定，也可用其它方法来规定. 以下我们常用邻域来规定，这样最方便. 又由于基本空间都有线性结构，所以只要规定原点的邻域的基本系即可. 为了定义邻域，例如在 Banach 空间中可以应用范数；但我们常用的基本空间时常不是 Banach 空间，因而没有范数. 这样我们需要一个更广的概念.

定义 1.1.2 若对线性空间V中每一点x均可指定一个非负实数$p(x)$，满足

i) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$,　　$\alpha \in \mathbf{R}$ 或 $\mathbf{C}$ 即 V 之标量域；

ii) $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$,

则 $p(x)$ 称为 x 之半范.

由 i) 令 $\alpha = 0$ 自然有 $p(0) = 0$，若其逆成立，即 $p(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$，则半范成为范数.

定义 1.1.3 $\mathbf{R}$ 上(或 $\mathbf{C}$ 上)的 Fréchet 空间 V 是赋最多可数个半范 $p_1, \cdots, p_m, \cdots$ 的 $\mathbf{R}$ (或 $\mathbf{C}$) 线性空间，而且

i) $\forall m,\ p_m(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$,

ii) 完备性：设 $\{x_k\}$ 是 V 中的 Cauchy 序列(即若对任一 $\varepsilon > 0$，对于 p_m 必有 $K_m(\varepsilon)$，使当 $k, l \geqslant K_m(\varepsilon)$ 时 $p_m(x_k - x_l) < \varepsilon$)，则必有 $x \in V$. 使对一切 p_m，$\lim\limits_{k\to\infty} p_m(x_k - x) = 0$.

若一 Fréchet 空间只有一个半范，它当然就是一个 Banach 空间. Fréchet 空间和 Banach 空间一样都是距离空间.对 Fréchet 空间 V 中任意两点 x 和 y，读者可以自己证明

$$\rho(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{p_m(x-y)}{1 + p_m(x-y)}$$

确实是一个距离.

在一个 Fréchet 空间中我们可定义原点的邻域的基本系为 $V_{m,n} = \{x:\ x \in V,\ p_m(x) < \varepsilon_n\} (\varepsilon_n \to 0)$. 所以 Fréchet 空间是一种拓扑线性空间. 下面是几个例子.

例 1. $C^m(\Omega)$　在 Ω 中取一串上升而穷竭的紧集序列 $K_1, \cdots, K_j, \cdots$ 即适合 $K_1 \Subset K_2 \Subset \cdots$ 而且 $\bigcup\limits_j K_j = \Omega$ 的紧集序列. "$A \Subset B$" 即指 $\bar{A} \subset \mathring{B}$ 且为其紧子集. 于是可以定义可数多个半范

$$p_j(f) = \sup_{K_j} \sum_{|\alpha| \leqslant m} |D^\alpha f|,\ j = 1, 2, \cdots$$

而使 $C^m(\Omega)$ 成为 Fréchet 空间.

例 2. $C^\infty(K)$　也是 Fréchet 空间，因为它有半范

$$p_m(f)=\sup_K \sum_{|\alpha|\leqslant m}|D^\alpha f|,\ m=0,1,\cdots$$

例 3. $C^\infty(\Omega)$ 作例 1 那样的紧集序列 K_j，并定义其中的可数多个半范为

$$p_{m,j}(f)=\sup_{K_j}\sum_{|\alpha|\leqslant m}|D^\alpha f|,\ j=1,2,\cdots;m=0,1,\cdots$$

例 4. 设 $D\subset \mathbf{C}$ 为复平面 $\mathbf{C}$ 的一个区域，记 D 上的解析函数族为 $H(D)$. 如例 1 那样作紧集序列 $D_1,\cdots,D_n,\cdots$，并定义一族半范

$$p_m(f)=\sup_{D_m}|f(z)|,\ m=1,2,\cdots,f(z)\in H(D),$$

则 $H(D)$ 也是 Fréchet 空间.

例 5. 以后应用最广的基本空间是 $C_0^\infty(\Omega)$. 虽然 $C_0^\infty(\Omega)\subset C^\infty(\Omega)$，$C^\infty(\Omega)$的半范却不能使它成为 Fréchet 空间，因为不能保证完备性：按例 3 的半范的 Cauchy 序列极限一般在 $C^\infty(\Omega)$ 中而不一定在 $C_0^\infty(\Omega)$ 中，即不一定有紧支集.

Fréchet 空间和 Banach 空间本质上是不同的. 例如例 3，例 4 的空间不可能赋范——而不只是说前文所定义的 p_j 等等不是范数而只是半范. 同样，例 5 的 $C_0^\infty(\Omega)$ 不可能赋以半范使之成为 Fréchet 空间. 关于拓扑线性空间的进一步的知识和以上的问题，例如可以参看 J. Barros-Neto[1]和 W. Rudin[1].

2. 空间 $\mathscr{D}(\Omega)$. $C_0^\infty(\Omega)$不是一个 Fréchet 空间而是一串 Fréchet 空间$C^\infty(K_j)$的“归纳极限”，这里$K_1\Subset K_2\Subset\cdots$且 $\bigcup_j K_j=\Omega$. 这就是说，若记 $C^\infty(K_j)=E_j$，则 $E_j\subset E_{j+1}$，而且嵌入映射 $\iota:E_j\to E_{j+1}$，是连续的(这一点时常简记作$E_j\hookrightarrow E_{j+1}$)，同时 $C_0^\infty(\Omega)=\bigcup_j E_j$. 在 $C_0^\infty(\Omega)$ 上可以赋一种“归纳极限拓扑”. 由于这种拓扑中原点邻域的基本系构造较复杂，我们只举出其中一个序列趋于 0 的定义，这已可满足下面的需要，至于一般的讨论可参看上述的 Barros-Neto